ΤΕΤΑΡΤΗ 2/12/20

Τετάρτη, 2 Δεκεμβρίου 2020 10:26 πμ

Άσκηση: Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4 \quad \text{και} \quad 4\,\eta\mu(x-2)\le (x-2)\cdot f(x)\le x^2-4 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Αν $g(x)=x^2-x+1$, να δείξετε ότι η C_f τέμνει τη C_g σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,2)$.

Λύση

Θέτω $f(x)=g(x) \Rightarrow f(x)-g(x)=0$

$$\Rightarrow f(x)-x^2+x-1=0$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^2+x-1,\ x\in[1,2]$

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως π.σ.σ.

$h(1)=f(1)-1^2+1-1=f(1)-1\overset{(1)}{=}0-1=-1<0$

$h(2)=f(2)-2^2+2-1=f(2)-3\overset{(2)}{=}4-3=1>0$

Η f είναι συνεχής στο $x=1$ οπότε $f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)$

όμως $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4$ θέτω $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x-1}\Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot\varphi(x)$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\varphi(x)=0\cdot 4=0$$

Συνεπώς $f(1)=0$. (1)

Η f είναι συνεχής στο $x=2$ οπότε $f(2)=\lim_{x\to 2^-}f(x)$

όμως $4\,\eta\mu(x-2)\le(x-2)\cdot f(x)\le x^2-4$.

$$\overset{x<2}{\Rightarrow}\ \frac{4\,\eta\mu(x-2)}{x-2}\ge f(x)\ge\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-}4\,\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}=\lim_{u\to 0}\frac{4\,\eta\mu u}{u}=4\cdot 1=4$$

Θέτω $u=x-2$, $\lim_{x\to 2^-}u=0$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

Άρα από κρ. παρεμβ.

$\lim_{x\to 2^-}f(x)=4$

$\Rightarrow f(2)=4$ (2)

$h(1)\cdot h(2) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ ώστε $h(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

2ο Σχόλιο Θ. Bolzano.

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

- Συνεπώς μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Βασικές Εφαρμογές

1η) Να βρείτε το πρόσημο της $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,\pi]$.

Λύση

Θέτω $f(x)=0 \Rightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Rightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x$

$$\overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Rightarrow} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1 \Rightarrow \varepsilon\varphi x=-1$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$x\in[0,\pi] \Rightarrow 0\le x\le\pi \Rightarrow 0\le \kappa\pi+\frac{3\pi}{4}\le\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{4}\le\kappa\pi\le\pi-\frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4}\le\kappa\pi\le\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4}\le\kappa\le\frac{1}{4} \Rightarrow \kappa=0 \text{ άρα } x=\frac{3\pi}{4}$$

x	0	$3\pi/4$	π
x_0	$x_0=0$		$x_0=\pi$
$f(x_0)$	$f(0)=\eta\mu 0+\sigma\upsilon\nu 0=1>0$		$f(\pi)=\eta\mu\pi+\sigma\upsilon\nu\pi=-1<0$
$f(x)$	$+$	0	$-$

2η) Έστω η $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[-1,1]$ για την οποία ισχύει $x^2+f^2(x)=1$ $\forall x\in[-1,1]$

α) Να βρείτε τις ρίζες της $f(x)=0$

β) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$

γ) Αν $f(0)=-1$ να βρείτε τον τύπο της f και να σχεδιάσετε τη C_f.

<u>Λύση</u> $f^2(x)+x^2=1 \Rightarrow f^2(x)=1-x^2$

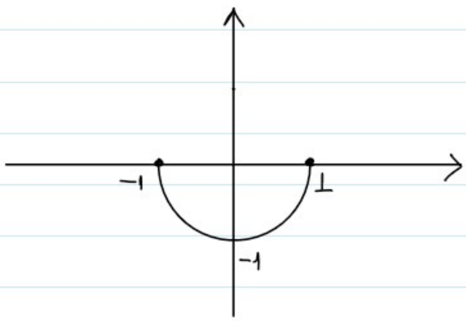
α) Θέτω $f(x)=0 \Rightarrow f^2(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$.

β) Η f είναι συνεχής στο $(-1,1)$ και $f(x)\neq 0 \ \forall x\in(-1,1)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$.

γ) Επειδή $f(0)=-1$ τότε $f(x)<0$ στο $(-1,1)$

και

$$f^2(x)=1-x^2 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{1-x^2}$$
$$\Rightarrow |f(x)|=\sqrt{1-x^2}$$
$$\Rightarrow f(x)=-\sqrt{1-x^2}, \ x\in[-1,1]$$



3η) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $f^2(x)=x^2 \ \forall x\in\mathbb{R}$

<u>Λύση</u> Θέτω $f(x)=0 \Rightarrow f^2(x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

Η f είναι συνεχής στα $(-\infty,0)$ κ' $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ $\forall x\in(-\infty,0)$ και $\forall x\in(0,+\infty)$ άρα διατηρεί σ' αυτά σταθερό πρόσημο.

οπότε $f^2(x) = x^2 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{x^2} \Rightarrow |f(x)| = |x|$

$$f(x) = x \ , \ x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

ή

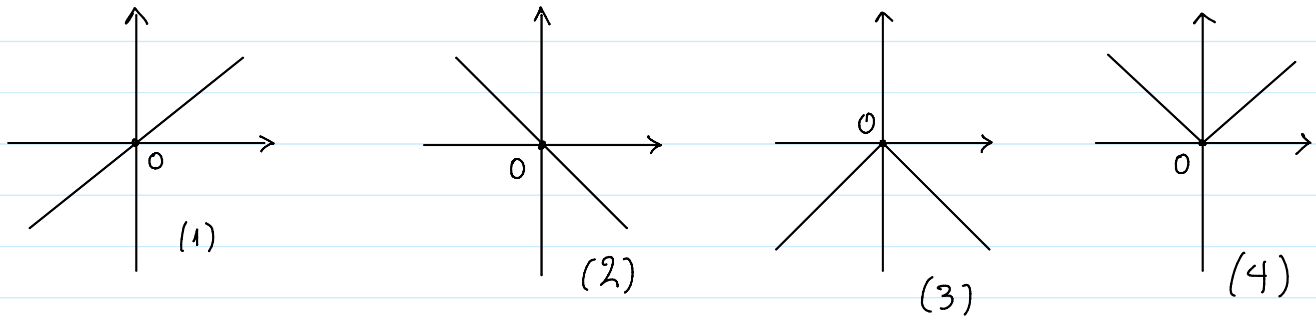
$$f(x) = -x \ , \ x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0) \\ -x, & x \in [0, +\infty) \end{cases} \quad (3)$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0, +\infty) \end{cases} \quad (4)$$



4η) Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όταν

- $f^2(x) + 2x f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 1$

Λύση

$$f^2(x) + 2x f(x) = 1 \Rightarrow f^2(x) + 2x f(x) + x^2 = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow (f(x) + x)^2 = 1 + x^2 \quad , \ x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |f(x) + x| = \sqrt{1 + x^2}$$

Θέτω $g(x) = f(x) + x \ , \ x \in \mathbb{R}$

$g(x) = 0 \Rightarrow f(x) + x = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ Αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Συνεπώς $g(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ και $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

$g(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$. Άρα $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) + x > 0$.

Έτσι $|f(x) + x| = \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow f(x) + x = \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x^2} - x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις για λύση.

3.18 *Αν για κάθε x* $\in[-4,4]$ *η f είναι συνεχής και* $x^2 + f^2(x) = 16$ *να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-4,4)*

3.19 *Αν για κάθε x* $\in[-1,1]$ *η f είναι συνεχής και* $x^{2010} + f^{2010}(x) = 1$ *να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1)*

3.20 *Έστω οι συναρτήσεις f,g:[0,1]* $\to$ *R, όπου η f συνεχής , ώστε* $x^{2009} + f(x)g(x) = 1$ *για κάθε x* $\in[0,1]$. *Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο (0,1)*