ΤΕΤΑΡΤΗ 27/1/21

Τετάρτη, 27 Ιανουαρίου 2021 10:13 πμ

SOS

15. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$,
- $f(\alpha)=f(\beta)=0$,
- $f'(x)\cdot g(x)\neq f(x)\cdot g'(x)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. (1)

Να αποδείξετε ότι:

1) $g(\alpha)\cdot g(\beta)\neq 0$.

2) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g(x_0)=0$.

Λύση:

1) για $x=\alpha$ $\quad (1)\Rightarrow f'(\alpha)\cdot g(\alpha)\neq f(\alpha)\cdot g'(\alpha) \xRightarrow{f(\alpha)=0} f'(\alpha)\cdot g(\alpha)\neq 0 \Rightarrow g(\alpha)\neq 0$

$x=\beta$ $\quad (1)\Rightarrow f'(\beta)\cdot g(\beta)\neq f(\beta)\cdot g'(\beta) \xRightarrow{f(\beta)=0} f'(\beta)g(\beta)\neq 0 \Rightarrow g(\beta)\neq 0$

Άρα $g(\alpha)\cdot g(\beta)\neq 0$.

2) Έστω ότι $g(x)\neq 0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως π.σ.σ.

Η h είναι παρ/μη στο (α,β) με $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\neq 0$

$h(\alpha)=h(\beta)=0$

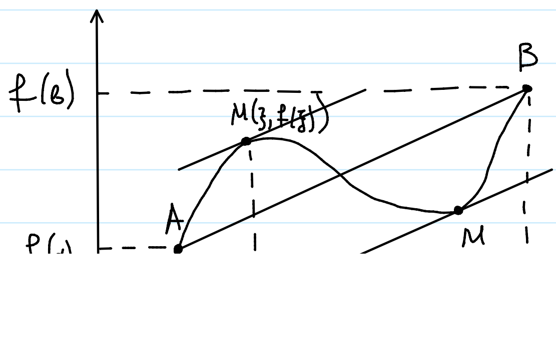
Άρα από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$h'(\xi)=0$ άτοπο αφού $h'(x)\neq 0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g(x_0)=0$.

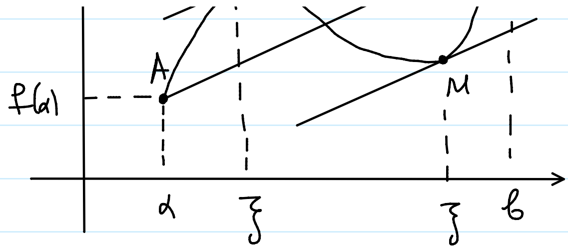
ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ
Θ.Μ.Τ.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β)



Αν η f είναι συνεχής στο [α,β]
και παραγωγίσιμη στο (α,β)
τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον
$\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$



Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε η (εφ) της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία AB όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$

Π.χ. 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{\pi}\eta\mu(\pi x), & x \le 0 \\ x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[-2,2]$ και να βρείτε τα σημεία $\xi \in (-2,2)$ για τα οποία ισχύει.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο [-2,0) ως π.σ.σ.
Η f είναι συνεχής στο (0,2] ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi}\right) = 0 \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+2x) = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ Η f είναι συνεχής στο } x=0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο [-2,2]

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-2,0) με $f'(x) = \left(x + \frac{1}{\pi}\eta\mu(\pi x)\right)'$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{\pi}\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot(\pi x)' = 1 + \sigma\upsilon\nu(\pi x).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) με $f'(x) = (x^2+2x)' = 2x+2$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x + \frac{1}{\pi}\eta\mu(\pi x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{x} + \frac{\eta\mu(\pi x)}{(\pi x)}\right) = 1+1 = 2$$

$$\lim \frac{f(x)-f(0)}{} = \lim \frac{x^2+2x}{} = \lim \frac{x(x+2)}{} = \lim(x+2) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$$

Άρα $f'(0)=2$. Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$

με $f'(x)=\begin{cases} 1+συν(\pi x), & x\leq 0\\ 2x+2, & x>0\end{cases}$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-2,2)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{2^2+2\cdot 2-\left(-2+\frac{1}{\pi}ημ(-2\pi)\right)}{4}$$

$$=\frac{8+2}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Αν $\xi\in(-2,0]$ $f'(\xi)=\frac{5}{2}\Rightarrow 1+συν(\pi\xi)=\frac{5}{2}\Rightarrow συν(\pi\xi)=\frac{3}{2}$ άτοπο.

Αν $\xi\in(0,2)$ $f'(\xi)=\frac{5}{2}\Rightarrow 2\xi+2=\frac{5}{2}\Rightarrow 2\xi=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\xi=\frac{1}{4}}$.

Π.Χ.2 (4 φωτοτυπία στο Θ.Μ.Τ.)

A. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x)=|x-1|\ln x$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},e\right]$.

B. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{e},e\right)$ ώστε $\xi(\xi-1)\ln\xi+(\xi-1)^2=\xi|\xi-1|$.

Λύση

A. $f(x)=|x-1|\ln x=\begin{cases} -(x-1)\cdot\ln x, & \frac{1}{e}\leq x<1\\ (x-1)\cdot\ln x, & 1\leq x<e\end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right)\cup(1,e]$ ως π.σ.σ.

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-(x-1)\ln x\right)=0$ η f είναι συνεχής στο

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(-(x-1)\ln x\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left((x-1)\ln x\right) = 0$$
$$f(1)=0$$

η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ οπότε είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

Η f είναι παρ/μη στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ με

$$f'(x) = \left(-(x-1)\cdot \ln x\right)' = -\ln x - (x-1)\cdot \frac{1}{x}$$

Η f είναι παρ/μη στο $(1, e)$ με

$$f'(x) = (x-1)\cdot \ln x = \ln x + (x-1)\cdot \frac{1}{x}$$

Δηλαδή η f είναι παρ/μη στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)\cup(1,e)$ με

$$f'(x) = \frac{x-1}{|x-1|}\ln x + \frac{|x-1|}{x}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\cdot \ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \ln x = 0$$

$f'(1)=0$

Συνεπώς η f είναι παρ/μη στο $\left(\frac{1}{e}, e\right)$

άρα από Θ. Μ. Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e)-f\left(\frac{1}{e}\right)}{e-\frac{1}{e}}$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{|e-1|\ln e - \left|\frac{1}{e}-1\right|\ln\frac{1}{e}}{e-\frac{1}{e}}$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{(e-1)-\left(\frac{1}{e}-1\right)}{e-\frac{1}{e}} = \frac{e-\frac{1}{e}}{e-\frac{1}{e}} = 1$$

Για $\xi \neq 1$

$$\Rightarrow \frac{\xi-1}{|\xi-1|}\ln(\xi-1) + \frac{|\xi-1|}{\xi} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi\cdot\cancel{|\xi-1|}\cdot\frac{\xi-1}{\cancel{|\xi-1|}}\ln(\xi-1)+\cancel{\xi}\cdot|\xi-1|\cdot\frac{|\xi-1|}{\cancel{\xi}}=\xi\cdot|\xi-1|$$

$$\Rightarrow \xi\cdot(\xi-1)\ln(\xi-1)+|\xi-1|^2=\xi\cdot|\xi-1|$$

Για $\xi=1$ $\quad f'(1)=1$ ισχύει.