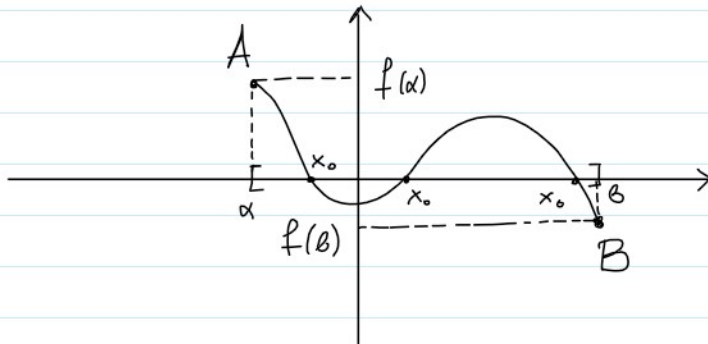


Θεώρημα Βολζαμ



Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $[a, b]$

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ετερόσημες)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = 0$

δηλαδή υπάρχει μια, τουλάχιστον, λύση της $f(x) = 0$ στο (a, b) .

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$ η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο x_0 .

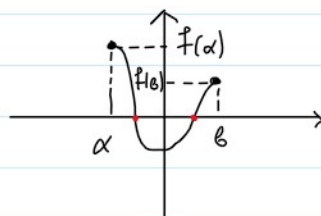
1ο Σχολίο: Το αντίστροφο του Θεωρήματος ΔΕΝ ισχύει.

Δηλαδή:

- Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η $f(x) = 0$ έχει μια λύση στο (a, b) τότε κατ'ανάγκη $f(a) \cdot f(b) < 0$

ΛΑΘΟΣ

για π.χ.



Η f έχει ρίζες στο (a, b) και $f(a) \cdot f(b) > 0$.

- Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) \cdot f(b) > 0$ τότε η $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο (a, b) **ΛΑΘΟΣ**
- Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, b) και $f(a) < 0$ τότε κατ' αναγκή $f(b) > 0$ **ΛΑΘΟΣ**

Εφαρμοχές

1m) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $\eta \mu x_0 = x_0 - 1$.

Λύση: $\eta \mu x_0 - x_0 + 1 = 0$

Θέτω $f(x) = \eta \mu x - x + 1$, $x \in [0, \pi]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως πράξη η συνεχών συναρτ. (π.σ.σ.)

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \eta \mu 0 - 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(\pi) &= \eta \mu \pi - \pi + 1 = -\pi + 1 < 0 \end{aligned} \right\} f(0) \cdot f(\pi) < 0$$

οπότε από Θ.Βολζαμο υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

2m) Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$$(1) \quad f^3(x) + f^2(x) + f(x) = x^3 + x^2 - 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

Λύση

Η f είναι συνεχής και στο $[0, 2]$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$(1) \Rightarrow f(x) \cdot (f^2(x) + f(x) + 1) = x^3 + x^2 - 5$$

$$\text{Για } x=0 \quad \underset{-}{f(0)} \cdot \left(\underset{+}{f^2(0) + f(0) + 1} \right) = \underset{-}{-5} < 0$$

$$f^2(0) + f(0) + 1 > 0 \quad \text{δὲν} \quad \Delta = -3 < 0$$

$$\text{Άρα} \quad f(0) < 0$$

$$\text{για} \quad x=2 \quad \underset{+}{f^2(2)} + \underset{+}{f(2)} + 1 = 8 + 4 - 5 = 7 > 0$$

$$f^2(2) + f(2) + 1 > 0 \quad \text{δὲν} \quad \Delta = -3 < 0$$

$$\text{Άρα} \quad f(2) > 0$$

$$f(0) \cdot f(2) < 0$$

οὕτως ἀπὸ Θ. Βολζαμὸ $f(x)=0$ ἔχει μιὰ
πυλᾶξιμον λύση στὸ $(0,2)$.

3η) Νὰ δείξετε ὅτι ἡ ἐξίσωση:

$$a(x-\mu)(x-\nu) + b(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$$

ὅπου $a, b, \gamma > 0$ καὶ $\lambda < \mu < \nu$, ἔχει ἀκριβῶς δύο ρίζες
ἀντίστροφες στὰ διαστήματα (λ, μ) καὶ (μ, ν)

Λύση

4η) Νὰ δείξετε ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$\frac{e^x}{x-1} = \frac{\ln x}{2-x}$$

ἔχει μιὰ, πυλᾶξιμον ρίζα στὸ $(1,2)$

Λύση