13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[1,e]$, έτσι ώστε να ισχύει $f(1)=\frac{f(e)}{e}+1$ (1). Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $B(0,x_0)$.

Λύση

$$\text{Εφ: } y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$B\in(\text{Εφ}) \Rightarrow x_0-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(0-x_0)$$

$$\Rightarrow x_0-f(x_0)=-x_0f'(x_0)$$

$$\Rightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)+x_0=0$$

$$\Rightarrow x_0f'(x_0)-(x_0)'f(x_0)+x_0=0$$

$$\overset{x_0>0}{\Rightarrow} \frac{x_0f'(x_0)-(x_0)'f(x_0)}{x_0^2}+\frac{\cancel{x_0}}{x_0^{\cancel{2}}}=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x_0)}{x_0}+\ln x_0\right)'=0$$

Θέτω $F(x)=\frac{f(x)}{x}+\ln x$, $x\in[1,e]$

Η F είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως π.σ.σ. (Η f συνεχής ως παρ/μη).

Η F είναι παρ/μη στο $(1,e)$ με $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+\frac{1}{x}$

$$\left.\begin{aligned} F(1)&=\frac{f(1)}{1}+\ln 1=f(1)\\ F(e)&=\frac{f(e)}{e}+\ln e=\frac{f(e)}{e}+1\end{aligned}\right\}\ F(1)=F(e)$$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,e)$ ώστε

$$F'(x_0)=0 \Rightarrow x_0-f(x_0)=-x_0f'(x_0)$$

14. Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και ισχύει: $f(1)=f(2)-\frac{3}{2}$.

1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$, ώστε $f'(x_0)=x_0$.

2) Αν η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και $f'(1)>4$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$, ώστε $f'(\xi)=4\xi$.

Λύση

1) $f'(x_0)=x_0 \Rightarrow f'(x_0)-x_0=0 \Rightarrow \left(f(x_0)-\frac{x_0^2}{2}\right)'=0$

αφού $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{2x}{2}=x$

Θέτω $F(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$, $x\in[1,2]$.

Η F είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως π.σ.σ., παρ/μη στο $(1,2)$ με $F'(x)=f'(x)-x$ και $F(1)=f(1)-\frac{1}{2}=f(2)-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=f(2)-2$

$F(2)=f(2)-2$

άρα $F(1)=F(2)$

Από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ ώστε

$$F'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=x_0$$

2) Αν η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και $f'(1)>4$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$, ώστε $f'(\xi)=4\xi$.

Λύση $f'(\xi)=4\xi \Rightarrow f'(\xi)-4\xi=0$

Θέτω $g(x)=f'(x)-4x$, $x\in[1,x_0]$

Η g είναι συνεχής στο $[1,x_0]$ ως π.σ.σ.

$g(1)=f'(1)-4>0$

$g(x_0)=f'(x_0)-4x_0=x_0-4x_0=-3x_0<0$

$g(1)\cdot g(x_0)<0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x_0)$ ώστε $g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=4\xi$.