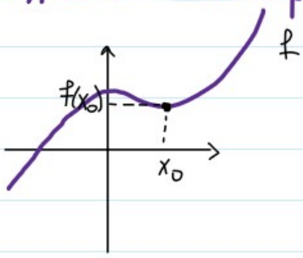
ΤΕΤΑΡΤΗ 25/11/20

Τετάρτη, 25 Νοεμβρίου 2020 8:53 πμ

Συνέχεια Συνάρτησης στο $x_0 \in A_f$

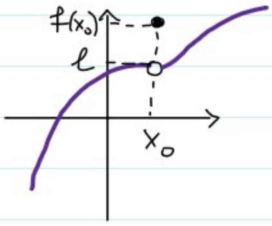
1 

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in A_f$ όταν

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

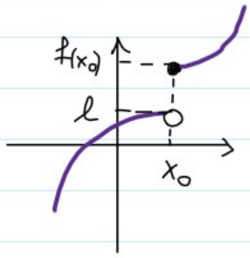
ή

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)}$$

2 

Δεν είναι συνεχής στο x_0 όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

3 

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Δεν υπάρχει όριο στο x_0

<u>Π.χ.</u> Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$;

- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 4) = 2^2 + 4 = 8$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^3 = 8$
- $f(2) = 2^3 = 8$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 8 = f(2)$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

<u>Π.χ.2</u> Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0 = -2$ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2 \end{cases}$

<u>Λύση</u>

- $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}} = \lim_{x \to -2} (x - 1) = -3$

- $f(-2)=-3$

Άρα $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$, συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x_0=-2$.

<u>Π.χ.3</u> Δίνεται η $f(x)=\dfrac{|x-1|+|x+1|}{2}$ να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και στο $x_0=-1$.

<u>Λύση</u>

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$

Αν $x<-1$ $\quad f(x)=\dfrac{-\cancel{x}+\cancel{1}-x-\cancel{1}}{2}$

$f(x)=\dfrac{-2x}{2}=-x$

Αν $-1\leq x\leq 1$ $\quad f(x)=\dfrac{-\cancel{x}+1+\cancel{x}+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Αν $x>1$ $\quad f(x)=\dfrac{x-\cancel{1}+x+\cancel{1}}{2}=\dfrac{2x}{2}=x$

συνεπώς $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 1, & -1\leq x\leq 1\\ x, & x>1\end{cases}$ $\qquad x_0=-1$, $x_0=1$

- $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-x)=1$

  $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} 1 = 1$

  $f(-1)=1$

  $\Big\}\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$

  Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=-1$

- $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1 = 1$

  $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x = 1$

  $f(1)=1$

  $\Big\}\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

  Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

<u>Π.χ.4.</u> Αν $f(x)=\begin{cases}(x-k)\cdot(x+k), & x\leq 2\\ kx+5, & x>2\end{cases}$

Να προσδιορίσετε το k, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ τότε

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-k)\cdot(x+k) = (2-k)\cdot(2+k) = 4-k^2$

- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (kx+5) = 2k+5$

- $f(2) = (2-k)(2+k) = 4-k^2$

Άρα $4-k^2 = 2k+5 \Rightarrow k^2+2k+1=0$

$\Rightarrow (k+1)^2 = 0 \Rightarrow k+1=0 \Rightarrow \boxed{k=-1}$

<u>Π.χ. 6</u> (Εύρεση τύπου συνεχούς συνάρτησης).

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 0$ με $x\cdot f(x) = \text{συν}x - 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

<u>Λύση</u> α) για $x \neq 0$ $\quad x f(x) = \text{συν}x - 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\text{συν}x - 1}{x}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ τότε

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{συν}x-1}{x} = 0$$

β) και $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{συν}x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Ασκήσεις σελ 80 1, 2 Α΄ ομάδας

σελ 81 2, 3 Β΄ ομάδας.