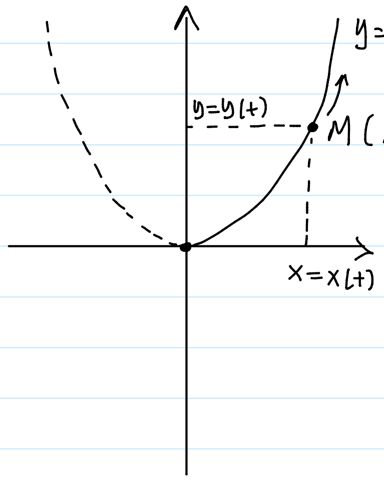
ΤΕΤΑΡΤΗ 20/1/21

Τετάρτη, 20 Ιανουαρίου 2021 10:19 πμ

σελ 126.

5. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\frac{1}{4}x^2$, $x\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.



Δεδομένα

$y(t)=\frac{1}{4}x^2(t)$

$x(t)\geqslant 0$

$x'(t)=y'(t)$

Ζητούμενα

$x(t)=;$

$y(t)=;$

Λύση

$y(t)=\frac{1}{4}x^2(t)$

$y'(t)=\left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)'=\frac{1}{\cancel{4}_2}\cancel{2}x(t)\cdot x'(t)$

$y'(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot x'(t)$

$\xRightarrow{x'(t)=y'(t)}$ $x'(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot x'(t)$

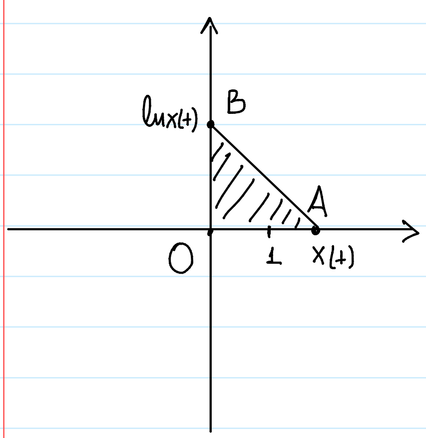
$\xRightarrow{x'(t)>0}$ $1=\frac{1}{2}x(t)\Rightarrow x(t)=2$

$y(t)=\frac{1}{4}\cdot 2^2=1.$

άρα $M(2,1)$

Β' ομάδα σελ 126.

2. Έστω T το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x>1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού T, όταν $x=5$cm.



Δεδομένα

$O(0,0)$

$A(x,0)\xrightarrow{x=x(t)}A(x(t),0)$

$B(0,\ln x)$, $x>1\longrightarrow B(0,\ln x(t))$, $x(t)>1$

$x'(t)=4$ cm/sec

$x(t)=5$cm

Ζητούμενο $\longrightarrow$ $T'(t)$.

$x(t)>1\Rightarrow \ln x(t)>\ln 1\Rightarrow \ln x(t)>0$

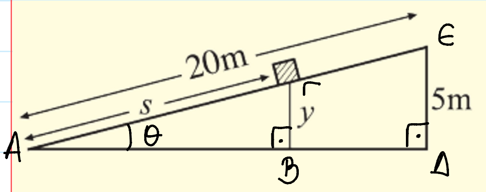
$$T(t)=\frac{(OA)\cdot(OB)}{2}=\frac{x(t)\cdot \ln x(t)}{2}$$

$$T'(t)=\frac{x'(t)\cdot \ln x(t)+x(t)\cdot(\ln x(t))'}{2}=\frac{x'(t)\cdot \ln x(t)+\cancel{x(t)}\cdot\frac{x'(t)}{\cancel{x(t)}}}{2}$$

$$T'(t)=\frac{x'(t)\cdot \ln x(t)+x'(t)}{2}$$

$$T'(t)=\frac{4\cdot \ln 5+4}{2}=\frac{\cancel{4}^{2}(\ln 5+1)}{\cancel{2}}=2\cdot(\ln 5+1).$$

3. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3 m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του *y*.



Δεδομένα

$s=s(t)$

$y=y(t)$

$s'(t)=3m/s$

Ζητούμενα

$y'(t)=;$

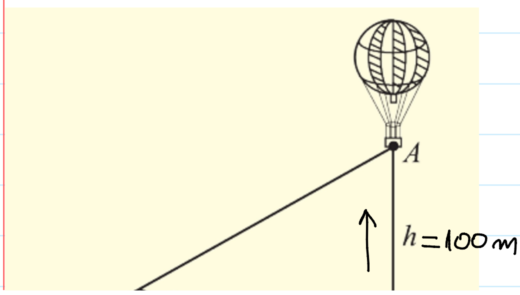
Λύση

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AB\Gamma}:\ \eta\mu\theta=\dfrac{y}{s}\\[2mm] \overset{\Delta}{A\Delta E}:\ \eta\mu\theta=\dfrac{5}{20}\end{array}\right\}\ \frac{y}{s}=\frac{5}{20}\Rightarrow y=\frac{1}{4}s$$

$$y(t)=\frac{1}{4}s(t)$$

$$y'(t)=\frac{1}{4}s'(t)=\frac{1}{4}3=\frac{3}{4}m/s$$

4. Ένα αερόστατο *Α* αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100 m από έναν παρατηρητή *Π* με ταχύτητα 50 m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία *θ* που σχηματίζει η *ΑΠ* με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλλόνι βρίσκεται σε ύψος 100 m.



Δεδομένα

$h=h(t)$

$h'(t)=50m/min$

$\theta=\theta(t)$

$h(t)=100m$

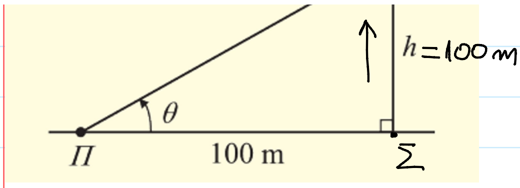
Ζητούμενο

$\theta'(t)=;$

Λύση

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{h}{100}$$

$$\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{h(t)}{100}$$



$$\varepsilon\varphi\,\theta(t) = \frac{h(t)}{100}$$

$$\left(\varepsilon\varphi\,\theta(t)\right)' = \left(\frac{h(t)}{100}\right)'$$

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi^2 x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} = \frac{h'(t)}{100}$$

$$\theta'(t)\cdot\left(\varepsilon\varphi^2\theta(t) + 1\right) = \frac{h'(t)}{100} \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή που $h=100$ το τρίγωνο ΑΠΣ γίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

Συνεπώς $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$.

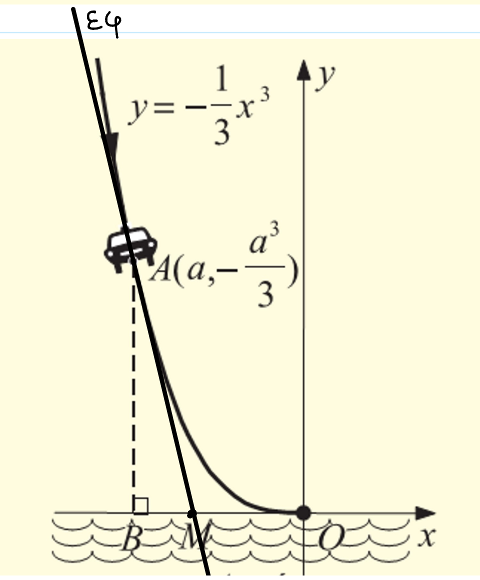
$$(1) \Rightarrow \theta'(t)\cdot\left(\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{4} + 1\right) = \frac{50}{100} \Rightarrow \theta'(t)\cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta'(t) = \frac{1}{4} \text{ rad/min}$$

6. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t)$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.



Δεδομένα	Ζητούμενα
$f(x) = -\frac{1}{3}x^3$	$x'(t) = ;$
$A\left(\alpha, -\frac{1}{3}\alpha^3\right)$	
$\alpha'(t) = -\alpha(t)$	
$M(x(t), 0)$	
$\alpha(t) = -3$	

(εφ) της C_f με $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$ στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$

Η f είναι παρ/μη με $f'(x) = -x^2$

$$(\varepsilon\varphi):\ y - f(\alpha) = f'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$$

$$y - \left(-\frac{\alpha^3}{3}\right) = -\alpha^2\cdot(x-\alpha)$$

$$y + \frac{\alpha^3}{3} = -\alpha^2 x + \alpha^3$$

$$y = -\alpha^2 x + \alpha^3 - \alpha^3$$

$$y = -\alpha^2 x + \alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3}$$

$$y = -\alpha^2 x + \frac{2\alpha^3}{3}$$

Για το σημείο Μ (σημείο τομής της (εφ) με τον x'x)
θέτω $y=0 \Rightarrow 0 = -\alpha^2 x + \frac{2\alpha^3}{3} \Rightarrow \alpha^2 x = \frac{2\alpha^3}{3}$

$$\Rightarrow x = \frac{2\alpha^3}{3\alpha^2} = \frac{2\alpha}{3}$$

συνεπώς $x(t) = \frac{2\alpha(t)}{3}$

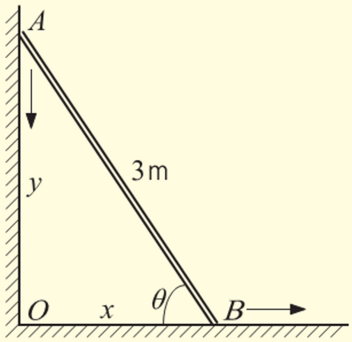
$$\Rightarrow x'(t) = \frac{2}{3}\alpha'(t) = \frac{2}{3}\left(-\alpha(t)\right) = \frac{2}{3}\,3 = 2$$

$x'(t) = 2$ μον. μήκους / μον. χρόνου

7. Μία σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m, να βρείτε:

i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα). $\theta'(t)$

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας. $y'(t)$.



<u>Δεδομένα</u>

$x = x(t)$ $\quad x'(t) = 0{,}1$ m/sec

$y = y(t) = 2{,}5$ m

$AB = 3$ m

$\theta = \theta(t)$

<u>Λύση</u>

Με πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{AOB}$ έχω

$$x^2(t) + y^2(t) = 3^2$$

$$x^2(t) = 9 - y^2(t)$$

$$x^2(t) = 9 - 2{,}5^2 = 9 - 6{,}25$$

$$x^2(t) = 2{,}75$$

$$x(t) = \sqrt{2{,}75} \text{ m}$$

i) $\sigma\upsilon\nu\,\theta(t) = \frac{x(t)}{3} \Rightarrow \left(\sigma\upsilon\nu\,\theta(t)\right)' = \frac{x'(t)}{3}$

$$\Rightarrow -\eta\mu\,\theta(t)\cdot\theta'(t) = \frac{1}{3}x'(t)$$

$$\Rightarrow \theta'(t) = -\frac{x'(t)}{3\,\eta\mu\,\theta(t)} \qquad (1)$$

$$\eta\mu\,\theta(t) = \frac{y(t)}{3} = \frac{2{,}5}{3}$$

$$\eta\mu\,\theta(t) = \frac{y(t)}{3} = \frac{2{,}5}{3}$$

Άρα $(1) \Rightarrow \theta'(t) = -\dfrac{0{,}1}{\cancel{3}\cdot\dfrac{2{,}5}{\cancel{3}}} = -\dfrac{1}{25}$ rad/sec.

ii) $x^2(t) + y^2(t) = 9$

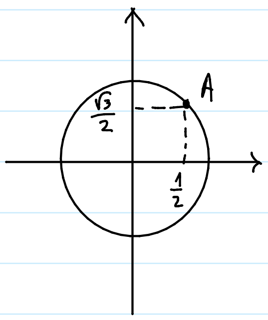
$$\Rightarrow \left(x^2(t) + y^2(t)\right)' = (9)'$$

$$\Rightarrow 2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sqrt{2{,}75}\cdot 0{,}1 + 2\cdot 2{,}5\cdot y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2{,}75}\cdot 0{,}1}{\cancel{2}\cdot 2{,}5} = -\frac{\sqrt{2{,}75}}{25} \text{ m/sec.}$$

8. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.



$$M(x, y) \longrightarrow M(x(t), y(t))$$

$y'(t) = -3$ μον/sec $x'(t) = ;$

όταν $x(t) = \frac{1}{2}$, $y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x^2(t) + y^2(t) = 1$$

$$\Rightarrow \left(x^2(t) + y^2(t)\right)' = (1)'$$

$$\Rightarrow 2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot x'(t) + \cancel{2}\cdot(-3)\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 0$$

$$\Rightarrow x'(t) = 3\sqrt{3} \text{ μον/sec.}$$