ΤΡΙΤΗ 1/12/20

Τρίτη, 1 Δεκεμβρίου 2020 10:23 πμ

3.10) *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [0,2π] με f(0)=f(2π). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈[0,π] τέτοιος ώστε f(ξ)=f(π+ξ).*

<u>Λύση</u>

$$f(\xi)-f(\pi+\xi)=0$$

Θέτω $g(x)=f(x)-f(\pi+x)$

Θεωρώ την $h(x)=\pi+x,\ x\in\mathbb{R}$

$$f(\pi+x)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$$

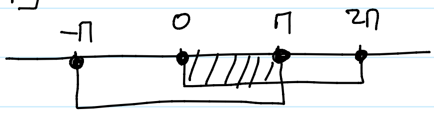
$$A_{f\circ h}=\{x\in A_h \text{ και } h(x)\in A_f\}=[-\pi,\pi]$$

$x\in\mathbb{R}$ και $0\le h(x)\le 2\pi$

$0\le \pi+x\le 2\pi$

$-\pi\le x\le \pi$

$$A_g=A_f\cap A_{f\circ h}=[0,\pi]$$



Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξη συνεχών συναρτ.

$g(0)=f(0)-f(\pi)$

$g(\pi)=f(\pi)-f(2\pi)=f(\pi)-f(0)$

$$g(0)\cdot g(\pi)=\big(f(0)-f(\pi)\big)\cdot\big(f(\pi)-f(0)\big)$$

$$=-\big(f(0)-f(\pi)\big)^2\leqslant 0$$

<u>1η περ:</u> Αν $g(0)\cdot g(\pi)=0\Rightarrow g(0)=0$ ή $g(\pi)=0$

$\xi=0$ ή $\xi=\pi$

<u>2η περ:</u> Αν $g(0)\cdot g(\pi)<0$ από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\pi)$ ώστε $g(\xi)=0$

Άρα από (1η), (2η) περίπτωση υπάρχει $\xi\in[0,\pi]$ ώστε

$$g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=f(\xi+\pi).$$

$$g(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=f(\xi+\pi).$$

Εφαρμογή του Θ. Bolzano όταν η συνάρτηση ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα.

<u>6/Β'/82</u> Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g όπου
$f(x)=\ln x$ και $g(x)=\frac{1}{x}$

έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

<u>Λύση</u> Θέτω $f(x)=g(x)$ $x\in(0,+\infty)$

$$f(x)-g(x)=0$$

Θεωρώ την $h(x)=f(x)-g(x)$, $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=-\infty-(+\infty)=-\infty$$

Άρα $h(x)<0$ κοντά στο 0^+. Συνεπώς υπάρχει $a>0$ ώστε $h(a)<0$.

$$\lim_{x\to +\infty} h(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$$

Άρα $h(x)>0$ στο $+\infty$ συνεπώς υπάρχει $b>a$ ώστε $h(b)>0$.

Η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$ αφού

- είναι συνεχής στο $[a,b]$ ως π.σ.σ.
- $h(a)\cdot h(b)<0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,b)\subseteq(0,+\infty)$ ώστε $h(\xi)=0$

Για $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ $\quad x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2$

$$-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}$$

$\ln x_1 - \frac{1}{x_1} < \ln x_2 - \frac{1}{x_2}$

$\Rightarrow \quad h(x_1) < h(x_2)$

Άρα $h \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

Συνεπώς η λύση ξ είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ.

Οπότε υπάρχει μοναδικό σημείο τομής των C_f, C_g.

3.9 *Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\ln x=1$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα.*