ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Τρίτη, 19 Ιανουαρίου 2021 10:31 πμ

σελ 123

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha(t_0)}$. Είναι δηλαδή

$$\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0) = S''(t_0).$$

$S(t) \longrightarrow U(t) = S'(t)$

$U(t) \longrightarrow \alpha(t) = U'(t)$

Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και

λέγεται **οριακό κόστος στο x_0**. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0**.

σελ 125

1. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $\rho = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$sec.

(Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi\rho^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi\rho^3$).

Λύση

$E = 4\pi\rho^2 \Rightarrow E(t) = 4\pi\cdot(4-t^2)^2 \qquad E'(1) = ?$

Η $E(t)$ είναι παρ/γωγίσιμη με

$E'(t) = 4\pi\cdot 2(4-t^2)\cdot(4-t^2)'$

$= 8\pi\cdot(4-t^2)\cdot(-2t)$

οπότε $E'(1) = 8\pi\cdot(4-1)\cdot(-2) = -48\pi \ cm^2/sec.$

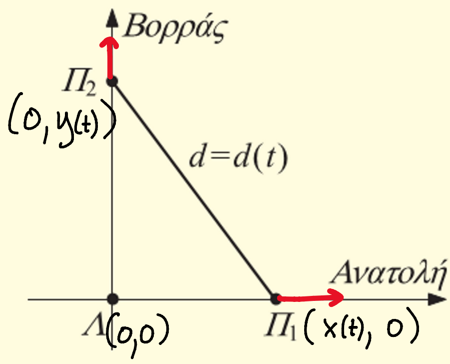
$V = \frac{4}{3}\pi\rho^3 \Rightarrow V(t) = \frac{4}{3}\pi\cdot(4-t^2)^3$

$V'(t) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}(4-t^2)^2\cdot(4-t^2)'$

$= 4\pi\cdot(4-t^2)^2\cdot(-2t)$

$V'(1) = 4\pi\cdot(4-1)^2\cdot(-2) = -72\pi \ cm^3/sec$

4. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15 km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20 km/h.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2 δηλ. $x(t)$, $y(t)$

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (\Pi_1\Pi_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση.

$\Pi_1: \ U_1 = 15 \ km/h \Rightarrow x'(t) = 15$

$\Pi_2: \ U_2 = 20 \ km/h \Rightarrow y'(t) = 20$

$x'(t) = 15 \Rightarrow x'(t) = (15t)' \Rightarrow x(t) = 15t + c_1$

$t=0 \quad x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

άρα $x(t) = 15t$

Ομοίως $y'(t) = (20t)' \Rightarrow y(t) = 20t + c_2$

$t=0 \quad y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

άρα $y(t) = 20t$

ii)

Με πυθαγόρειο θεώρημα στο $A\Pi_1\Pi_2$

$$d^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \Rightarrow d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\Rightarrow d(t) = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2} = \sqrt{225t^2 + 400t^2}$$

$$\Rightarrow d(t) = \sqrt{625t^2} = 25t$$

$$d'(t) = (25t)' = 25$$

αρα $d'(t)$ σταθερός