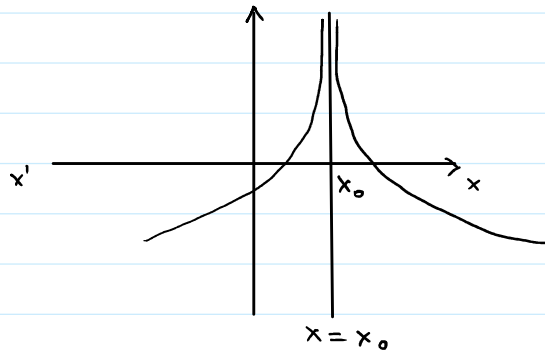


Ασύμπτωτες της γραφικής Παράστασης της f .

Κατακόρυφες
Ασύμπτωτες



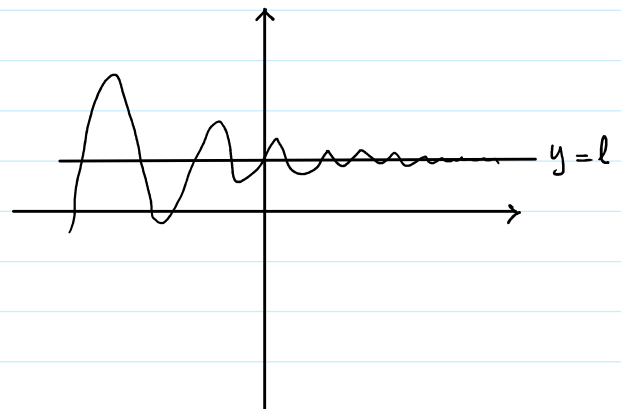
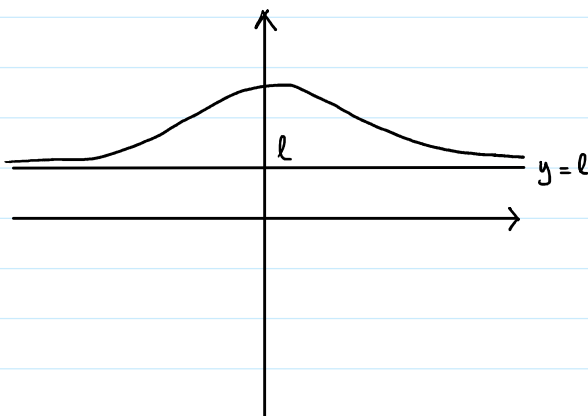
ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

Σχολιο Κατακόρυφη ασύμπτωτη ανάλυσης:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Οριζόντιες
Ασύμπτωτες

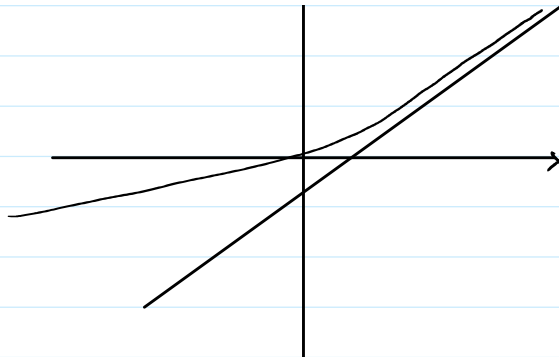


ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Πλάγιες
Ασύμπτωτες





ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

Σχολιο

Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν ($\Leftrightarrow$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

Σχολια

1ο) Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ δεν μπορεί να έχει πλάγια ή ανηλερόφως.

2ο) Χρησιμοποιώ τον ορισμό όταν θέλω να δείξω ότι μια ευθεία είναι ασύμπτωτη της C_f .

Χρησιμοποιώ το θεώρημα όταν θέλω να βρω την ασύμπτωτη ή όταν γνωρίζω την ασύμπτωτη.

Π.χ. Δίνεται η $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

Π.χ. Δίνεται η $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Λύση

Καταστροφές $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$ η f είναι συνεχής στο A_f
οπότε ανζηώ καταστροφή ασύμπτωτη στο $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x - 2) \cdot \frac{1}{x - 1} = -2 \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - x - 2) \cdot \frac{1}{x - 1} = -2 \cdot (+\infty) = -\infty$$

Άρα η $x=1$ είναι καταστροφή ασύμπτωτη της C_f .

Πλάγιες - Οριζόντιες

Η $y = \lambda x + b$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - x - 2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x - 2 - x^2 + x}{x - 1} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x - 1} = 0$$

Ομοίως $\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f