

Κανόνες De L'Hospital

Θεώρημα I (Μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ οπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

π.χ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DL'H}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$

Θεώρημα II (Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ οπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

π.χ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DL'H}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Προσοχή!! Τον κανόνα DL'H τον εφαρμόζω μόνο όταν έχω απροσδιόριστο ποσοτή.

για π.χ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\frac{0}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0.$

π.χ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DL'H}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x \ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{1} = +\infty$

Άλλες αποσβέσεις κανόνες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

Άλλες αποδείξεις πορτσ.

1η) $0 \cdot (\pm \infty)$ Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$.

οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \stackrel{\eta}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

Π.Χ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Π.Χ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

2η) $(+\infty) - (+\infty)$ ή $(-\infty) - (-\infty)$ ή $(+\infty) + (-\infty)$ ή $(-\infty) + (+\infty)$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right)$$

↓
Εφαρμογή DL'H.

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \left(\frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right)$$

↓
Εφαρμογή DL'H.

Π.Χ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + \ln x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right) = (+\infty) \cdot (1 - 0 + 0) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} 0 \dots (x^2)' = 2x \dots (2x)' = 2 \dots 0 \dots 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0$$

$$\text{D.X.2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \ln x)'}{(x \cdot \ln x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \ln x)'}{(\ln x + x \ln x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\ln x + 1 + \ln x} = \frac{0}{2-0} = 0$$

3.)