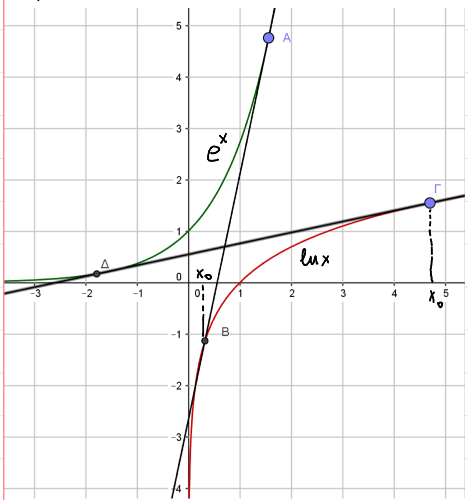
Άσκηση στην κοινή εφαπτομένη.

Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο μοναδικά $x \neq 1$ για τα οποία οι C_f, C_g των $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x, x>0$ έχουν κοινή εφαπτομένη.



Λύση

$f(x)=e^x$ με παράγωγο $f'(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$.

Έστω $A(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής της $εφ_f$ με την C_f. Τότε

$εφ_f$: $y-f(x_1)=f'(x_1)\cdot(x-x_1)$

$y-e^{x_1}=e^{x_1}\cdot(x-x_1)$

$\boxed{y=e^{x_1}x-x_1e^{x_1}+e^{x_1}}$

Έστω $B(x_2, g(x_2))$ το σημείο επαφής της $εφ_g$ με την C_g. Τότε

$g(x)=\ln x, x>0$ με $g'(x)=\frac{1}{x}, x>0$

$εφ_g$: $y-g(x_2)=g'(x_2)\cdot(x-x_2)$

$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$

$\boxed{y=\frac{1}{x_2}x-1+\ln x_2}$

Επειδή οι $εφ_f$, $εφ_g$ ταυτίζονται τότε:

$$\begin{cases} e^{x_1}=\frac{1}{x_2} \\ -x_1e^{x_1}+e^{x_1}=-1+\ln x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln e^{x_1}=\ln\frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1=-\ln x_2 \Rightarrow \ln x_2=-x_1 \\ -x_1e^{x_1}+e^{x_1}=-1-x_1 \end{cases}$$

$$-x_1e^{x_1}+e^{x_1}=-(1+x_1)$$

$$\Rightarrow (-x_1+1)e^{x_1}=-(1+x_1)$$

$$\Rightarrow e^{x_1}=-\frac{1+x_1}{-x_1+1} \Rightarrow e^{x_1}=\frac{1+x_1}{x_1-1}$$

$$\Rightarrow e^{x_1}=\frac{x_1-1+2}{x_1-1} \Rightarrow e^{x_1}=\frac{x_1-1}{x_1-1}+\frac{2}{x_1-1}$$

$$\Rightarrow e^{x_1}=1+\frac{2}{x_1-1} \Rightarrow e^{x_1}-\frac{2}{x_1-1}-1=0$$

με $x_1\neq 1$.

$x_1\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Θέτω $h(x)=e^x-\frac{2}{x-1}-1$, $x\in\Delta_1\cup\Delta_2$

όπου $\Delta_1=(-\infty,1)$ κ' $\Delta_2=(1,+\infty)$

Για $x_1,x_2\in\Delta_1$ $\quad x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1-1<x_2-1 \Rightarrow \frac{2}{\ } > \frac{2}{\ }$

Για $x_1, x_2 \in \Delta_1$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \dfrac{2}{x_1-1} > \dfrac{2}{x_2-1}$

$\Rightarrow -\dfrac{2}{x_1-1} < -\dfrac{2}{x_2-1}$

$\Rightarrow -\dfrac{2}{x_1-1} - 1 < -\dfrac{2}{x_2-1} - 1$ (2)

από (1) + (2) $\Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$ άρα $h \uparrow$ στο Δ_1

Η h είναι συνεχής στο Δ_1 και $\uparrow$ οπότε

$$h(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} h(x), \lim_{x\to 1^-} h(x)\right) = (-1, +\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x - \frac{2}{x-1} - 1\right) = 0 - 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(e^x - \frac{2}{x-1} - 1\right) = e - (-\infty) - 1 = +\infty$$

Το $0 \in h(\Delta_1)$ και η $h \uparrow$ στο Δ_1 άρα υπάρχει μοναδικό $\xi_1 \in \Delta_1$ ώστε $h(\xi_1) = 0$.

Η h είναι συνεχής στο Δ_2 και $\uparrow$ στο Δ_2 οπότε

$$h(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 1^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

Το $0 \in h(\Delta_2)$ και η $h \uparrow$ στο Δ_2 άρα υπάρχει μοναδικό $\xi_2 \in \Delta_2$ ώστε $h(\xi_2) = 0$.