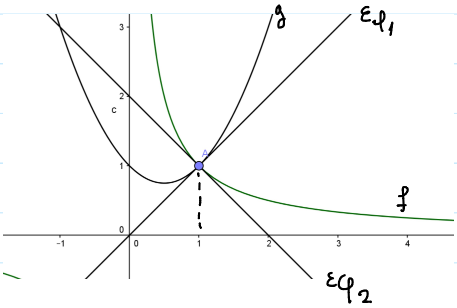
Κοινή εφαπτομένη δύο συναρτήσεων

1|Β'|122 $\qquad f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = x^2 - x + 1$



Για το κοινό τους σημείο θέτω $f(x) = g(x)$

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 - x^2 + x = 1$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1) + (x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+1) = 0$$

$x = 1$ ή $x^2 + 1 = 0$ αδύνατη.

Άρα οι C_f, C_g τέμνονται στο $x_0 = 1$.

Η f είναι παρ/μη για $x \neq 0$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Η g είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 2x - 1$

Για να είναι οι (εφ) κάθετες στο $x_0 = 1$ πρέπει

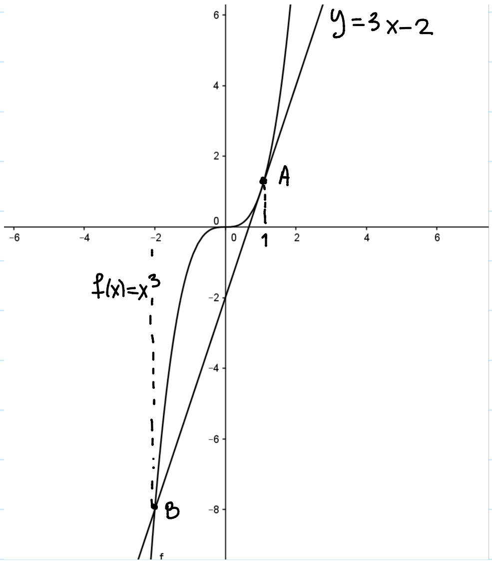
$$f'(1) \cdot g'(1) = -1 \rightarrow \left(-\frac{1}{1}\right) \cdot (2-1) = -1 \quad \text{Αληθής.}$$

άρα $\varepsilon\varphi_f \perp \varepsilon\varphi_g$

2 | B' | 122

$y=3x-2$, $f(x)=x^3$

Για να βρώ τα σημεία τομής θέτω



$f(x)=y$

$\Rightarrow x^3=3x-2$

$\Rightarrow x^3-3x+2=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ \downarrow & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-1)(x^2+x-2)=0$

$x=1$ ή $x^2+x-2=0$

$x=1$ ή $x=-2$

Άρα οι C_f, (ε) τέμνονται στα $A(1,1)$ $B(-2,-8)$

$f(x)=x^3$ (ε) $y=\overset{\lambda}{3}x-2$ Η f είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2$

Πρέπει $f'(x_0)=3$

για $x_0=1$ $f'(1)=3\cdot1^2=3=3$ Αληθής

για $x_0=-2$ $f'(-2)=3(-2)^2=12\neq3$

Άρα η (ε) εφάπτεται της C_f στο $A(1,1)$.

3 | B' | 122

$f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$

$g(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq0$

Οι f, g είναι παρ/μες με $f'(x)=2\alpha x+\beta$, $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $x\neq0$

Πρέπει $\begin{cases} f'(x_0)=g'(x_0) \\ \text{και} \\ f(x_0)=g(x_0) \end{cases}$ $\begin{cases} 2\alpha x_0+\beta=-\frac{1}{x_0^2} \\ \alpha x_0^2+\beta x_0+2=\frac{1}{x_0} \end{cases}$

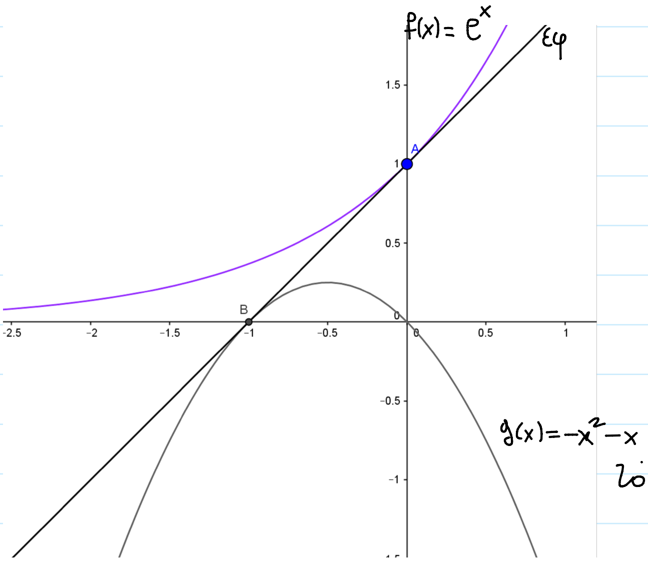
$x_0=1$ $\begin{cases} 2\alpha+\beta=-1 \\ \alpha+\beta+2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta=-1-2\alpha \\ \alpha-1-2\alpha+2=1 \Rightarrow -\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0 \end{cases}$ $\beta=-1$

4| B' |122

$f(x) = e^x$ $\quad A(0,1)$ $\quad f'(x) = e^x$

$g(x) = -x^2 - x$ $\quad g'(x) = -2x-1$

Βρίσκω την (εφ) της C_f στο $A(0,1)$



$$\varepsilon\varphi_f : \; y - f(0) = f'(0)(x-0)$$
$$y - 1 = 1 \cdot x$$
$$y = x+1.$$

Έστω $B(x_0, g(x_0))$ το σημείο επαφής με τη C_g.

τότε $\quad y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$

$$y - (-x_0^2 - x_0) = (-2x_0 - 1)\cdot(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y = (-2x_0-1)x + 2x_0^2 + \cancel{x_0} - x_0^2 - \cancel{x_0}$$

$$\varepsilon\varphi_g : \; y = (-2x_0-1)x + x_0^2$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi_f & \left\{ y = 1\cdot x + 1 \right. \\ \varepsilon\varphi_g & \left\{ y = (-2x_0-1)x + x_0^2 \right. \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} -2x_0 - 1 = 1 \\ x_0^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1 \end{cases}$$

Άρα η (ε) $y = x+1$ εφάπτεται στη C_g στο $x_0 = -1$.