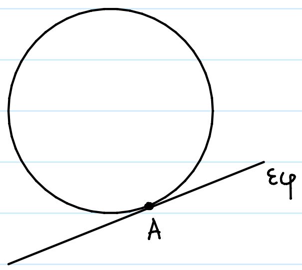
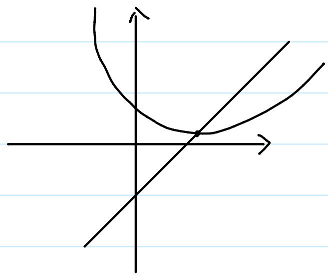
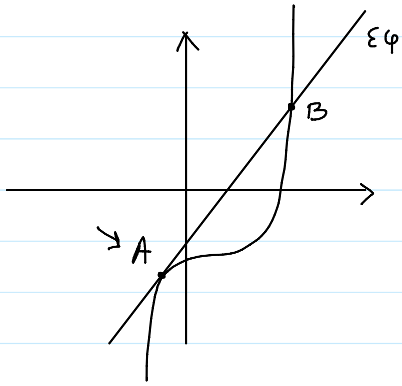
ΠΕΜΠΤΗ 10/12/20

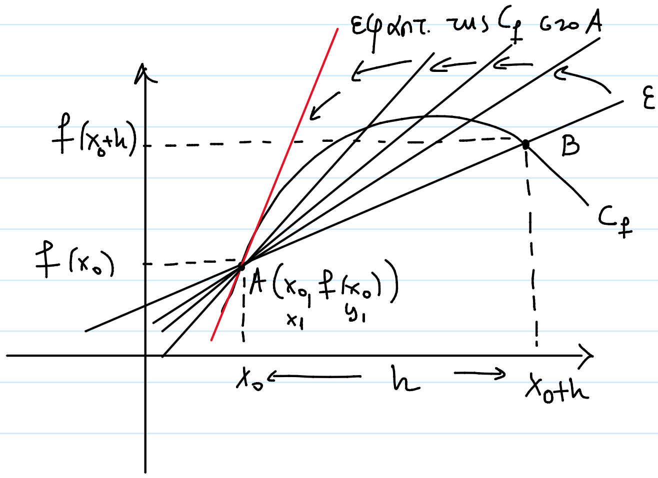
Πέμπτη, 10 Δεκεμβρίου 2020 10:22 πμ

Παράγωγος συνάρτησης στο x_0









Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΟ x_0

σελ 95.

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_0 \in A_f$ όταν το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός

$x \to x_0 \quad x - x_0$

αριθμός

Το παραπάνω όριο λέγεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$

Δηλαδή $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Είναι προφανές ότι αν η f είναι παρ/μη στο $x_0 \in A_f$ τότε

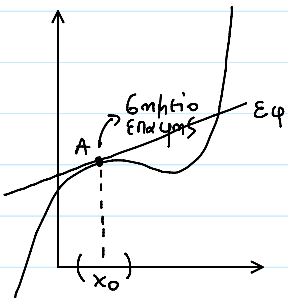
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Άλλος τύπος για την παράγωγο

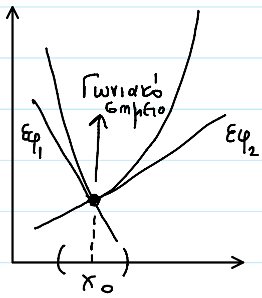
Αν η f είναι παρ/μη στο x_0 τότε:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Σχόλιο:

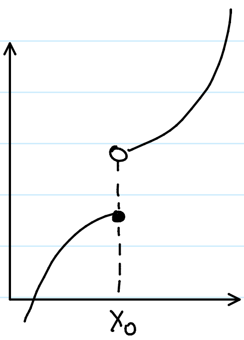


σχ.1



σχ.2

Δεν είναι παρ/μη



σχ.3

Δεν είναι συνεχής

Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη: (σελ 99)

Για $x \neq x_0$ $$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

Αφού η f είναι παρ/μη στο x_0. Επομένως $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.
Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο x_0 δεν είναι πάντα και παραγωγίσιμη.

<u>Π.χ.</u> Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x, & x<0\\ 12\sqrt{x}+6x, & x\geq 0\end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f είναι παρ/μη στο $x_0=0$.

<u>Λύση</u>

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x^2+3x)=0\\ &\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(12\sqrt{x}+6x)=0\\ &f(0)=0\end{aligned}\right\}\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+3x-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(2x+3)}{\cancel{x}}=3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{12\sqrt{x}+6x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{12\sqrt{x}}{x}+6\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{12\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}+6\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{12}{\sqrt{x}}+6\right)=+\infty$$

Συνεπώς η f δεν είναι παρ/μη στο $x_0=0$.