Θ.ROLLE ΑΣΚΗΣΕΙΣ STUDY4EXAMS.GR

Α΄ΟΜΑΔΑ

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^7+2x^3+x+3=0$ (1) έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2+\alpha x+\beta=e^{2x}$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έχει το πολύ τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να δείξετε με την βοήθεια της συνάρτησης $g(x)=e^{f(x)}(x-\alpha)(x-\beta)$, ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{1}{\alpha-x_0}+\dfrac{1}{\beta-x_0}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=f(x)\ln(x^2+\alpha x)$ με $\alpha>-2$ και $f(x)$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2,4]$ με $f(2)=2\cdot f(4)\neq 0$. Αν η $h(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[2,4]$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,4)$ έτσι ώστε $f'(x_0)\ln x_0^{x_0}+f(x_0)=0$.

5. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=\alpha x+\beta,\ \alpha\neq 0$ έχει με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$ το πολύ δύο κοινά σημεία.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-2}+x$ και $g(x)=e^{2-x}-x+4$.
Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο να προσδιοριστεί.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^3}{3}+\left(\dfrac{\beta}{2}+\delta\right)x^2+(\gamma-\delta)x+\delta$ με $\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{2}+\gamma=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,\ f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα xx'.

8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+e^x=3x+10$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$, έτσι ώστε να ισχύει $f^2(x)+f(x)-6x=3\ln x+2011$ (1) για $x>1$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα xx' το πολύ σε ένα σημείο.

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $3f^2(\alpha)+5f^2(\beta)=4[3f(\alpha)+5f(\beta)-8]$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο M στη γραφική παράσταση της f, όπου η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Β΄ΟΜΑΔΑ

11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha+1) = ef(\alpha)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \alpha+1)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = f(x_0)$.

12. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1) = 1$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 3 - \frac{2}{x_0} f(x_0)$ (1).

13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[1,e]$, έτσι ώστε να ισχύει $f(1) = \frac{f(e)}{e} + 1$ (1). Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,e)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $B(0, x_0)$.

14. Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και ισχύει: $f(1) = f(2) - \frac{3}{2}$.

1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$, ώστε $f'(x_0) = x_0$.

2) Αν η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και $f'(1) > 4$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$, ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$,
- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$,
- $f'(x) \cdot g(x) \neq f(x) \cdot g'(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι:

1) $g(\alpha) \cdot g(\beta) \neq 0$.

2) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0$.