ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Θ.Μ.Τ.) ΑΣΚΗΣΕΙΣ STUDY4EXAMS.GR

Α΄ΟΜΑΔΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{\pi}\eta\mu(\pi x), & x\le 0 \\ x^2+2x, & x>0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[-2,2]$ και να βρείτε τα σημεία $\xi\in(-2,2)$ για τα οποία ισχύει.

2. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και για οποιοδήποτε διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha\ge 0$, εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και ότι ο αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$, που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ., είναι τέτοιος ώστε το $\sqrt{\xi}$ να είναι το κέντρο του διαστήματος $\left[\sqrt{\alpha},\sqrt{\beta}\right]$ δηλαδή $\sqrt{\xi}=\dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}$.

3. Αν Α(α,f(α)) και Β(β,f(β)) με $\alpha<\beta$ είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε): $y=x+3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=x^2+e^x$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$.

ii. Να προσδιορίσετε το ξ του θεωρήματος και να αποδείξετε ότι $\alpha\beta<0$.

4. Α. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x)=|x-1|\ln x$ στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\dfrac{1}{e},e\right)$ ώστε $\xi(\xi-1)\ln\xi+(\xi-1)^2=\xi|\xi-1|$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+5}, & x\le 2 \\ -x^2+\alpha x+\beta, & x>2 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε

τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση f να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-2,3]$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2x+\eta\mu(\alpha x), & x\le 0 \\ \sqrt{x^2+\beta^2}-4\pi, & x>0 \end{cases}$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\ne 0$.

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-2\pi,3\pi]$ να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+x, & x\le 0\\ xe^x+\beta, & x>0\end{cases}$.

Α. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς α, β, $\alpha \neq 0$, ώστε η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.στο $[-1,1]$.

Β. Αν $\alpha = e$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$
(δηλαδή ότι το ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. για την f στο $(-1,1)$ είναι μοναδικό).

8. Για μια συνάρτηση ισχύει στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ το θεώρημα Rolle.

i. Να βρείτε τα σημεία που διαιρούν το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε τρία διαστήματα ίσου μήκους.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία ξ_1, ξ_2 και ξ_3 του διαστήματος (α, β) τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=0$.

9. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 10]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 10)$ και τέτοια ώστε $f(0)=5$ και $f(10)=20$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10}$ που ανήκουν στο διάστημα $(0, 10)$, τέτοιοι ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+\cdots f'(\xi_{10})=15$.

10. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και τέτοια ώστε $f(\beta)-f(\alpha)=4(\beta-\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1, ξ_2, ξ_3 που ανήκουν στο διάστημα (α, β), τέτοιοι ώστε: $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=36$.

11. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\gamma)=0$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)(\beta-\gamma)+f(\beta)(\gamma-\alpha)<0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

12. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, με $x_1<x_2<x_3$, καθώς και οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, επίσης διαδοχικοί όροι μιας άλλης αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

13. Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β). Υποθέτουμε επίσης ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f και σε ένα τρίτο σημείο έστω $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

14. Μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης της f που να είναι συνευθειακά.

15. Για μια συνάρτηση f υποθέτουμε ότι:

- Είναι συνεχής στο διάστημα $[2, +\infty)$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, +\infty)$.
- $f(2) = 0$.
- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Αν $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-2}$, να δείξετε ότι $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in (2, +\infty)$.

16. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι $2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17. Να αποδείξετε ότι $1 + \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$, για κάθε $x > 0$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,\ \alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι για δυο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x_1,\ x_2$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq \dfrac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha}$.

19. Να αποδείξετε ότι $x + 1 > e^{\frac{x}{x+1}}$, για $x > 0$.

Γ΄ ΟΜΑΔΑ

20. Α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ αποδείξτε ότι για κάθε $\beta > 0$ υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\xi)}{\xi}$.

Β. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu\xi = \dfrac{1 - \eta\mu\xi}{\xi}$.

21. Α. Θεωρούμε συναρτήσεις f, g με την f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και πραγματικούς αριθμούς α, β τέτοιους ώστε $f(g(\alpha)) = f(g(\beta))$, $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Αν το $g(\gamma)$ είναι εσωτερικό του διαστήματος με άκρα $g(\alpha)$, $g(\beta)$ και για κάποιο $\gamma \in \mathbb{R}$ και ισχύει $g(\gamma) - g(\alpha) = g(\beta) - g(\gamma)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

Β. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln\alpha) = f(\ln\beta)$ όπου $1 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
(Υπόδειξη: Θεωρώ $\gamma^2 = \alpha\beta$)

Γ. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f\left(\frac{1}{\beta}\right)$ όπου $1 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
(Υπόδειξη: Θεωρώ $\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$)

22. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha,\beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) - 2f'(\xi_3) = 0$.

23. Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \leq \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta \leq \frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$, $0 < \alpha \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.

24. Α. Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ (1).

Β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

25. Α. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ να αποδείξετε ότι $x < \eta\mu x < x\sigma\upsilon\nu x$ ενώ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι $x\sigma\upsilon\nu x < \eta\mu x < x$.

Β. Χρησιμοποιώντας το (Α) ερώτημα επιβεβαιώστε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

26. Α. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι $1 - x\eta\mu x \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$.

Β. Χρησιμοποιώντας το (Α) ερώτημα επιβεβαιώστε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$.

27. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και με $f(\beta)-f(\alpha)=2(\beta-\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί x_1, x_2 και x_3 στο διάστημα (α, β), τέτοιοι ώστε:

$$\frac{5}{f'(x_1)}+\frac{6}{f'(x_2)}+\frac{9}{f'(x_3)}=10$$

28. Η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$, είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση C_f τέμνει τη διχοτόμο (δ) του πρώτου τεταρτημορίου σε τρία διαφορετικά σημεία. Να δείξετε ότι:

i. Υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f παράλληλες στην (δ).

ii. Υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων.

29. i. Δυο συναρτήσεις f και g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι:

- Συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.
- Παραγωγίσιμες στο (α, β).
- $g'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ii. Αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha}=\sigma\varphi\theta.$$

30. Να λύσετε την εξίσωση $(\alpha+1)^x+(\alpha+3)^x=(\alpha+4)^x+\alpha^x$, $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$.

31. Αν $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, να αποδείξετε ότι $f'(x)<0$, για $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

32. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$ και τέτοια ώστε $f(1)=f(2)=0$. Αν υπάρχει $\xi\in(1, 2)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)>0$, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $x_1, x_2\in(1, 2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$.

ii. Υπάρχει $x_0\in(1, 2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)<0$.

33. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η παράγωγος της είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

i. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha \neq \beta$, ισχύει $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

ii. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha \neq \beta$, ισχύει $\frac{e^{\alpha}+e^{\beta}}{2} > e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

34. Μια συνάρτηση $f:[\alpha,\ \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\ \beta)$ και τέτοια ώστε $f(\alpha)=3\beta$ και $f(\beta)=3\alpha$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha,\ \beta)$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1 και ξ_2 του διαστήματος $(\alpha,\ \beta)$, τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=9$.

35. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$f(\alpha)=f(\beta)e^{(\alpha-\beta)\cdot\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

36. **Α.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2\alpha]$ $\alpha>0$ και $f(0)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοιο ώστε $\alpha[f'(\alpha+\xi)+f'(\alpha-\xi)]=f(2\alpha)$

Β. Εφαρμόστε την προηγούμενη πρόταση στη συνάρτηση $g(x)=xe^{x}$ και αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $(2+\xi)e^{1+\xi}+(2-\xi)e^{1-\xi}=2e^2$.

37. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)$ και δεδομένος θετικός αριθμός λ. Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\ \xi_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\lambda f'(\xi_1)+\ f'(\xi_2)=0$.

38. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και τους θετικούς ακεραίους κ, λ, μ. Αν $f(0)=f(\beta)$ με $\beta>0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,\beta)$ διαφορετικοί μεταξύ τους τέτοιοι ώστε $\kappa f'(\xi_1)+\ \lambda f'(\xi_2)+\mu f'(\xi_3)=0$.

39. Έστω $\kappa > 0$ και μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f'(x)|\le \kappa$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x_1)-f(x_2)|\le \kappa|x_1-x_2|$.

Β) Να αποδείξετε ότι $|\eta\mu x-\eta\mu\psi|\le|x-\psi|$ για κάθε $x,\psi\in\mathbb{R}$.

40. Να αποδείξετε ότι

i) $\dfrac{1}{\alpha+1} < \ln(1+\dfrac{1}{\alpha}) < \dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha>0$

ii) $\nu\alpha^{\nu-1} < \dfrac{\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}}{\alpha-\beta} < \nu\beta^{\nu-1}$ για $0<\alpha<\beta$ και $\nu\in N^*$

41. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με την f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ τότε και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.