

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(10μ)

A2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Είναι σωστή η λανθασμένη η παραπάνω πρόταση; Να αναφέρετε αντιπαράδειγμα για τον όποιο ισχυρισμό σας.

(5μ)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

(1μ)

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

(1μ)

γ) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ , τότε $f'(x) \leq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

(1μ)

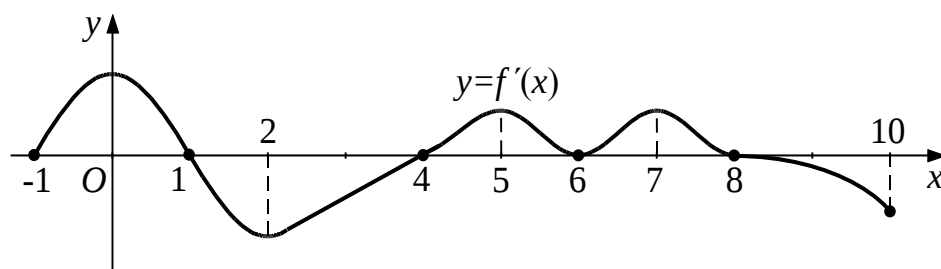
δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ τότε είναι και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό

(1μ)

ε) Οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερο κατά δυο του βαθμού του παραινομαστή, δεν έχουν ασύμπτωτες.

(1μ)

A4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

(5μ)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

B1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

(6μ)

B2. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(6μ)

B3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 + 1$

(6μ)

B4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f και να την παραστήσετε γραφικά.

(7μ)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(8+4μ)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2018}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

(6μ)

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος **Γ2**. να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x) + f(x) = 2017$

(7μ)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^{x-1} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

Δ1. Αν $f(x) \geq 1$, $\forall x > 0$, να δείξετε ότι $\alpha = e$

(5μ)

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(5μ)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2

(5μ)

Δ4. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος Γ3 ισχύει ότι $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$

(5μ)

Δ5. Αν F είναι μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$ να δείξετε ότι

$$F(2x) - F(x) > x \cdot f(2x), \text{ για κάθε } 0 < x < 1.$$

(5μ)

Καλή Τύχη !!!