

ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
(Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.)

Ευκλείδη “Στοιχεία”

Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή
επεξηγήσεις και σχολιασμό

ΤΟΜΟΣ Ι

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Βιβλία Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, ΙV, V, VI



Αθήνα 2001

ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
(Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.)

Ευκλείδη “Στοιχεία”

Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή
επεξηγήσεις και σχολιασμό

ΤΟΜΟΣ Ι

Αθήνα 2001

Στον Έλληνα μαθηματικό

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ

Επιστημονικός Υπεύθυνος

Καθηγητής Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος

Υπεύθυνος έργου

Επίκουρος Καθηγητής Βαγγέλης Ντζιαχρήστος

Την εισαγωγή έγραψε ο καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών
κ. **Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος**.

Συγγραφικές Ομάδες

1^η Ομάδα: Είχε την επιμέλεια κυρίως των κεφαλαίων 1, 2, 3 και 4 του τόμου Ι

- **Βαγγέλης Ντζιαχρήστος**, *Επίκουρος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών*
- **Δημήτριος Κοντογιάννης**, *Διδάκτορας Μαθηματικών, Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*
- **Τασούλα Τσιγώνη**, *Καθηγήτρια Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*.

2^η Ομάδα: Είχε την επιμέλεια κυρίως των κεφαλαίων 5 και 6 του τόμου Ι

- **Ανάργυρος Φελούρης**, *Επίκουρος Καθηγητής του ΕΜΠ*
- **Χρήστος Στατεράς**, *Διδάκτορας Μαθηματικών, Σχολικός Σύμβουλος*
- **Στέφανος Μέτης**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*
- **Ιορδάνης Χριστοδούλου**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*

3^η Ομάδα: Επιμελήθηκε κυρίως τον τόμο ΙΙ

- **Γεώργιος Δημάκος**, *Λέκτορας του Πανεπιστημίου Αθηνών*
- **Παναγιώτης Βλάμος**, *Διδάκτορας Μαθηματικών*
- **Γεώργιος Μπαράλης**, *Διδάκτορας Μαθηματικών, καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*
- **Αντώνιος Δούναβης**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*

4^η Ομάδα: Επιμελήθηκε κυρίως τον τόμο ΙΙΙ

- **Διονύσιος Λάππας**, *Επίκουρος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών*
- **Κυριάκος Καμπούκος**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*
- **Δημήτριος Λιουδάκης**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*
- **Γεώργιος Τασσόπουλος**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*

Κάθε ομάδα είχε την κύρια ευθύνη για το τμήμα του έργου που αναφέρεται παραπάνω. Όμως όλες οι ομάδες εργάστηκαν για ολόκληρο το έργο, είχαν συχνές συναντήσεις, συνεργασίες και ανταλλαγές απόψεων για τη διαμόρφωση των κειμένων, καθώς και για την τελική μορφή που πήρε το έργο.

Φιλολογική επιμέλεια: Καλλιόπη-Άννα Χατζησταυρινού

Επιμέλεια σχημάτων: Νικόλαος Ζαράνης

Επιμέλεια σελιδοποίησης: Καίτη Αλεξοπούλου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Γενικά

Τα Μαθηματικά ως καθαρά θεωρητική επιστήμη δημιουργήθηκαν και αναπτύχθηκαν στην αρχαία Ελλάδα. Οι αρχαίοι Έλληνες μαζί με τη θεωρία τους επινόησαν και την ορολογία της επιστήμης, προσδιόρισαν τις βασικές έννοιες, άσκησαν τον κριτικό λόγο, εισήγαγαν την αποδεικτική διαδικασία και οικοδόμησαν τον παραγωγικό συλλογισμό.

Μαθηματικά, και μάλιστα αξιόλογα για την εποχή τους, είχαν και οι παλαιότεροι πολιτισμοί. Τα Μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στη Μεσοποταμία και την αρχαία Αίγυπτο, μπορούμε να πούμε ότι ήταν υψηλού επιπέδου, παρόλο που δεν είχαν ξεπεράσει το προεπισημονικό στάδιο. Όμως, ήταν προϊόντα της παρατήρησης και της εμπειρίας, ήταν ένα άθροισμα εμπειρικών συμπερασμάτων, στοιχειώδεις κανόνες και τεχνικές, που έδιναν απαντήσεις στα προβλήματα τα οποία έθεταν οι συγκεκριμένες καταστάσεις και ανάγκες.

Για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα ο μελετητής δεν ενδιαφέρεται να λύσει το συγκεκριμένο πρακτικό πρόβλημα, να υπολογίσει την έκταση του χωραφίου του, ή να κατασκευάσει ογκώδη οικοδομήματα. Ενδιαφέρεται να βρει το γενικό και αφηρημένο κανόνα που θα ισχύει για όλα τα χωράφια κι όλα τα οικοδομήματα, και ακόμη να επεκταθεί παραπέρα σε όλα τα νοητά αντίστοιχα προβλήματα, καθώς και σε όλες τις νοητές επιφάνειες και τα νοητά στερεά. Αρχίζει έτσι μια διαδικασία απόδειξης με συγκεκριμένους κανόνες και συλλογισμούς και για πρώτη φορά τα Μαθηματικά συγκροτούνται σε καθαρή επιστήμη¹.

Στα έργα των αρχαίων Ελλήνων θα βρούμε και όλες σχεδόν τις μεθόδους απόδειξης που χρησιμοποιούνται σήμερα. Θα βρούμε π.χ. τη *μέθοδο της συνεπαγωγής*, τη *συνθετική μέθοδο*, την *αναλυτική μέθοδο*,

¹ Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος, "Η αρχαία Ελλάδα κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης", Πρακτικά 17^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., Αθήνα 2000.

τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, καθώς και τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής¹.

Η *αξιοματική θεμελίωση* είναι ένας άλλος τομέας που ξεκίνησε από την αρχαία Ελλάδα. *Στοιχεία* αξιωματικής θεμελίωσης βρίσκουμε σε πολλά αρχαία ελληνικά κείμενα. Οι Πυθαγόρειοι, για παράδειγμα, εισήγαγαν μια μορφή απόδειξης αρκετά πιο βελτιωμένη από εκείνη του Θαλή. Είχαν ξεκαθαρίσει ότι η αποδεικτική διαδικασία δεν είναι απλά ένας παραγωγικός συλλογισμός, αλλά πρέπει να έχει κάποια δεδομένα (*υποθέσεις*, όπως τα ονόμαζαν), και κάποιους *αρχικούς συλλογισμούς*. Καθόρισαν ένα σύνολο αποδεικτικών κανόνων που μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην αποδεικτική διαδικασία και εισήγαγαν ορισμούς για συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα. Ο Αριστοτέλης επίσης μας δίνει όλα τα στοιχεία μιας αξιωματικής θεμελίωσης. Αναφέρεται στις *αρχικές έννοιες*, -τις *θέσεις*, όπως τις ονομάζει-, στους *ορισμούς*, στα *αξιώματα*, στην *αποδεικτική διαδικασία* και στην *απόδειξη*.

Κλασικό παράδειγμα αξιωματικής θεμελίωσης είναι τα "*Στοιχεία*" του **Ευκλείδη**. Ο Ευκλείδης κατέγραψε τις αρχικές έννοιες ή αρχικούς όρους των γεωμετρικών αντικειμένων, όπως είναι το σημείο, η γραμμή κλπ. Κατέγραψε τις βασικές τους ιδιότητες και καθιέρωσε τους ορισμούς, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες. Δημιούργησε έτσι μια μαθηματική θεωρία, μέσα στην οποία κάθε πρόταση μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια των ορισμών, των αιτημάτων, των κοινών εννοιών και των προτάσεων που έχουν προηγουμένως αποδειχθεί. Η αξιωματική θεμελίωση και οι αποδεικτικές διαδικασίες που εισήγαγε είναι ισχυρές και αναλλοίωτες μέχρι σήμερα.

Τα *Στοιχεία* είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα όλων των εποχών. Για 2300 χρόνια χρησιμεύει ως το σταθερό κείμενο για τη διδασκαλία των βασικών Μαθηματικών και επί αρκετούς αιώνες χρησιμοποιήθηκε ως βασικό κείμενο για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας σε πολλές χώρες του κόσμου.

Στην υπερδισχιλιετή ιστορία της ύπαρξής του κανένα άλλο έργο επιστημονικό, φιλοσοφικό, λογοτεχνικό ή άλλης φύσης και περιεχομένου δεν έχει απασχολήσει τους εκδότες με την ίδια συχνότητα όπως αυτό.

¹ Theodoros G. Exarchakos, "The method of mathematical induction and the Pell equation in ancient Greek Mathematics", Mentor, A Journal of Scientific and Educational Research, Hellenic Pedagogical Institute, Athens 1999, vol. 1, σελ.4-16.

Έχει μεταφρασθεί σε πάρα πολλές γλώσσες και οι εκδόσεις του σήμερα υπολογίζεται ότι ξεπερνούν τις 2000. Κατά το Loria¹ τα *Στοιχεία* σε αριθμό εκδόσεων και μεταφράσεων μπορούν να ανταγωνιστούν τη "*Θεία Κωμωδία*" του Δάντη και ίσως υπολείπονται μόνο της Αγίας Γραφής. Θα πρέπει να προσθέσουμε εδώ ότι η εκδοτική δραστηριότητα δεν έχει επικεντρώσει την προσοχή της μόνο στις μεταφράσεις και τις εκδόσεις των *Στοιχείων*, αλλά περιλαμβάνει μια μεγάλη ποικιλία από κριτικές μελέτες, από διορθώσεις και αναφορές, περιλήψεις και υπομνηματισμούς, σχόλια και ειδικές εκδόσεις για ειδικούς λόγους. Κατά τον Ivor Thomas² τα *Στοιχεία* έχουν επηρεάσει το ανθρώπινο μυαλό περισσότερο από κάθε άλλο έργο, εκτός από τη Βίβλο.

Στις μεταφράσεις, εκδόσεις, αναθεωρημένες εκδόσεις, ειδικές εκδόσεις και σχολιασμούς των *Στοιχείων* θα αναφερθούμε αναλυτικά στην παράγραφο 5 αυτής της εισαγωγής. Θεωρούμε όμως απαραίτητο να παρατηρήσουμε εδώ ότι η πιο ολοκληρωμένη σύγχρονη έκδοση των *Στοιχείων* είναι αυτή που περιλαμβάνεται στο έργο "*Euclidis Opera Omnia*" του Δανού ελληνιστή και ιστορικού των επιστημών **J. L. Heiberg** και του Γερμανού λογίου **H. Menge**. Η έκδοση των *Στοιχείων* από τον Heiberg έχει γίνει στα αρχαία Ελληνικά με παράπλευρη μετάφραση στα Λατινικά. Αποτελεί μια προσεγμένη, τεκμηριωμένη και πλήρη **κριτική έκδοση**, που αποδίδει πιστά το περιεχόμενο των *Στοιχείων* και διατηρεί την αυστηρότητα και τη δομή που ακολουθούσε ο Ευκλείδης.

Το έργο αυτό του Heiberg μεταφράστηκε στα Αγγλικά και εκδόθηκε σε τρεις τόμους από τον **T. L. Heath**, ο οποίος πρόσθεσε μια εισαγωγή και αρκετά ενδιαφέροντα και χρήσιμα σχόλια.

Στον ελληνικό χώρο τα *Στοιχεία* παρουσιάζονται από τον **Ευάγγελο Σταμάτη** σε ένα έργο του που εκδόθηκε κατά την περίοδο 1952-1957 και αποτελείται από τέσσερις τόμους. Το έργο του Ε. Σταμάτη είναι μια αναπαραγωγή του έργου του Heiberg.

Όλα τα παραπάνω έργα είναι αξιόλογα και εξαιρετικά χρήσιμα, ταυτόχρονα όμως είναι πια σπάνια, μη αναγνώσιμα για τα ελληνικά δεδομένα και πολύ δύσχρηστα. Γι' αυτό το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο σε συνεργασία με το Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ), αποφάσισαν να προβούν στην έκδοση ενός νέου έργου, με περιεχόμενο το οποίο θα έχει ως βάση τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και θα

¹ G. Loria "*Ιστορία των Μαθηματικών*", Εκδόσεις Ε.Μ.Ε. 1971, τόμος 1^{ος}, σελ. 63.

² Ivor Thomas *Dictionary of Scientific Biography*, vol. IV, Charles Scribner's sons, New York 1975, σελ. 415.

είναι γραμμένο στη νεοελληνική γλώσσα με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό. Ενός έργου που να αποδίδει πιστά το περιεχόμενο και το πνεύμα του αρχαίου ελληνικού κειμένου του Ευκλείδη, αλλά και που ταυτόχρονα να μπορεί να διαβαστεί και να κατανοηθεί από τον Έλληνα αναγνώστη, ακόμη και από τον μη ειδικό. Ενός έργου χρήσιμου στον εκπαιδευτικό, το φοιτητή, το μαθητή, το γονιό και γενικά σε καθέναν που ενδιαφέρεται να ενημερωθεί για το περιεχόμενο αυτού του τόσο σημαντικού και διαχρονικού έργου.

Θεωρούμε ότι τα *Στοιχεία*, όπως παρουσιάζονται από τον Ευκλείδη, αποτελούν πνευματική και πολιτισμική κληρονομιά όχι μόνο των Ελλήνων, αλλά ολόκληρου του ευρωπαϊκού και του διεθνούς χώρου. Είναι επομένως υποχρέωση αλλά και ανάγκη να την αναδείξουμε, να τη διαφυλάξουμε και να την αξιοποιήσουμε.

2. Ευκλείδης: Η ζωή και η δράση του

Ο Ευκλείδης θεωρείται ως ο περισσότερο διάσημος μαθηματικός όλων των εποχών και το όνομά του έχει γίνει συνώνυμο με τη Γεωμετρία. Ήδη από την αρχαιότητα αναφέρεται ως *ο Γεωμέτρης* ή *ο Στοιχειωτής*. Όμως, πολύ λίγα γνωρίζουμε για τη ζωή και τη δράση του. Επίσης παραμένει άγνωστος ο τόπος της γέννησής του, καθώς και ο ακριβής χρόνος της γέννησης και του θανάτου του.

Από τα στοιχεία που έχουμε στη διάθεσή μας και τα οποία θα παραθέσουμε στη συνέχεια, φαίνεται ότι ο Ευκλείδης φοίτησε στην Ακαδημία του Πλάτωνα, ήταν μαθητής των μαθητών του και μεγαλύτερος από τον Αρχιμήδη και τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο. Έζησε στην Αλεξάνδρεια κατά την εποχή του Πτολεμαίου του 1^{ου} του Σωτήρα, όπου και συνέθεσε το πιο περίφημο από τα έργα του, τα *Στοιχεία*.

Ο Πρόκλος (410-485 μ.Χ.) στα σχόλιά του πάνω στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* αναφέρει:¹

"Όχι πολύ μετά από αυτούς (τον Ερμότινο τον Κολοφώνιο και το Φίλιππο τον Μενδαίο, δυο μαθητές του Πλάτωνα στην Ακαδημία) ήταν ο Ευκλείδης, ο οποίος συγκέντρωσε τα Στοιχεία, έβαλε σε τάξη πολλά από τα θεωρήματα του Εύδοξου, συμπλήρωσε και τελειοποίησε πολλά από τα θεωρήματα του Θεαίτητου και ιεράρχησε και τοποθέτησε σε μια αδιάμευστη,

¹ Proclus, "A Commentary on the First Book of Euclid's Elements", Glenn R. Morrow, Princeton University Press, Princeton New Jersey (1970), σελ. 56-57.

αδιαμφισβήτητη σειρά όλα τα θέματα τα οποία είχαν αποδειχθεί χαλαρά από τους προηγούμενους του. Αυτός ο άνθρωπος έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του 1^{ου} του Σωτήρα. Γιατί ο Αρχιμήδης, που ήταν αμέσως μετά τον Πτολεμαίο, αναφέρεται στον Ευκλείδη και ακόμη λέγεται ότι ο Πτολεμαίος κάποτε ρώτησε τον Ευκλείδη αν υπάρχει συντομότερος δρόμος να μάθει κάποιος Γεωμετρία από αυτόν που ακολουθείται στα Στοιχεία και ο Ευκλείδης του απάντησε ότι δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία. Αυτός (ο Ευκλείδης) είναι ασφαλώς μικρότερος από τους μαθητές του Πλάτωνα, αλλά μεγαλύτερος από τον Αρχιμήδη και τον Ερατοσθένη, αφού αυτοί οι δύο ήταν σύγχρονοι, όπως αναφέρει ο Ερατοσθένης. Στις ιδέες ήταν πλατωνικός και αγαπούσε τη φιλοσοφία του Πλάτωνα, γι' αυτό και στο τέλος των Στοιχείων κατασκεύασε τα ονομαζόμενα πλατωνικά σχήματα".

Ο Πρόκλος αναφέρει επίσης ότι πολλές προτάσεις, αξιώματα ή κοινές έννοιες των Στοιχείων αναμφίβολα είναι επηρεασμένες από το αντίστοιχο έργο του Αριστοτέλη. Ο Αριστοτέλης είχε αποδείξει την πρόταση ότι οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες¹, που είναι η πρόταση 5 του βιβλίου Ι των Στοιχείων. Αν επομένως τότε υπήρχαν τα Στοιχεία, δεν υπήρχε ανάγκη ο Αριστοτέλης να αποδείξει την πρόταση αυτή.

Ο μεγάλος Γερμανός φιλόλογος U. Von Wilamowitz-Moellendorff μετά από μακροχρόνιες φιλολογικές μελέτες και αναλύσεις που έκανε στα έργα του Πλάτωνα και στα Στοιχεία, έγραψε το 1929 ότι τα Στοιχεία του Ευκλείδη προέρχονται από τη Σχολή του Πλάτωνα.

Η Γερμανίδα ιστορικός Eva Sachs, η οποία επίσης μελέτησε τα Στοιχεία, καθώς και το μαθηματικό έργο του Πλάτωνα, έγραψε το 1917 ότι ο Ευκλείδης είναι μαθητής-εγγονός του Πλάτωνα. Δηλαδή, μαθητής των μαθητών του Πλάτωνα. Την ίδια άποψη έχουν και οι Ρώσοι μαθηματικοί V. Molodski και M. I. Vigodski.

Υπάρχουν αρκετές ακόμη αναφορές για τη ζωή και τη δραστηριότητα του Ευκλείδη. Ο Πάππος, για παράδειγμα, στο έργο του "Συναγωγή" (VII 35), αναφέρει ότι ο Απολλώνιος πέρασε αρκετό χρόνο στην Αλεξάνδρεια με τους μαθητές του Ευκλείδη². Αν λάβουμε υπόψη ότι ο Απολλώνιος έζησε και έδρασε στην Αλεξάνδρεια κατά την εποχή του Πτολεμαίου του 3^{ου} του Ευεργέτη (246-221 π.Χ.) και του Πτολεμαίου

¹ Αριστοτέλους "Αναλυτικά Πρότερα" I, 24, 41b 13-22.

² Friedrich Hultsch, "Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt", 3 τόμοι, Berlin 1876-1878, τόμος 1^{ος}, σελ. 678.

του 4^{ου} του Φιλοπάτορα, που ανέλαβε τη βασιλεία το 221 π.Χ., υπολογίζουμε ότι οι μαθητές του Ευκλείδη έζησαν και εργάστηκαν αυτή την περίοδο. Ο ίδιος ο Ευκλείδης στο έργο του "*Φαινόμενα*" παραθέτει μια πρόταση από το έργο "*Περί κινουμένης σφαίρας*" του Αυτόλुकου από την Πιτάνη. Αυτό σημαίνει ότι τα *Φαινόμενα* του Ευκλείδη, και επομένως τα *Στοιχεία*, έχουν γραφεί μετά από το έργο αυτό του Αυτόλुकου. Σημειώνουμε ότι το έργο του Αυτόλुकου έχει γραφεί στο τέλος του 4^{ου} αιώνα π.Χ., είναι το μοναδικό μαθηματικό βιβλίο που γράφτηκε πριν από τα *Στοιχεία* και σώζεται σήμερα ολόκληρο. Αν λάβουμε ακόμη υπόψη ότι ο Αυτόλुकος βρισκόταν στο απόγειο της δραστηριότητάς του γύρω στο 300 π.Χ. και ήταν σύγχρονος και γνωστός του Ευκλείδη, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και ο Ευκλείδης δραστηριοποιείται την ίδια εποχή ή λίγο αργότερα.

Ο Friedrich Hultsch¹ δίνει ως χρόνο ακμής του Ευκλείδη το 295 π.Χ. Ο Peter Fraser² συμπεραίνει ότι ο Ευκλείδης γεννήθηκε πιθανόν μεταξύ 330 και 320 και πέθανε γύρω στο 270 π.Χ. Επίσης, αρκετοί ερευνητές υπολογίζουν ότι τα μέσα της ζωής του Ευκλείδη (το απόγειο της δράσης του) είναι γύρω στα 300 π.Χ. Μεταξύ αυτών των ερευνητών είναι και οι Hankel, Gow, Zeuten, Cantor, Loria, Hoppe, Heath, Van der Waerden και άλλοι.

Ο Clemens Thaer³ υπολογίζει την περίοδο της ακμής του Ευκλείδη μεταξύ του 310 και του 300 π.Χ.

Ο Heinrich Vogt⁴ τοποθετεί τη γέννηση του Ευκλείδη το 365 π.Χ. και τη σύνθεση των *Στοιχείων* γύρω στο 330 με 320 π.Χ. Τις ίδιες χρονολογίες δίνει και ο Max Steck⁵. Όμως οι συγγραφείς αυτοί δεν έλαβαν υπόψη τους ότι ο Ευκλείδης έζησε στην Αλεξάνδρεια την εποχή του Πτολεμαίου του 1^{ου} του Σωτήρα και ότι ο Απολλώνιος συνεργάστηκε για αρκετό χρονικό διάστημα με τους μαθητές του Ευκλείδη. Ίσως οι συγγραφείς αυτοί συγχέουν τον Ευκλείδη με τον Ευκλείδη το Μεγαρέα, το μαθηματικό και φιλόσοφο που ήταν σύγχρονος του Πλάτωνα.

¹ Friedrich Hultsch, "*Eukleides*", Pauli-Wissowa vi, σελ. 104.

² Peter Fraser, "*Alexandria*", vol.I, σελ. 386-388 και vol. II Notes, κυρίως η note 82.

³ Clemens Thaer, "*Die Elemente von Euklid*", Leipzig, 1933-1937.

⁴ Heinrich Vogt, "*Die Lebenszeit Euklids*" Bibliotheca Mathematica, 13 (1913), σελ. 193-200.

⁵ Max Steck, "*Proclus Diadochus*", Halle, 1945. Βλέπε επίσης και το άρθρο του ίδιου συγγραφέα με τίτλο "*Die geistige Tradition der frühen Euklid-Ausgaben*", που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Forschungen und Fortschritte*, 31 (1957), σελ. 113-117.

Αν λάβουμε υπόψη μας όλα τα παραπάνω στοιχεία και επισημάνουμε γεγονότα και χρονολογίες που είναι ιστορικά εξακριβωμένες, όπως π.χ. ότι:

- ♦ Ο Πλάτων γεννήθηκε το 428 ή το 427 και πέθανε το 348 ή το 347 π.Χ.
- ♦ Ο Πτολεμαίος ο 1^{ος} ο Σωτήρ γεννήθηκε το 366 ή 367 π.Χ., κυβέρνησε την Αίγυπτο μετά το θάνατο του Μ. Αλεξάνδρου από το 323, ανακηρύχθηκε βασιλιάς της Αιγύπτου το 304, παραιτήθηκε από τη βασιλεία το 285 και πέθανε το 283 π.Χ.
- ♦ Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε το 287 και πέθανε το 212 π.Χ.
- ♦ Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος γεννήθηκε το 275 και πέθανε το 194 π.Χ.
- ♦ Ο Δημήτριος ο Φαληρέυς ήταν μαθητής του Θεόφραστου (ο οποίος ήταν μαθητής και συνεργάτης του Αριστοτέλη και έγινε διευθυντής του Λυκείου μετά το θάνατο του Αριστοτέλη το 322 π.Χ.) και το 317 π.Χ. ορίστηκε από τον Κάσσανδρο διοικητής των Αθηνών¹. Στη θέση αυτή παρέμεινε μέχρι το 307, οπότε ανατράπηκε από το Δημήτριο τον Πολιορκητή και μετοίκησε στη Θήβα, όπου έμεινε μέχρι το θάνατο του Κάσσανδρου. Το 297 πήγε στην Αίγυπτο, στην αυλή του Πτολεμαίου του 1^{ου} του Σωτήρα. Ο Πτολεμαίος, μετά από υπόδειξη του Δημητρίου του Φαληρέως, ίδρυσε το περίφημο Μουσείο και προσκάλεσε σ' αυτό διαπρεπείς επιστήμονες και λόγιους από την Αθήνα και από άλλα μέρη. Μεταξύ αυτών ήταν και ο Ευκλείδης. Ο Πτολεμαίος του ανέθεσε τη διεύθυνση του Μουσείου μετά από υπόδειξη του Δημητρίου του Φαληρέως, ο οποίος γνώριζε τη φήμη του Ευκλείδη ως μαθηματικού²,

τότε μπορούμε να συμπεράνουμε το χρόνο της γέννησης, της δράσης, καθώς και του θανάτου του Ευκλείδη με μεγάλη προσέγγιση:

Ο Ευκλείδης σπούδασε στην Αθήνα, πολύ πιθανόν στην Ακαδημία, η οποία ήταν το μεγαλύτερο πνευματικό κέντρο της εποχής. Εκεί γνώρισε τα έργα του Ευδόξου, του Θεαίτητου και των άλλων μεγάλων μαθηματικών και φιλοσόφων της εποχής. Ήταν μαθητής των μαθητών του Πλάτωνα, ο οποίος πέθανε το 347 π.Χ. Ήταν πρεσβύτερος από τον Αρχιμήδη και τον Ερατοσθένη και σύγχρονος με τον Αυτόλυκο, ο οποίος ακμάζει γύρω στο 300 π.Χ. Επομένως, η πιθανότερη **χρονολογία γέννησης του Ευκλείδη είναι το 330 π.Χ. περίπου.**

Από το έργο του στην Ακαδημία ο Δημήτριος ο Φαληρέυς γνώριζε τη φήμη του Ευκλείδη ως σπουδαίου μαθηματικού, γι' αυτό και προέ-

¹ U. Wilcken, *"Αρχαία Ελληνική Ιστορία"*, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 1976, σελ. 346-348.

² *Dictionary of Scientific Biography*, vol. IV, σελ. 415.

τρεψε τον Πτολεμαίο να τον προσκαλέσει στην Αλεξάνδρεια και να του αναθέσει τη διεύθυνση του Μουσείου. Επειδή ο Δημήτριος ο Φαληρέυς πήγε στην Αίγυπτο το 297 π.Χ., ο Ευκλείδης πρέπει να προσκλήθηκε στην Αίγυπτο μετά τη χρονολογία αυτή και οπωσδήποτε μετά την ίδρυση του Μουσείου. Η πιθανότερη χρονολογία κατά την οποία **ο Ευκλείδης πήγε στην Αίγυπτο είναι το 295 π.Χ.**

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι **ο Ευκλείδης ακμάζει κατά το τέλος του 4^{ου} και τις αρχές του 3^{ου} π.Χ. αιώνα.**

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος ήταν σύγχρονος με τους μαθητές του Ευκλείδη. Αν λάβουμε υπόψη ότι ο Απολλώνιος γεννήθηκε γύρω στο 260 και πέθανε το 200 π.Χ., μπορούμε να πούμε ότι η πιθανότερη χρονολογία **θανάτου του Ευκλείδη είναι γύρω στα 270 π.Χ.**

Ο Ευκλείδης εκτός από διάσημος μαθηματικός ήταν και ο ιδρυτής της μεγάλης σχολής μαθηματικών που αναπτύχθηκε στην Αλεξάνδρεια, από την οποία διδάχτηκαν οι μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί και αστρονόμοι που ακολούθησαν, όπως π.χ. ο Αρχιμήδης, ο Κώνων ο Σάμιος, ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος, ο Απολλώνιος ο Περγαίος, ο Ίππαρχος, ο Πτολεμαίος ο Κλαύδιος, ο Ήρων ο Αλεξανδρινός, ο Διόφαντος, ο Πάππος, ο Θέων ο Αλεξανδρινός, η Υπατία και αρκετοί άλλοι.

3. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη: Δομή, σημασία και περιεχόμενο

3.1. Η δομή και η σημασία των Στοιχείων

Το περιεχόμενο των *Στοιχείων* δεν είναι έργο μόνο του Ευκλείδη και ασφαλώς δεν είναι έμπνευση κάποιας συγκεκριμένης χρονικής στιγμής. Στηρίζεται στο έργο όλων των μαθηματικών και φιλοσόφων που προηγήθηκαν και είναι αποτέλεσμα των μεγάλων προσπαθειών, των επινοήσεων και του έργου που παρήχθη για 300 συνεχή χρόνια (από το 600 μέχρι το 300 π.Χ.) από όλους τους κορυφαίους φιλοσόφους που έζησαν, εργάστηκαν και μεγαλούργησαν όλη αυτή την καταπληκτικά γόνιμη για την επιστήμη εποχή.

Εκείνο που έκαμε ο Ευκλείδης ήταν και πρωτότυπο και πάρα πολύ σημαντικό. Συγκέντρωσε τα έργα των μεγάλων μαθηματικών και φιλοσόφων που είχαν προηγηθεί, ταξινομήσε την ύλη τους που αναφέρεται σε θέματα Γεωμετρίας και θεωρίας αριθμών, την ανάλυσε, τη συμπλήρωσε, την ιεράρχησε και την ενέταξε μέσα σ’ ένα νέο και καταπληκτικό μαθηματικό σύστημα που ο ίδιος

δημιούργησε. Καθόρισε τους ορισμούς, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες του νέου συστήματος και καθιέρωσε μια διαδικασία απόδειξης με τη βοήθεια των ορισμών, των αιτημάτων, των κοινών εννοιών και των προτάσεων που έχουν προηγουμένως αποδειχθεί. Δημιούργησε έτσι, για πρώτη φορά στην ιστορία της ανθρωπότητας, ένα αξιωματικό μαθηματικό σύστημα, το οποίο ισχύει μέχρι σήμερα με ελάχιστες μόνο διαφοροποιήσεις. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι, όταν στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, οι γεωμέτρες θέλησαν να δημιουργήσουν μια σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας, ακολούθησαν πιστά τον Ευκλείδη στους βασικούς τους προσανατολισμούς.

Ο Ευκλείδης, εκτός από την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας που εισήγαγε, δημιούργησε και μια μαθηματική θεωρία με δομή που είναι και σήμερα σύγχρονη. Καθιέρωσε έναν τρόπο και μια διαδικασία παρουσίασης της ύλης, με γενικές αποδείξεις άψογες, όπου κάθε πρόταση τοποθετείται στην κατάλληλη θέση και ακολουθεί η επόμενη πρόταση με μια αυστηρώς λογική τάξη, με τις λιγότερο δυνατές υποθέσεις, χωρίς να παρεμβάλλεται τίποτε το άσχετο ή το περιττό. Μια δομή και μια διαδικασία που πλησιάζουν την τελειότητα. Εισάγει την έννοια του *αναλλοιώτου* και καθιερώνει μια γεωμετρική μορφή απόδειξης στα Μαθηματικά, η οποία δεσπόζει για πάρα πολλούς αιώνες.

Αυτός ο τρόπος σκέψης και η αντίληψη για τη γεωμετρική απόδειξη στα Μαθηματικά επηρέασε όλους σχεδόν τους μεγάλους μαθηματικούς και επιστήμονες που ακολούθησαν. Η ίδια αντίληψη έχει επηρεάσει και τα έργα "*Principia*" (Αρχές) του Newton και "*Kritik der reinen Vernunft*" (Κριτική του Καθαρού Λόγου) του Kant, που θεωρούνται σημαντικότερα έργα στην ιστορία της σκέψης και της διάνοησης. Το έργο του Newton είναι διατυπωμένο σε μορφή γεωμετρικών αποδείξεων, των οποίων τους κανόνες λειτουργίας είχε θέσει ο Ευκλείδης. Η πίστη του Kant για την παγκόσμια αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τον οδήγησε στην υπερβατική αισθητική, η οποία διαπνέει όλες τις θεωρίες του πάνω στη γνώση και την αντίληψη.

Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι τα *Στοιχεία* δεν είναι ένα ανθολόγιο των προεुकλείδειων μαθηματικών γνώσεων. Υπάρχουν αξιόλογες γεωμετρικές προτάσεις που δεν περιέχονται στα *Στοιχεία*, όπως π.χ. τα τρία περίφημα προβλήματα της αρχαιότητας (ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο διπλασιασμός του κύβου και η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας), ο κύκλος του Απολλωνίου (περίφημος γεωμετρικός τόπος που υπάρχει στα "*Μεταωρολογικά*" του Αριστοτέλη), αρκετές μέθοδοι κατασκευής, όπως είναι η "*Νέυσις*" και πολλές άλλες αξιόλογες εργασίες. Η *Αριθμητική δια ψήφων* των Πυθαγορείων αντικαθίσταται από τη μέθοδο απόδειξης με χρήση των εμβადών (βιβλίο III).

Αυτά μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο Ευκλείδης ήθελε να συνθέσει ένα έργο, το οποίο θα λειτουργεί άψογα με τους κανόνες και τις διαδικασίες που αυτός έθεσε. Γι' αυτό στα *Στοιχεία* περιλαμβάνει εκείνες μόνο τις προτάσεις που μπορούν να ενταχθούν στο νέο σύστημα που δημιούργησε. Δεν περιορίστηκε βέβαια μόνο στην ταξινόμηση των προτάσεων που συνέλεξε από προϋπάρχοντα έργα, αλλά αρκετές από τις προτάσεις αυτές τις συμπλήρωσε και τις τελειοποίησε και πρόσθεσε και νέες, όπου έκρινε ότι αυτό ήταν αναγκαίο. Έδωσε ακόμη αυστηρές αποδείξεις σε προτάσεις που οι προηγούμενοί του είχαν αποδείξει με όχι αυστηρά μαθηματικό τρόπο. Όλοι σχεδόν οι ιστορικοί των επιστημών συμφωνούν ότι η θεωρία των παραλλήλων είναι αποκλειστικό δημιούργημα του Ευκλείδη.

Είναι πολύ πιθανόν ο Ευκλείδης να περιέλαβε στα *Στοιχεία* ένα μεγάλο μέρος από τη θεωρία των αναλογιών του Εύδοξου και του Θεαίτητου, αλλά όχι μόνο ανέπτυξε παραπέρα τη θεωρία αυτή, αλλά αναδιάταξε τις προτάσεις, ώστε να ανταποκρίνονται στο πνεύμα των *Στοιχείων*, τις συμπλήρωσε και έκαμε αυστηρές αποδείξεις των προτάσεων αυτών.

3.2. Αρχαίοι Έλληνες σχολιαστές των *Στοιχείων*

Από την ανάλυση του περιεχομένου των *Στοιχείων* που κάνουμε στην επόμενη παράγραφο, φαίνεται καθαρά ποιο τμήμα του έργου οφείλεται σε προηγούμενους συγγραφείς και ποια είναι η συμβολή του ίδιου του Ευκλείδη.

Το περιεχόμενο των *Στοιχείων* είναι σήμερα γνωστό από πολλές εκδόσεις και μεταφράσεις που έχουν γίνει κατά καιρούς σε πολλές γλώσσες (βλέπε παράγραφο 5). Πολλές και αξιόπιστες πληροφορίες βρίσκουμε επίσης στα έργα του Αρχιμήδη, του Απολλωνίου του Περγαίου, του Πτολεμαίου, του Γέμινου του Ρόδιου, του Ήρωνα του Αλεξανδρινού, του Πάππου, του Θέωνα του Αλεξανδρινού και σε πολλά άλλα έργα αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών. Αξιόλογα επίσης στοιχεία υπάρχουν στα έργα των κατά καιρούς σχολιαστών των *Στοιχείων*.

Θα αναφέρουμε εδώ τους σημαντικότερους αρχαίους Έλληνες και Βυζαντινούς σχολιαστές των *Στοιχείων*.

Ο **Ήρων** έχει γράψει σχόλια στο έργο του Ευκλείδη, τα οποία δε σώζονται. Έχουν διασωθεί μόνο κάποια αποσπάσματα, τα οποία αναφέρονται από τον Πρόκλο και τον Άραβα σχολιαστή al-Nayrizi¹.

¹ Μερικοί σχολιαστές των *Στοιχείων* αναφέρουν το όνομα του al-Nayrizi ως al-Nairizi ή an-Nairizi ή an-Nayrizi. Θεωρούμε ότι η σωστή απόδοση του ονόματος αυτού του μεγάλου Άραβα σχολιαστή είναι al-Nayrizi και αυτό το όνομα θα χρησιμοποιούμε στα επόμενα.

Ο Paul Tannery το 1882 υποστήριζε την άποψη ότι ο Πρόκλος γνώριζε πολύ καλά τα σχόλια του Ήρωνα μέσα από το έργο του Πάππου. Φαίνεται ότι τα σχόλια αυτά του Ήρωνα ήταν πολύ δημοφιλή, αφού τα γνώριζαν και αρκετοί Άραβες μαθηματικοί και σχολιαστές. Στο αραβικό λεξικό *Fihrist*, στο όνομα του Ήρωνα αναφέρεται: "*Αυτός έγραψε ένα βιβλίο για να επεξηγεί τα δυσνόητα εδάφια των Στοιχείων*".

Πολύ σημαντικά και αρκετά εκτεταμένα είναι τα σχόλια του **Πάππου**, αλλά δυστυχώς το ελληνικό κείμενο έχει χαθεί. Σώζεται όμως σε αραβική μετάφραση. Αρκετά από τα σχόλια του Πάππου μνημονεύονται από τον Πρόκλο και τον al-Nayrizi (βλέπε παράγραφo 5).

Στα μεταχριστιανικά χρόνια τα *Στοιχεία* σχολίασαν μεταξύ άλλων και οι Πορφύριος, Σιμπλίκιος και Πρόκλος.

Ο **Πορφύριος** (232-304 μ.Χ.), ένας νεοπλατωνικός φιλόσοφος, έγραψε σχόλια πάνω στα *Στοιχεία*, τα οποία δυστυχώς δε σώζονται. Αποσπάσματά τους βρίσκουμε στον Πρόκλο. Υπάρχουν αμφισβητήσεις από πολλούς αν πράγματι ο Πορφύριος είχε γράψει σχόλια για τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Όμως τα στοιχεία και οι ενδείξεις που υπάρχουν σήμερα επιβεβαιώνουν ότι τέτοια σχόλια είχαν πραγματικά γραφεί. Ο Πρόκλος στα σχόλια που έγραψε πάνω στην "*Πολιτεία*" του Πλάτωνα αναφέρεται με πολύ κολακευτικά λόγια στον Πορφύριο.

Ο **Σιμπλίκιος** (τέλη 5^{ου} και αρχές 6^{ου} αιώνα μ.Χ.) είναι ένας από τους σημαντικότερους σχολιαστές του έργου του Αριστοτέλη. Σ' αυτόν οφείλουμε και τη διάσωση πολλών σημαντικών αποσπασμάτων από την ιστορία της Γεωμετρίας που γράφτηκε από τον Εύδημο για την περίοδο από το Θαλή μέχρι τον Ευκλείδη. Μια περίληψη της ιστορίας αυτής υπάρχει στο έργο του Πρόκλου. Ο Σιμπλίκιος έχει γράψει σχόλια στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* και ειδικά για το 5^ο αίτημα των παραλλήλων. Το έργο του διασώθηκε μερικώς, σε αραβική μετάφραση, από τον al-Nayrizi.

Τις περισσότερες πληροφορίες για το περιεχόμενο των *Στοιχείων* τις αντλούμε από τον **Πρόκλο το Λύκειο**¹ (410-485 μ.Χ.). Ο Πρόκλος έγραψε σχόλια στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Έγραψε επίσης σχόλια σε αρκετά έργα του Πλάτωνα. Πολλοί ιστορικοί των επιστημών, όπως π.χ. οι J. L. Heiberg και T. L. Heath, πιστεύουν ότι τα σχό-

¹ Ο Πρόκλος γεννήθηκε στην Κωνσταντινούπολη το 410 μ.Χ. και πέρασε τα παιδικά του χρόνια στην Ξάνθη της Λυκίας, που ήταν και ο τόπος καταγωγής των γονέων του. Σπούδασε αρχικά στην Αλεξάνδρεια και στη συνέχεια στην Αθήνα, όπου είχε δάσκαλο το νεοπλατωνικό φιλόσοφο Πλούταρχο τον Αθηναίο. Διαδέχθηκε το Συριανό στη διεύθυνση της Ακαδημίας, γι' αυτό ονομάστηκε "*Διάδοχος*" (Διάδοχος του Πλάτωνα). Πέθανε το 485 μ.Χ. στην Αθήνα.

λια που υπάρχουν στους περισσότερους κώδικες ως σχόλια ανωνύμων είναι σχόλια του Πρόκλου, τα οποία κάποιιοι άλλοι σχολιαστές τα επανέλαβαν στα δικά τους κείμενα.

Δεν υπάρχουν αποδείξεις που να επιβεβαιώνουν ότι ο Πρόκλος έγραψε σχόλια και για τα υπόλοιπα βιβλία των *Στοιχείων*. Όμως υπάρχουν αρκετές ενδείξεις ότι έγραψε τέτοια σχόλια, αφού αυτά βρίσκονται διάσπαρτα σε έργα άλλων σχολιαστών. Π.χ. τα σχόλια στο βιβλίο V που αποδίδονται σε ανώνυμο σχολιαστή, κατά τον Heath ανήκουν στον Πρόκλο. Πολλοί υποστηρίζουν ότι ο Πρόκλος στηριζόμενος στα έργα του Αρχιμήδη, του Απολλωνίου, καθώς και στα έργα και τα σχόλια του Ήρωνα και του Πάππου, έχει γράψει σχόλια σε όλα τα βιβλία των *Στοιχείων*. Αυτό είναι πολύ πιθανόν, αφού ο Πρόκλος πολύ συχνά αναφέρεται και σε προτάσεις άλλων βιβλίων. Π.χ. προκειμένου να δώσει παράδειγμα πορίσματος, αναφέρεται στην πρόταση 1 του βιβλίου III, καθώς και στην πρόταση 3 του βιβλίου X.

3.3. Το περιεχόμενο των *Στοιχείων*

Τα *Στοιχεία*, που είναι το σημαντικότερο από τα έργα του Ευκλείδη, έχουν γραφεί σε 13 βιβλία¹. Πριν αναλύσουμε το περιεχόμενο κάθε βιβλίου, θα πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι έργα με τον τίτλο “*Στοιχεία*” έχουν γραφεί και από αρκετούς μαθηματικούς πριν από τον Ευκλείδη. Ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-410 π.Χ.), για παράδειγμα, είχε γράψει βιβλίο με τίτλο “*Στοιχεία*”, όπως αναφέρεται από τον Εύδημο στο έργο του “*Ιστορία της Γεωμετρίας*”, καθώς και από τον Πρόκλο. Ο Λέων ο Αθηναίος (5^{ος} π.Χ. αιώνας), μαθητής του Πλάτωνα, έγραψε ένα έργο με τίτλο “*Στοιχεία*”, το οποίο θεωρήθηκε πληρέστερο από το αντίστοιχο έργο του Ιπποκράτη, τόσο ως προς τον αριθμό των προτάσεων που περιείχε, όσο και ως προς την επιμελέστερη απόδειξη αυτών των προτάσεων. Επίσης βιβλία με τίτλο “*Στοιχεία*” έγραψαν: Ο Κρίτων ο Αθηναίος, μαθητής του Σωκράτη, γνωστός από τον ομώνυμο διάλογο, ο Σιμμίας ο Θηβαίος, μαθητής του Φιλολάου, και ο Θαύδιος από τη Μαγνησία.

Δυστυχώς, από όλα αυτά τα συγγράμματα τίποτε δεν έχει διασωθεί, εκτός από μερικές πληροφορίες που υπάρχουν σε άλλους συγγραφείς και στην “*Ιστορία της Γεωμετρίας*” του Εύδημου. **Το μοναδικό**

¹ Μερικοί θεωρούν ότι τα *Στοιχεία* έχουν γραφεί σε 15 βιβλία, γιατί συμπεριλαμβάνουν σ’ αυτά και δύο ακόμα έργα, που γράφτηκαν πολύ αργότερα. Ως βιβλίο XIV αναφέρεται ένα έργο του Υψικλή, που γράφτηκε το 2^ο μ.Χ. αιώνα. Το βιβλίο XV έχει γραφεί τον 6^ο μ.Χ. αιώνα από ένα μαθητή του Ισίδωρου του Μιλήσιου.

μαθηματικό βιβλίο που γράφτηκε πριν από τον Ευκλείδη και το οποίο σώζεται ολόκληρο σήμερα είναι το βιβλίο *"Περί κινουμένης σφαίρας"* του Αυτόλυκου από την Πιτάνη, το οποίο έχει γραφεί κατά το τέλος του 4^{ου} π.Χ. αιώνα. Ο Αυτόλυκος όπως είπαμε, ήταν σύγχρονος και γνωστός του Ευκλείδη. Ο Ευκλείδης γνώριζε πολύ καλά το έργο του Αυτόλυκου. Όμως, η δομή αυτού του έργου και η διαδικασία των αποδείξεων των προτάσεων είναι εντελώς διαφορετική από εκείνη των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, αφού δεν υπάρχουν οι ορισμοί ούτε τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες που έκαμαν τα *Στοιχεία* βιβλίο μοναδικό σε όλη τη μακραίωνη ιστορία του.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Ευκλείδης ήταν ο τελευταίος που έγραψε βιβλίο με τίτλο *Στοιχεία*. Ο λόγος της μη διάσωσης των προηγούμενων ήταν, όπως πιστεύουν όλοι σχεδόν οι ιστορικοί των επιστημών, η συντριπτική υπεροχή του έργου του Ευκλείδη έναντι όλων των προηγούμενων έργων. Αυτή η υπεροχή έκανε περιττή την ύπαρξη αυτών των έργων.

Στα 13 βιβλία των *Στοιχείων* περιέχονται 121 ορισμοί, 5 αιτήματα, 9 κοινές έννοιες (αξιώματα) και 465 προτάσεις (θεωρήματα).

Οι **ορισμοί** είναι αρκετά περιορισμένοι σε αριθμό. Ο Ευκλείδης δεν αισθάνεται την ανάγκη να ορίσει ακόμα και βασικά γεωμετρικά αντικείμενα ή βασικές μαθηματικές έννοιες. Δεν υπάρχει, για παράδειγμα, ορισμός για το παραλληλόγραμμο, το τραπέζιο, το πεντάγωνο κλπ. Επίσης δεν ορίζεται η ισότητα, παρόλο που χρησιμοποιείται στην πρόταση 4 του βιβλίου I.

Οι ορισμοί των *Στοιχείων* είναι είτε επεξηγήσεις κάποιων πραγμάτων, είτε υποθέσεις, είτε παραδοχές, δηλαδή προτάσεις που τις θεωρούμε αληθείς. Βασικό χαρακτηριστικό των ορισμών είναι ότι, στους πρώτους τουλάχιστον ορισμούς, ο Ευκλείδης ορίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα προϋποθέτοντας την ύπαρξή τους. Σ' αυτό συμφωνεί με τον Αριστοτέλη, ο οποίος στα *"Αναλυτικά Ύστερα"*, όπου αναπτύσσει μια αποδεικτική θεωρία, αναφέρει ότι *"ο ορισμός διαφέρει από την απόδειξη, γιατί ο ορισμός δεν έχει ως στόχο την ύπαρξη του αντικειμένου"*.

Ένα πλεονέκτημα, κατά τη γνώμη μας, που υπάρχει στα *Στοιχεία* είναι ότι ο Ευκλείδης ορίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα χωρίς προηγουμένως να έχει καθορίσει τις αρχικές έννοιες. Μερικοί μάλιστα ορισμοί αποτελούν οι ίδιοι αρχικές έννοιες, όπως είναι η έννοια του σημείου, της γραμμής κλπ.

Οι ορισμοί, τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες αποτελούν τη γλώσσα της θεωρίας και είναι τα θεμέλια ολόκληρου του έργου.

Αφού ορίσει το σημείο, τη γραμμή, τον κύκλο κλπ. ο Ευκλείδης παραθέτει τα **πέντε αιτήματα**, με τα οποία προσπαθεί να αποδείξει την ύπαρξη των γεωμετρικών μεγεθών και να διατυπώσει τις ιδιότητες που έχουν, καθώς και τις σχέσεις που διέπουν αυτά τα μεγέθη. Η έννοια του αιτήματος υπάρχει και στα έργα του Αριστοτέλη και του Πλάτωνα, όμως κανένας ιστορικός των επιστημών δεν αμφισβήτησε ποτέ ότι τα αιτήματα και η σειρά με την οποία παρουσιάζονται είναι αποκλειστικά έργο του ίδιου του Ευκλείδη. Στο έργο του Αυτόλुकου δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ ορισμών, αιτημάτων και κοινών εννοιών. Όλες αυτές οι προτάσεις ονομάζονται **αρχές**. Αυτό φαίνεται ότι ακολουθούσαν και όλοι οι μαθηματικοί και φιλόσοφοι που προηγήθηκαν του Ευκλείδη.

Το **πρώτο αίτημα** λέει ότι *"από δύο σημεία μόνο μία ευθεία γραμμή διέρχεται"*. Αυτό σημαίνει ότι δύο ευθείες που έχουν τα ίδια άκρα ή δύο σημεία κοινά ταυτίζονται ή, το σημαντικότερο, δύο ευθείες δεν μπορούν να περικλείουν κάποια επιφάνεια. Αυτό το επαναλαμβάνει ως ένατη κοινή έννοια. Δηλαδή, το αίτημα δεν είναι μια απλή παραδοχή, αλλά συνεπάγεται και την παραδοχή της αλήθειας άλλων προτάσεων που προκύπτουν ως λογική συνέπεια από το αίτημα. Και τις προτάσεις αυτές ο Ευκλείδης τις χρησιμοποιεί χωρίς παραπέρα απόδειξη.

Το **δεύτερο αίτημα**, που λέει ότι *"κάθε πεπερασμένη ευθεία προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως και προς τα δύο άκρα της"*, συνεπάγεται ότι μια ευθεία μπορεί να προεκταθεί μόνο κατά μια διεύθυνση, τη διεύθυνση των άκρων της και αυτό μπορεί να γίνει για κάθε ευθεία. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η προέκταση σε κάθε κατεύθυνση είναι μοναδική. Επειδή δύο ευθείες δεν μπορεί να έχουν κοινό τμήμα και κάθε ευθεία προεκτείνεται επ' άπειρον, η επιφάνεια στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι άπειρη σε κάθε κατεύθυνση.

Το **τρίτο αίτημα**, *"με κάθε κέντρο και κάθε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος"*, δηλώνει ότι η ακτίνα μπορεί να είναι απείρως μικρή ή απείρως μεγάλη. Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος είναι συνεχής και άπειρος. Δηλαδή από το αίτημα αυτό προκύπτει η **συνέχεια του χώρου**, αφού η ακτίνα μπορεί να είναι όσο θέλουμε μικρή και το **άπειρο του χώρου**, αφού η ακτίνα είναι όσο θέλουμε μεγάλη. Έχουμε έτσι την έννοια της συνέχειας και του απείρου του χώρου, τις οποίες ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί χωρίς άλλες επεξηγήσεις.

Το **τέταρτο αίτημα**, *"όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους"*, είναι ελαφρώς διαφορετικό από τα προηγούμενα, γιατί από τη μια προϋποθέτει την ύπαρξη της ορθής γωνίας χωρίς προηγουμένως να την έχει ορίσει και από την άλλη δέχεται ότι η ορθή γωνία είναι προκαθορισμένο

μέγεθος, αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης άλλων γωνιών. Θεωρεί επίσης ότι οι γωνίες είναι ευθύγραμμες, διαφορετικά μια γωνία ίση με μια ορθή δεν είναι οπωσδήποτε ορθή γωνία, όπως απέδειξε ο Πάππος (βλέπε παράγραφο 5). Ακόμη, για να συγκριθούν δύο ίσες γωνίες πρέπει να μετακινηθούν, τουλάχιστον η μία, να τοποθετηθούν η μία πάνω στην άλλη και να συμπίσουν. Αυτό προϋποθέτει ότι τα σχήματα δε μεταβάλλονται κατά τη μετακίνησή τους και ότι υπάρχει ομοιογένεια του χώρου. Αντί να ορίζει ή να υποθέτει όλα αυτά ο Ευκλείδης, επιλέγει να παραδεχθεί μόνο ότι οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Ο Πρόκλος λέει ότι αν παραδεχθούμε ότι η πρόταση αυτή είναι από μόνη της φανερή και δε χρειάζεται απόδειξη, τότε δεν είναι αίτημα, αλλά αξίωμα (Πρόκλος, 188.1-3)

Το πέμπτο αίτημα, *"αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες όταν προεκταθούν επ' άπειρον θα συναντηθούν προς το μέρος που σχηματίζονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες"*, είναι το **αίτημα των παραλλήλων**, που ως γνωστόν απασχόλησε τόσο τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, όσο και τους νεότερους και τους σύγχρονους. Αναφέρεται στις παράλληλες, ευθείες με την έννοια που καθόρισε ο Ευκλείδης στον ορισμό 23. Η βασική έννοια της παραλληλίας για τον Ευκλείδη είναι ότι οι ευθείες είναι συνεπίπεδες και δεν τέμνονται. Άλλοι όμως επιστήμονες καθορίζουν τις παράλληλες ευθείες με την έννοια της *"ίσης απόστασης"* ή της *"διεύθυνσης"*.

Όπως αναφέρει ο Πρόκλος¹, ο Ποσειδώνιος και ο Γέμινος ο Ρόδιος θεωρούσαν ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες, όταν οι αποστάσεις κάθε σημείου της μιας από την άλλη είναι ίσες. Την ίδια έννοια για τις παράλληλες ευθείες είχε και ο Σιμπλίκιος, όπως αναφέρει ο al-Nayrizi².

Ο Φιλόλαος στα σχόλια που έγραψε για το έργο του Αριστοτέλη (*"Αναλυτικά Πρότερα"* II, 16.65 α 4) ονομάζει παράλληλες δύο ευθείες που έχουν την ίδια διεύθυνση.

Το πέμπτο αίτημα έχει απασχολήσει πολλούς επιστήμονες από την αρχαιότητα μέχρι τον περασμένο αιώνα. Πολλοί πίστευαν ότι το αίτημα αυτό θα μπορούσε να αποδειχθεί και επομένως η Ευκλείδεια Γεωμετρία θα μπορούσε να θεμελιωθεί αξιωματικά χωρίς αυτό. Ο Πτολεμαίος ήταν

¹ G. Friedlein, *"Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii"*, Leipzig 1883, σελίδα 176.7-10.

² M. Curtze, *"Das angebliche werkdes Eukleides überdie Waage"*, Zeitschifte für Mathematik und Physik, 19 (1874) σελ. 25.8-27.14.

ο πρώτος που προσπάθησε να το αποδείξει, αλλά χωρίς αποτέλεσμα¹. Ο Πρόκλος, όπως αναφέρει², προσπάθησε ο ίδιος να αποδείξει το *Ευκλείδειο αίτημα*, χωρίς όμως επιτυχία. Οι προσπάθειες ήταν πολλές και μακρόχρονες με το ίδιο πάντα αρνητικό αποτέλεσμα. Ο Saccheri στο έργο του "*Euclides ab omni naevo Vindicatus*" (1773) προσπαθεί να διερευνήσει ποια θα ήταν η Γεωμετρία χωρίς το *Ευκλείδειο αίτημα*. Φαίνεται να είχε συνειδητοποιήσει ότι δεν μπορούσε να υπάρξει άλλη Γεωμετρία δίπλα σε αυτή που θεμελίωσε ο Ευκλείδης. Όπως είναι γνωστό, οι προσπάθειες συνεχίστηκαν κυρίως κατά το 18^ο και 19^ο αιώνα από διάφορους αξιόλογους μαθηματικούς της εποχής, και οδήγησαν στη δημιουργία άλλων *μη-ευκλείδειων Γεωμετριών*. Ο Lobachevski (1826), ο Bolyai (1832) και ο Riemann (1854) ήταν μερικοί από τους δημιουργούς των *μη-ευκλείδειων Γεωμετριών*.

Οι *κοινές έννοιες* έχουν γενικότερη εφαρμογή. Δεν εφαρμόζονται δηλαδή μόνο στη Γεωμετρία, αλλά και σε άλλες επιστήμες, όπως π.χ. στις φυσικές επιστήμες. Οι κοινές έννοιες για παράδειγμα, "*όταν δύο μέγεθη είναι ίσα με τρίτο μέγεθος, τότε είναι και μεταξύ τους ίσα*" ή "*όταν σε ίσα προσθέσουμε ίσα προκύπτουν ίσα*" κλπ. είναι έννοιες που ισχύουν γενικά πέραν της Γεωμετρίας. Ίσως αυτός είναι και ο λόγος που ονομάστηκαν "*κοινές έννοιες*".

Στα *Στοιχεία* εντοπίζουμε κοινές έννοιες οι οποίες είναι συνέπεια κάποιων αιτημάτων. Π.χ. η κοινή έννοια "*δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια*", είναι συνέπεια του αιτήματος 1, όπως αναφέραμε παραπάνω. Ο Πρόκλος, ο οποίος ακολουθεί πιστά την ορολογία του Ευκλείδη, διαφοροποιείται μόνο ως προς το σημείο αυτό. Δηλαδή, αντί του όρου "*κοινές έννοιες*" χρησιμοποιεί τον όρο "*αξιώματα*" και κάνει διάκριση μεταξύ αιτήματος και αξιώματος. Κατά τον Πρόκλο, το κοινό χαρακτηριστικό μεταξύ αιτήματος και αξιώματος είναι ότι και τα δύο δε χρειάζονται απόδειξη, αλλά θεωρούνται ως γνωστά και χρησιμοποιούνται ως σημεία εκκίνησης στη διαδικασία απόδειξης. Διαφέρουν μεταξύ τους όπως τα θεωρήματα με τα προβλήματα. Τα αξιώματα θεωρούν ως δεδομένα πράγματα που είναι άμεσα προφανή και εύκολα κατανοητά και από τον μη ειδικό. Ενώ στο αίτημα αποδεχόμαστε κάτι το οποίο μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, να επινοηθεί ή να κατασκευαστεί, χωρίς να απαιτείται ιδιαίτερος κόπος σκέψης γι' αυτή την αποδοχή.

¹ G. Friedlein, "*Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*", Leipzig 1883, σελίδες 361. 5 – 367. 27.

² G. Friedlein, ό.π. σελίδες 368. 24 – 373. 2

Κατά τον Αριστοτέλη "*αίτημα*" είναι μια πρόταση που επιδέχεται απόδειξη, αλλά εμείς τη θεωρούμε ως δεδομένη χωρίς απόδειξη ("*Αναλυτικά Ύστερα*", 76b 32-34).

Ο Πρόκλος στο έργο του "*Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων*" συμπεριλαμβάνει μόνο πέντε αξιώματα (Πρόκλος, σελ. 193.10-14):

- ♦ *Πράγματα που είναι ίσα με το ίδιο πράγμα είναι και μεταξύ τους ίσα.*
- ♦ *Αν ίσα προστεθούν σε ίσα προκύπτουν ίσα.*
- ♦ *Αν ίσα αφαιρεθούν από ίσα, τα υπόλοιπα είναι ίσα.*
- ♦ *Το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος του και*
- ♦ *Πράγματα που ταυτίζονται είναι ίσα μεταξύ τους*

Στις διάφορες εκδόσεις και μεταφράσεις των *Στοιχείων* ο αριθμός των κοινών εννοιών (αξιωμάτων) διαφέρει. Π.χ. στη μετάφραση του Barocius περιέχονται 10 αξιώματα, ενώ στο έργο του Heiberg υπάρχουν 9 αξιώματα, τα οποία ονομάζει *κοινές έννοιες*. Όμως ο Heiberg τα τέσσερα από τα 9 αξιώματα τα θεωρεί ότι είναι νεότερες προσθήκες και επομένως θεωρεί ως γνήσια αξιώματα του Ευκλείδη μόνο τα πέντε που περιέχονται στο βιβλίο του Πρόκλου.

Οι *προτάσεις* είναι καταναμεμημένες σε όλα τα βιβλία, ανάλογα με το περιεχόμενό τους. Οι περισσότερες προτάσεις, 115 σε αριθμό, περιέχονται στο βιβλίο X, που αναφέρεται στους ασύμμετρους αριθμούς. Δεύτερο σε αριθμό προτάσεων είναι το βιβλίο I, το οποίο περιέχει 48 προτάσεις, και ακολουθούν το βιβλίο VII (πρώτο βιβλίο της θεωρίας αριθμών), το οποίο περιέχει 39 προτάσεις και το βιβλίο XI (πρώτο βιβλίο της Στερεομετρίας), το οποίο περιέχει επίσης 39 προτάσεις.

Κάθε πρόταση που είναι πλήρης, δηλαδή που έχει όλα τα μέρη της, ακολουθεί τα εξής βήματα:

- ♦ Τη *διατύπωση (εκφώνηση)* της πρότασης. Στη διατύπωση δεν υπάρχουν γράμματα ή σύμβολα.
- ♦ Την *έκθεση*. Δηλαδή την ανάλυση των δεδομένων και την αναπαράσταση της πρότασης με συγκεκριμένο σχήμα, το οποίο έχει γράμματα του ελληνικού αλφάβητου.
- ♦ Τους *απαραίτητους προσδιορισμούς*.
- ♦ Την *κατασκευή*, όπου αυτή είναι αναγκαία. Η κατασκευή περιέχει και τις απαραίτητες προσθήκες στο σχήμα.
- ♦ Την *απόδειξη* ή *επίδειξη* και
- ♦ Το *συμπέρασμα*.

Σε κάποιες προτάσεις μπορεί να μην υπάρχουν όλα αυτά τα βήματα, επειδή δε χρειάζονται, όπως π.χ. οι ορισμοί ή η κατασκευή. Όμως η διατύπωση της πρότασης, η ανάλυση των δεδομένων, η απόδειξη και το

συμπέρασμα υπάρχουν πάντοτε σε κάθε πρόταση. Στο τέλος του συμπεράσματος, **όταν πρόκειται για απόδειξη**, αναγράφεται η πρόταση **ὅπερ ἔδει δεῖξαι**" (ὁ.ἔ.δ.), που σημαίνει ότι εκείνο που έπρεπε να αποδειχθεί αποδείχθηκε, ενώ **όταν πρόκειται για κατασκευή**, αναγράφεται η ένδειξη **"ὅπερ ἔδει ποιῆσαι"** (ὁ.ἔ.π.), δηλαδή εκείνο που έπρεπε να κατασκευαστεί κατασκευάστηκε.

Στα *Στοιχεία* θα συναντήσουμε και όλες σχεδόν τις μεθόδους απόδειξης που χρησιμοποιούνται σήμερα. Θα βρούμε π.χ. τη **μέθοδο της συνεπαγωγής**, τη **συνθετική μέθοδο**, την **αναλυτική μέθοδο**, τη μέθοδο της **εις άτοπον απαγωγής**, καθώς και τη μέθοδο της **τέλειας επαγωγής**.

Η μέθοδος της συνεπαγωγής χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην απόδειξη των προτάσεων. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί συνήθως τη **συνθετική μέθοδο**. Ξεκινά από τα δεδομένα, τα γνωστά, και με τη βοήθεια των ορισμών, των αιτημάτων και των αξιωμάτων, καθώς και των προτάσεων των οποίων η απόδειξη έχει προηγηθεί, ακολουθεί μια επαγωγική διαδικασία, ώσπου να καταλήξει στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Την **αναλυτική μέθοδο** τη χρησιμοποιούσε σπανιότερα. Όμως, σύμφωνα με τον Πάππο (*Συναγωγή*, VII, εισαγωγή 1-3), ο Ευκλείδης ήταν πολύ επιδέξιος στη χρησιμοποίηση της **αναλυτικής μεθόδου**, αφού τη χρησιμοποιεί πολύ συχνά στα άλλα έργα του, τα *"Δεδομένα"*, τα *"Πορίσματα"* και στο *"Τόποι προς επιφάνειες"*. Αυτά συμπεριλαμβάνονται στη συλλογή μαθηματικών έργων που είναι γνωστή ως *"Θησαυροί της Ανάλυσης"*, όπως θα δούμε παρακάτω.

Στα *Στοιχεία* γίνεται συχνή χρήση της μεθόδου της **"εις άτοπον απαγωγής"**, καθώς και χρήση της μεθόδου της **τέλειας επαγωγής**. Η μέθοδος της **τέλειας επαγωγής** πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τους Πυθαγορείους¹ και τη βρίσκουμε στα έργα του Αριστοτέλη και του Αρχιμήδη. Στα *Στοιχεία* χρησιμοποιείται για την απόδειξη αρκετών προτάσεων, όπως για παράδειγμα της πρότασης 14 του βιβλίου VII, της πρότασης 13 του βιβλίου VIII και της πρότασης 20 του βιβλίου IX.

Βιβλίο Ι

Το βιβλίο Ι περιέχει 23 ορισμούς, 5 αιτήματα, 9 κοινές έννοιες και 48 προτάσεις (θεωρήματα). **Αιτήματα και κοινές έννοιες υπάρχουν μόνο στο πρώτο βιβλίο και αποτελούν τις βάσεις της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.**

¹ T. G. Exarchakos, *"The Method of Mathematical Induction and the Pell Equation in ancient Greek Mathematics"*, Mentor 1 (1999), σελ. 4-16.

Οι 48 προτάσεις μπορούν να χωριστούν στις εξής κατηγορίες:

- ♦ Οι προτάσεις 1 μέχρι 26 αποτελούν τη Γεωμετρία των σημείων, των γραμμών, των γωνιών και των τριγώνων. Οι προτάσεις αυτές, μαζί με τις προτάσεις 27 και 28 αποτελούν τη λεγόμενη *ουδέτερη (Απόλυτη) Γεωμετρία*. Δηλαδή τη Γεωμετρία που ορίζουν τα τέσσερα πρώτα αιτήματα των *Στοιχείων*. Η πρόταση 4 που αποδίδεται από τον Εύδημο στο Θαλή, στα περισσότερα σύγχρονα αξιωματικά συστήματα θεωρείται αξίωμα. Στο αξιωματικό σύστημα του Hilbert η πρόταση 4 εμφανίζεται ως αξίωμα III.5 και ο Hilbert αποδεικνύει ότι το αξίωμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τα άλλα. Στην απόδειξη της πρότασης 6 γίνεται για πρώτη φορά στα *Στοιχεία* η χρήση της μεθόδου της *εξ άτοπων απαγωγής*.
- ♦ Οι προτάσεις 27 μέχρι 34 αποτελούν τη *Γεωμετρία των παραλλήλων*. Αξίζει να επισημάνουμε εδώ ότι για την απόδειξη της πρότασης 29 είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση του 5^{ου} αιτήματος (του αιτήματος των παραλλήλων του Ευκλείδη) και ότι η πρόταση αυτή είναι η πρώτη πρόταση των *Στοιχείων* που για την απόδειξή της γίνεται χρήση του 5^{ου} αιτήματος. Για την απόδειξη της πρότασης 28 δεν είναι αναγκαία η χρήση του 5^{ου} αιτήματος. Είναι όμως αναγκαία η χρήση του 1^{ου} αιτήματος, ότι δηλαδή "*δύο σημεία ορίζουν τη θέση μιας μόνο ευθείας*". Επομένως, η πρόταση αυτή μπορεί να ενταχθεί και στην απόλυτη Γεωμετρία και ακόμα ισχύει και για τις μη-ευκλείδειες Γεωμετρίες του Lobatshevski και του Riemann. Ακόμη πρέπει να επισημάνουμε ότι στην πρόταση 32, το μέρος που αναφέρει ότι "*το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι δύο ορθές*" είναι επινόηση των Πυθαγορείων, οι οποίοι, σύμφωνα με τον Πρόκλο, ήταν οι πρώτοι που το απέδειξαν.
- ♦ Οι προτάσεις 35 μέχρι 48 αναφέρονται στη θεωρία των εμβαδών, που θα ολοκληρωθεί στα επόμενα βιβλία. Ο Ευκλείδης δίνει την έννοια του εμβαδού χρησιμοποιώντας τον όρο "*περιεχόμενο σχήματος*". Οι προτάσεις αυτές αναφέρονται στα εμβαδά τριγώνων και παραλληλογράμμων. Η πρόταση 47 είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα, ενώ η πρόταση 48 είναι η αντίστροφη πρόταση της 47.

Βιβλίο II

Το βιβλίο II είναι το μικρότερο βιβλίο των *Στοιχείων*, αλλά είναι πολύ σημαντικό, γιατί εισάγει τη γεωμετρική άλγεβρα των Ελλήνων και

ορίζει ένα νέο γεωμετρικό σχήμα, **το γνώμονα**, που είχε μεγάλη εφαρμογή για τη λύση γεωμετρικών προτάσεων στην αρχαιότητα.

Περιέχει 2 ορισμούς και 14 προτάσεις. Οι δύο ορισμοί καθορίζουν την έννοια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του γνώμονα. Ο ορισμός του γνώμονα, κατά το Διογένη το Λαέρτιο, οφείλεται στον Αναξίμανδρο. Οι προτάσεις του βιβλίου II είναι εφαρμογές στις προτάσεις 44 και 45 του βιβλίου I και αρκετές αναφέρονται σε μετασχηματισμούς επιφανειών. Μερικές από τις προτάσεις αυτές αναφέρονται στη γεωμετρική λύση εξισώσεων δεύτερου βαθμού, στη λύση εξισώσεων που αργότερα ονομάστηκαν *εξισώσεις Pell*, στους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, στην επιβεβαίωση αλγεβρικών σχέσεων, στη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος. Οι προτάσεις 5, 6, 11 και 14 για παράδειγμα, αναφέρονται ουσιαστικά στη λύση των εξισώσεων

$$ax - x^2 = \beta^2, \quad ax + x^2 = \beta^2, \quad x^2 + ax = \alpha^2 \quad \text{και} \quad x^2 = \alpha\beta$$

αντίστοιχα. Ειδικά η πρόταση 11 αφορά στο **πρόβλημα της χρυσής τομής**, το οποίο αποδίδεται στους Πυθαγορείους. Το πρόβλημα αυτό απαιτεί

"να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο".

Αν a είναι το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα και x , $a - x$, τα τμήματα στα οποία διαιρέθηκε, τότε θα ισχύει η σχέση

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \quad \text{ή} \quad x^2 = a(a - x) \quad \text{ή} \quad x^2 + ax = a^2.$$

Επομένως, το πρόβλημα ουσιαστικά αναζητά τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 + ax = a^2.$$

Οι προτάσεις 9 και 10 είναι πολύ σημαντικές, γιατί έχουν πολλές εφαρμογές και κυρίως γιατί μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη λύση Διοφαντικών εξισώσεων της γενικής μορφής

$$x^2 = ay^2 \pm 1 \quad (1)$$

που είναι γνωστές ως **εξισώσεις του Pell**.

Η πρόταση 9 λέει ότι

"αν Γ είναι το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB και Δ σημείο του τμήματος (Σχ. 1), τότε ισχύει η σχέση

$$A\Delta^2 + B\Delta^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2) \quad (2)$$



Σχήμα 1

Αν θέσουμε $\Gamma\Delta = x$ και $B\Delta = y$, θα έχουμε

$$A\Gamma = \Gamma B = \Gamma\Delta + \Delta B = x + y.$$

$A\Delta = A\Gamma + \Gamma\Delta = x + y + x = 2x + y$ και επομένως η σχέση (2) γίνεται

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(x+y)^2 \quad (3)$$

Την πρόταση 3, κατά τον Πρόκλο, την είχαν αποδείξει οι Πυθαγόρειοι, με την εξής διατύπωση:

"Αν α και δ είναι η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου, τότε $\alpha + \delta$ και $2\alpha + \delta$ είναι η πλευρά και η διαγώνιος ενός άλλου τετραγώνου".

Δηλαδή, οι Πυθαγόρειοι είχαν αποδείξει τη σχέση¹

$$(2\alpha + \delta)^2 + \delta^2 = 2\alpha^2 + 2(\alpha + \delta)^2$$

που είναι η σχέση (3). Με τη χρήση της σχέσης αυτής οι Πυθαγόρειοι υπολόγισαν τους πλευρικούς και τους διαμετρικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας για πρώτη φορά στην ιστορία των Μαθηματικών τη μέθοδο της *τέλειας επαγωγής*².

Από τη σχέση (3) προκύπτει η σχέση

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2$$

Από την τελευταία αυτή σχέση παρατηρούμε ότι:

Αν $2x^2 - y^2 = 1$, τότε $2(x+y)^2 - (2x+y)^2 = -1$ και

αν $2x^2 - y^2 = -1$, τότε $2(x+y)^2 - (2x+y)^2 = 1$.

Δηλαδή, αν τα x, y είναι ρίζες μιας από τις εξισώσεις

$$y^2 = 2x^2 \pm 1$$

τότε, τα $x + y$ και $2x + y$ είναι ρίζες μιας από τις εξισώσεις

$$(2x+y)^2 = 2(x+y)^2 \mp 1$$

που είναι ουσιαστικά η πρόταση των Πυθαγορείων.

¹ T. G. Exarchakos, "The method of mathematical induction and the Pell equation in ancient Greek Mathematics", Mentor 1 (1999), σελ. 4-16.

² B. L. Van der Waerden, "Geometry and Algebra in ancient civilizations", Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1983), σελ.136.

Από την πρόταση 10 μπορούμε να έχουμε ανάλογα συμπεράσματα.

Πραγματικά, η πρόταση 10 λέει:

Αν Γ είναι το μέσο ευθύγραμμου τμήματος AB και Δ είναι σημείο στην προέκταση του AB (Σχ. 2), τότε θα ισχύει η σχέση

$$A\Delta^2 + B\Delta^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$$



Σχήμα 2

Αν θέσουμε $\Gamma\Delta = x$ και $B\Delta = y$, τότε $A\Gamma = \Gamma B = \Gamma\Delta - B\Delta = x - y$ και

$$A\Delta = AB + B\Delta = 2(x-y) + y = 2x-y.$$

Επομένως, η παραπάνω σχέση δίνει

$$(2x-y)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(x-y)^2$$

που είναι ανάλογη της σχέσης (3).

Από τη σχέση αυτή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν τα x, y είναι ρίζες μιας από τις εξισώσεις

$$y^2 = 2x^2 \pm 1,$$

τότε τα $x - y$ και $2x - y$ είναι ρίζες μιας από τις εξισώσεις

$$(2x - y)^2 = 2(x - y)^2 \mp 1$$

που είναι επίσης η πρόταση των Πυθαγορείων.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι οι προτάσεις 9 και 10 είναι ισοδύναμες με τη λύση Διοφαντικών εξισώσεων της μορφής

$$y^2 = 2x^2 \pm 1$$

και μπορούμε να αποδώσουμε τις προτάσεις αυτές στους Πυθαγορείους.

Οι προτάσεις 12 και 13 είναι και οι δύο ισοδύναμες με την πρόταση:

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ αντίστοιχα ισχύει η σχέση:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A$$

Βιβλίο ΙΙΙ

Το βιβλίο ΙΙΙ αναφέρεται στον κύκλο και στα στοιχεία του, στις σχέσεις ευθείας και κύκλου και στις σχέσεις που μπορούν να έχουν οι κύκλοι μεταξύ τους. Περιέχει 11 ορισμούς και 37 προτάσεις. Ενδιαφέρον

παρουσιάζει η πρόταση 16, στην οποία εισάγεται για πρώτη φορά η έννοια της *κερατοειδούς γωνίας*, δηλαδή μιας μεικτής γωνίας, που έχει τη μια πλευρά της ευθεία και τη δεύτερη τόξο κύκλου.

Βιβλίο IV

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από 7 ορισμούς και 16 προτάσεις, οι οποίες αναφέρονται στην εγγραφή και περιγραφή σε κύκλο ευθυγράμμων σχημάτων, καθώς και στην κατασκευή κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων ή περιγεγραμμένων σε κύκλο με πλευρές 3, 4, 5, 6 και 15 αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο (σελίδα 269.8-21), ο Ευκλείδης απέδειξε την πρόταση 16 του βιβλίου αυτού με σκοπό να τη χρησιμοποιήσει στην Αστρονομία. Κατά τον Πρόκλο, αν πάρουμε έναν κύκλο που περνά από τους πόλους και σ' αυτόν εγγράψουμε κανονικό δεκαπεντάγωνο (πρόταση 16), τότε θα γνωρίζουμε τις αποστάσεις των πόλων από τον Ισημερινό και από τους Ζωδιακούς κύκλους, αφού γνωρίζουμε ότι οι αποστάσεις μεταξύ Ισημερινού και Ζωδιακών κύκλων είναι ίση με την πλευρά κανονικού δεκαπενταγώνου.

Όταν ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές ($n \geq 3$) είναι κατασκευάσιμο, τότε με τη βοήθεια της πρότασης 30 του βιβλίου III μπορούμε να κατασκευάσουμε κανονικό πολύγωνο με $2n$, $4n$, $8n$ και γενικώς με $2^k \cdot n$ πλευρές με $k \in \mathbb{N}$.

Επίσης, αν ένα n -γωνο είναι κατασκευάσιμο ($n \geq 5$) και λ είναι ένας φυσικός αριθμός διαιρέτης του n , τότε με τη βοήθεια της πρότασης 10 του βιβλίου VI μπορούμε να κατασκευάσουμε κανονικό πολύγωνο με λ πλευρές, για κάθε φυσικό αριθμό λ , με $\lambda \geq 3$. Από την τελευταία αυτή σχέση και με τη βοήθεια της πρότασης

$$\text{αν } \alpha/\gamma \text{ και } \beta/\gamma \text{ και } (\alpha, \beta) = 1, \text{ τότε } \alpha\beta/\gamma,$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε κανονικά πολύγωνα με $\mu \cdot n$ πλευρές, όταν τα κανονικά πολύγωνα με μ και n πλευρές είναι κατασκευάσιμα και $(\mu, n) = 1$.

Στο βιβλίο αυτό έχουν κατασκευαστεί τα κανονικά n -γωνα με $n = 3, 4, 5, 6, 15$. Άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε και όλα τα κανονικά μ -γωνα με $\mu = 2^n, 3 \cdot 2^n, 5 \cdot 2^n, 3 \cdot 5 \cdot 2^n$.

Ο Heiberg στο έργο του "*Euclidis Opera Omnia*" (Σχόλια στο βιβλίο IV, σχόλιο 4 (τόμος V, σελ.273.13-15)), αποδίδει και τις 16 προτάσεις αυτού του βιβλίου στους Πυθαγορείους.

Βιβλίο V

Είναι το πιο σημαντικό και το περισσότερο χρησιμοποιημένο βιβλίο από όλα τα βιβλία των *Στοιχείων*. Περιέχει 18 ορισμούς και 25 προτάσεις.

Η ομορφιά και η αξία του βιβλίου αυτού βρίσκεται στους ορισμούς. Ο ορισμός 3 του λόγου δύο μεγεθών είναι πολύ ευφυής και δείχνει πόση δυσκολία υπάρχει να ορίσεις ένα λόγο, ενώ είναι εύκολο να τον κατανοήσεις.

Ο ορισμός 4 που λέει ότι *"Δύο μεγέθη λέγεται ότι έχουν λόγο μεταξύ τους, όταν πολλαπλασιαζόμενα κατάλληλα μπορούμε να πετύχουμε ώστε το ένα να υπερέχει του άλλου"* αποκλείει το απείρως μεγάλο και το απείρως μικρό και είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με εκείνο που είναι σήμερα γνωστό ως *αξίωμα του Αρχιμήδη*.

Επίσης, ο ορισμός 5 κατά τον οποίο *"Τέσσερα μεγέθη λέμε ότι έχουν τον ίδιο λόγο το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν ίσες φορές πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου σε σχέση με τα ίσες φορές πολλαπλάσια του δεύτερου και του τέταρτου, με οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό, είναι μεγαλύτερα ή ίσα ή μικρότερα όταν αυτά ληφθούν σε αντίστοιχη τάξη"*, έχει καταπλήξει τη μαθηματική σκέψη. Αυτός ο ορισμός είναι καταπληκτικός στη σύλληψή του και ισχύει για σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη.

Με σύγχρονο συμβολισμό ο ορισμός αυτός διατυπώνεται ως εξής:

"Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι τέσσερα μεγέθη, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αν και μόνο αν για

οποιονδήποτε φυσικούς αριθμούς μ και ν ισχύει μια από τις σχέσεις:

$\mu\alpha > \nu\beta$ και συγχρόνως $\mu\gamma > \nu\delta$

$\mu\alpha = \nu\beta$ και συγχρόνως $\mu\gamma = \nu\delta$

$\mu\alpha < \nu\beta$ και συγχρόνως $\mu\gamma < \nu\delta$ ".

Ο ορισμός αυτός είναι φανερό ότι είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε τέσσερα μεγέθη να έχουν τον ίδιο λόγο.

Ο De Morgan¹ εξηγεί τον ορισμό 5 ως εξής: *"Τέσσερα μεγέθη, A και B του ίδιου είδους και C και D του ίδιου ή άλλου είδους, λέγεται ότι έχουν τον ίδιο λόγο, όταν όλα τα πολλαπλάσια του A μπορούν να κατανέμονται μεταξύ των πολλαπλασίων του B με το ίδιο διάστημα, όπως τα αντίστοιχα πολλαπλάσια του C μεταξύ αυτών του D"*.

Δηλαδή, αν μ και ν είναι φυσικοί αριθμοί και αν $\mu \cdot A$ βρίσκεται μεταξύ νB και $(\nu+1)B$, τότε το $\mu \cdot C$ βρίσκεται μεταξύ νD και $(\nu+1)D$.

¹ A. De Morgan, "Proportion", The Penny Cyclopaedia XIX, p.51

Ο K. Weierstrass¹ χρησιμοποίησε αυτόν τον ορισμό για να ορίσει την ισότητα μεταξύ αριθμών.

Ο Heath² έδειξε πως ο ορισμός αυτός οδηγεί στο διαμερισμό των αριθμών σε κλάσεις, που είναι ίδιες με τις τομές Dedekind.

Ακολουθούν πολλοί ακόμα ορισμοί, οι οποίοι αναφέρονται στα διάφορα είδη αναλογιών και στις ιδιότητές τους.

Οι 25 προτάσεις που ακολουθούν είναι όλες εφαρμογή των ορισμών σε συγκεκριμένα αντικείμενα.

Ο Barrow³ αναφερόμενος στο βιβλίο V των *Στοιχείων* λέει ότι δεν υπάρχει πιο ευφυής ανακάλυψη. Τίποτα πιο σταθερό, πιο ακριβές και πιο καταπληκτικό δεν έχει μέχρι τώρα παρουσιαστεί από τη θεωρία των αναλογιών που υπάρχει στο βιβλίο V των *Στοιχείων*.

Ο Cayley λέει ότι *"πολύ δύσκολα θα βρεθεί κάτι στα Μαθηματικά πιο όμορφο από αυτό το γοητευτικό 5^ο βιβλίο των Στοιχείων"*.

Σύμφωνα με έναν ανώνυμο σχολιαστή του βιβλίου V, μερικοί λένε ότι το βιβλίο αυτό είναι έργο του ίδιου του Ευκλείδη⁴. Αλλά άλλος ανώνυμος επίσης σχολιαστής λέει ότι το βιβλίο έπρεπε να αποδοθεί στον Εύδοξο⁵ και προσθέτει ότι η απόδοση του έργου στον Ευκλείδη δεν είναι λάθος, με την έννοια ότι η τακτοποίηση των προτάσεων και η ιεράρχησή τους αναγνωρίζεται από όλους ότι είναι δουλειά του Ευκλείδη.

Βιβλίο VI

Το περιεχόμενο αυτού του βιβλίου είναι επίσης πολύ σημαντικό. Περιέχει 5 ορισμούς και 33 προτάσεις. Μερικές από τις προτάσεις αυτές είναι αναγκαίες για τη μελέτη των ασύμμετρων αριθμών που εξετάζονται στο βιβλίο X. Μερικές από τις προτάσεις, και κυρίως οι προτάσεις 27-29, έχουν μεγάλη σημασία, γιατί αποτελούν τη βάση για τη μελέτη των κωνικών τομών. Η πρόταση 1 και η πρόταση 33 δείχνουν το πόσο σημαντικός είναι ο ορισμός 5 του βιβλίου V, αφού στην πρόταση 1 *"τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που έχουν ίσα ύψη έχουν λόγο εμβαδών ίσο με το λόγο των βάσεων"*, γίνεται λόγος για την ισότητα του λόγου των εμβαδών με λόγο μηκών

¹ H. G. Zeuthen, *"Lehre von den Kegelschnitten im Altertum"*, σελ.2

² T. L. Heath, *"The Thirteen Books of Euclid's Elements"*, I, 124-126.

³ Isaac Barrow, *"Lectiones habitae in scholiis publicis academia cantabrigiensis"*. Cambridge (1684), σελ.336.

⁴ J. L. Heiberg and H. Menge, *"Euclidis Opera Omnia"*, σχόλιο 1 στο βιβλίο V, σελίδα 280.7-9.

⁵ J. L. Heiberg and H. Menge ό.π., σχόλιο 3 στο βιβλίο V, σελίδα 282.13-20.

(βάσεων), που χωρίς τον ορισμό δε θα είχε έννοια. Επίσης στην πρόταση 33, "σε ίσους κύκλους οι επίκεντρες ή οι εγγεγραμμένες γωνίες είναι όπως τα αντίστοιχα τόξα στα οποία βαίνουν", γίνεται λόγος για την ισότητα του λόγου γωνιών με το λόγο των αντίστοιχων τόξων.

Στην πρόταση 27 περιέχεται για πρώτη φορά στην ιστορία των Μαθηματικών η έννοια του **μέγιστου**. Στη σύγχρονη γραφή η πρόταση αυτή είναι ισοδύναμη με την πρόταση:

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του γινομένου $x(\alpha-x)$.

Επειδή $x + \alpha - x = \alpha$ σταθερό, το γινόμενο γίνεται μέγιστο όταν

$$x = \alpha - x \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2}\alpha.$$

Η πρόταση 31,

"στα ορθογώνια τρίγωνα, το πολύγωνο που γράφεται με πλευρά την υποτείνουσα, έχει εμβαδόν ίσο προς το άθροισμα των εμβαδών των πολυγώνων που γράφονται πάνω στις κάθετες πλευρές του τριγώνου και είναι όμοια και ομοίως κείμενα με το πολύγωνο που γράφεται πάνω στην υποτείνουσα", είναι μια θαυμάσια γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο¹, το Πυθαγόρειο θεώρημα το ανακάλυψαν οι Πυθαγόρειοι, αλλά ο Ευκλείδης έδωσε μια **γενική και ξεκάθαρη απόδειξη**, διατύπωσε το αντίστροφο θεώρημα και τα γενικευμένα θεωρήματα του Πυθαγορείου θεωρήματος και έδωσε μια νέα απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Ο Ευκλείδης θα μπορούσε να αποδείξει εύκολα το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας την πρόταση 8. Όμως προτίμησε να το αποδείξει με στοιχεία του βιβλίου Ι, χωρίς να εμπλέξει στην απόδειξη αναλογίες και ομοιότητες ευθυγράμμων σχημάτων.

Βιβλίο VII

Το βιβλίο VII αρχίζει με 23 ορισμούς και συνεχίζει με τη διατύπωση και απόδειξη 39 προτάσεων. Εδώ αναπτύσσεται η θεωρία των αναλογιών με αριθμούς, η οποία συνεχίζεται και στα επόμενα αριθμητικά βιβλία. Η θεωρία των αναλογιών που παρουσιάστηκε στο βιβλίο V, εφαρμόζεται σε γεωμετρικά μεγέθη στο βιβλίο VI, και σε αριθμούς στο βιβλίο VII. Ο ορισμός 21, "τέσσερις αριθμοί αποτελούν αναλογία όταν ο πρώτος είναι το ίδιο πολλαπλάσιο ή το ίδιο μέρος ή τα ίδια μέρη του δεύτερου, όπως είναι ο τρίτος του τετάρτου" φαίνεται να έχει εφαρμογή μόνο για σύμμετρα μεγέθη και επομένως δεν εφαρμό-

¹ Πρόκλος, "Σχόλια πάνω στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων", σελ. 426.

ζεται η γενική θεωρία των αναλογιών όπως αυτή αναπτύχθηκε στο βιβλίο V. Όμως αυτό δεν ισχύει, γιατί ο ορισμός 21 σε συνδυασμό και με την πρόταση 19 είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 5 του βιβλίου V, όταν εφαρμόζεται σε αριθμούς. Επομένως και στα αριθμητικά βιβλία των *Στοιχείων* μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλες οι προτάσεις του βιβλίου V χωρίς ιδιαίτερο πρόβλημα.

Η πρόταση 1 είναι πολύ σημαντική και είναι σήμερα γνωστή και ως *ο αλγόριθμος του Ευκλείδη*. Συνεχίζεται με τις προτάσεις 2 και 3, που αναφέρονται στην εύρεση του Μ.Κ.Δ. δύο ή τριών αριθμών αντίστοιχα. Οι επόμενες προτάσεις 4 μέχρι και 20 αποτελούν την αριθμητική θεωρία των προτάσεων του βιβλίου αυτού. Μια επόμενη ομάδα προτάσεων (21 μέχρι 32) αναφέρονται στους πρώτους αριθμούς και στους πρώτους προς αλλήλους, καθώς και στις ιδιότητες των αριθμών αυτών. Η τελευταία πρόταση αυτής της ομάδας μας λέει ότι *"κάθε αριθμός ή είναι πρώτος ή είναι γινόμενο πρώτου"*, που είναι θεμελιώδης πρότασης της θεωρίας αριθμών. Οι υπόλοιπες προτάσεις (33 μέχρι 39) αναφέρονται στην θεωρία των πολλαπλασίων, των κοινών πολλαπλασίων, στην εύρεση του Ε.Κ.Π. δύο αριθμών (πρόταση 34) και στην εύρεση του Ε.Κ.Π. τριών αριθμών (πρόταση 36).

Οι ορισμοί του βιβλίου αυτού είναι οι μόνοι ορισμοί που υπάρχουν στα βιβλία VII, VIII και IX. Ο τελευταίος ορισμός εισάγει για πρώτη φορά την έννοια του **τέλειου αριθμού**:

"Τέλειος αριθμός είναι ο αριθμός που είναι ίσος προς τα μέρη του".

Δηλαδή, αν ένας αριθμός α ισούται με το άθροισμα όλων των δυνατών διαιρετών του (εκτός από τον εαυτό του), τότε είναι τέλειος. Π.χ. ο αριθμός 6 είναι τέλειος γιατί $1 + 2 + 3 = 6$. Επίσης ο αριθμός 28 είναι τέλειος, γιατί $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Η εύρεση τέλειων αριθμών εξετάζεται στην πρόταση 36 του βιβλίου IX.

Βιβλίο VIII

Το βιβλίο VIII περιέχει 27 προτάσεις και αναφέρεται σε σειρές αριθμών, συνεχείς αναλογίες και στη Γεωμετρία των αριθμών. Αρκετές προτάσεις αναφέρονται σε γεωμετρικές προόδους και στον γεωμετρικό μέσο αριθμών. Οι προτάσεις 1 και 3 είναι αντίστροφες. Στην πρόταση 1 αποδεικνύεται ότι *"αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος και ο τελευταίος όρος της είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε ο αριθμός των όρων της προόδου είναι ο ελάχιστος δυνατός που μπορούν να σχηματίσουν την πρόοδο"*. Ενώ στην πρόταση 3 αποδεικνύεται το αντίστροφο.

Αρκετές από τις προτάσεις αυτές ανήκουν σε μαθηματικούς προγενέστερους του Ευκλείδη. Μερικές προτάσεις, όπως οι προτάσεις 11, 12, 26 και 27 αναφέρονται στον πλατωνικό διάλογο *"Τίμαιο"*. Επίσης, οι προτάσεις 8, 9 και 10 πρέπει να ήταν γνωστές στην Ακαδημία του Πλάτωνα.

Βιβλίο ΙΧ

Το βιβλίο ΙΧ περιέχει 36 προτάσεις. Οι πρώτες προτάσεις αυτού του βιβλίου είναι πολύ απλές και αναφέρονται στις συνεχείς αναλογίες. Δηλαδή σε αριθμούς που βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο. Όπως φαίνεται και στο βιβλίο αυτό, όπως και στο βιβλίο VIII, κεντρικό θέμα είναι οι συνεχείς αναλογίες. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο όρος *"συνεχής αναλογία"* δεν ορίζεται σε κανένα σημείο των *Στοιχείων*.

Στο βιβλίο αυτό υπάρχουν και εξαιρετικά σημαντικές προτάσεις. Όπως για παράδειγμα η πρόταση 14, δηλαδή η πρόταση *"αν ελάχιστος αριθμός μετριέται από πρώτους αριθμούς, τότε δε θα μετριέται από κανέναν άλλο πρώτο αριθμό, εκτός από τους αρχικούς"*. Η πρόταση αυτή είναι το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής, κατά το οποίο κάθε αριθμός τρέπεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων κατά μοναδικό τρόπο, εκτός βέβαια από την αντιμετάθεση των παραγόντων. Η πρόταση 20 ότι *"οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από κάθε πλήθος πρώτων αριθμών"*, δηλαδή ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος, είναι μια από τις βασικότερες προτάσεις της θεωρίας αριθμών. Για την απόδειξη της πρότασης αυτής ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη μέθοδο της *εις άτοπον απαγωγής* αλλά και τη μέθοδο της *τέλειας επαγωγής*. Επίσης, στην απόδειξη των προτάσεων 8 και 9 γίνεται χρήση της μεθόδου της *τέλειας επαγωγής*. Οι προτάσεις 21 μέχρι 34 αναφέρονται στους άρτιους και περιττούς αριθμούς, τις ιδιότητες τους και τις σχέσεις που έχουν μεταξύ τους. Οι προτάσεις 18 και 19 είναι, ουσιαστικά, κριτήρια ύπαρξης της τρίτης και της τέταρτης αναλόγου αντίστοιχα.

Η πρόταση 35 στην ουσία μας δίνει το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου. Με σύγχρονη ορολογία η πρόταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

"Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο, ο λόγος της διαφοράς του πρώτου από το δεύτερο προς τον πρώτο, είναι ίσος με το λόγο της διαφοράς του πρώτου από τον τελευταίο προς το άθροισμα όλων των όρων της προόδου πλην του τελευταίου".

Δηλαδή, αν

$$a, a\omega, a\omega^2, \dots, a\omega^n$$

είναι οι όροι της προόδου, τότε σύμφωνα με την πρόταση αυτή, θα έχουμε:

$$\frac{\alpha\omega - \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha\omega^v - \alpha}{\Sigma_v}, \quad \text{όπου} \quad \Sigma_v = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ο γνωστός τύπος του αθροίσματος Σ_v των v πρώτων όρων της προόδου, αφού

$$\Sigma_v = \frac{\alpha \cdot (\alpha\omega^v - \alpha)}{\alpha\omega - \alpha} = \frac{\alpha\omega^v - \alpha}{\omega - 1}.$$

Η πρόταση 36 είναι επίσης αρκετά σημαντική, αφού αποδεικνύει έναν τύπο που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τέλειους αριθμούς. Η πρόταση αυτή με σύγχρονη ορολογία διατυπώνεται ως εξής:

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο τη μονάδα και λόγο 2 πάρουμε οσοσδήποτε όρους, έως ότου το άθροισμα όλων δίνει αριθμό πρώτο, τότε το άθροισμα αυτό αν πολλαπλασιασθεί με τον τελευταίο όρο της προόδου δίνει γινόμενο τέλειο αριθμό.

Δηλαδή, αν πάρουμε την πρόοδο

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{v-1}$$

και το άθροισμα

$$\Sigma_v = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{v-1} = 2^v - 1$$

είναι αριθμός πρώτος, τότε ο αριθμός

$$\tau_v = 2^{v-1} \cdot (2^v - 1)$$

είναι αριθμός τέλειος.

Με τη χρησιμοποίηση του τύπου αυτού και για διάφορες τιμές του v μπορούμε να βρούμε τέλειους αριθμούς. Π.χ.

- ♦ Με $v = 2$, ο $2^2 - 1 = 3$ είναι πρώτος. Άρα ο $2 \cdot 3 = 6$ είναι τέλειος.
- ♦ Με $v = 3$, ο $2^3 - 1 = 7$ είναι πρώτος.
Επομένως ο $2^2 \cdot (2^3 - 1) = 28$ είναι τέλειος.
- ♦ Με $v = 5$, ο $2^5 - 1 = 31$ είναι πρώτος.
Επομένως ο $2^4 \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$ είναι τέλειος.
- ♦ Με $v = 13$, ο $2^{13} - 1 = 8191$ είναι αριθμός πρώτος. Επομένως ο αριθμός $2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 4096 \cdot 8191 = 33 \cdot 550 \cdot 336$ είναι τέλειος.

Ο Euler απέδειξε ότι ο τύπος αυτός του Ευκλείδη δίνει μόνο άρτιους τέλειους αριθμούς και οι περιττοί, αν τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν, δίνονται από τον τύπο:

$$p^{4v+1} \cdot x^2,$$

όπου $p = 4\lambda + 1$ και x περιττός μη διαιρούμενος δια του p .

Μέχρι σήμερα όμως δεν έχει βρεθεί κανένας περιττός τέλειος αριθμός.

Βιβλίο X

Το βιβλίο αυτό είναι το εκτενέστερο βιβλίο των *Στοιχείων* και περιέχει 115 προτάσεις που αναφέρονται στα ασύμμετρα μεγέθη. Η πρόταση 1, *"όταν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί τμήμα μεγαλύτερο από το μισό του και από αυτό που μένει αφαιρεθεί τμήμα μεγαλύτερο από το μισό του και αυτό γίνεται συνεχώς και αδιαλείπτως, θα μείνει ένα μέγεθος μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους"*, είναι ουσιαστικά η **μέθοδος της εξάντλησης**, όπως χρησιμοποιήθηκε αργότερα από τον Ευκλείδη στο βιβλίο XII. Η πρόταση αυτή είναι πάρα πολύ σημαντική για τους άρρητους αριθμούς, γιατί ουσιαστικά εισάγει την έννοια του ορίου ακολουθίας από μια πρώιμη χρονική στιγμή και δίνει τη δυνατότητα να βρεθούν προσεγγιστικές ρητές τιμές κάθε άρρητου αριθμού.

Πραγματικά, αν α και ε είναι τα δεδομένα μεγέθη με $\varepsilon < \alpha$, τότε αν συμβολίσουμε με

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$$

τα μεγέθη που κάθε φορά αφαιρούμε κατά την παραπάνω διαδικασία και

$$\Sigma_k = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k \quad \text{με} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

τότε:

Μετά την πρώτη αφαίρεση θα έχει αφαιρεθεί η ποσότητα $\Sigma_1 = \sigma_1$. Μετά τη δεύτερη αφαίρεση θα έχει αφαιρεθεί συνολικά η ποσότητα $\Sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_2$ και γενικά, μετά τη νιοστή αφαίρεση θα έχει αφαιρεθεί συνολικά η ποσότητα $\Sigma_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$.

Σύμφωνα με την πρόταση 1, θα υπάρχει κάποιο n τέτοιο, ώστε η διαφορά $\alpha - \Sigma_n$ να είναι μικρότερη από το ε , για οποιοδήποτε ε οσοδήποτε μικρό. Αυτό σημαίνει ότι με σημερινή ορολογία και συμβολισμό η πρόταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, θα υπάρχει ένας δείκτης n_0 , ο οποίος θα εξαρτάται από το ε και τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$|\Sigma_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n > n_0.$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \alpha.$$

Η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται συστηματικά στο βιβλίο XII για τον υπολογισμό των εμβαδών και των όγκων. Επίσης χρησιμοποιείται συστηματικά από τον Αρχιμήδη. Ο Αρχιμήδης στην εισαγωγή του έργου του *"Περί σφαίρας και κυλίνδρου"* αναφέρει ότι η πρόταση αυτή οφείλεται στον Εύδοξο.

Η πρόταση 2, *"αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο, το υπόλοιπο που κάθε φορά μένει δεν καταμετρά το προηγούμενό του, τότε τα μεγέθη είναι ασύμμετρα"*, ουσιαστικά καθορίζει πότε δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Οι προτάσεις 3 και 4 αναφέρονται στην εύρεση του Μ.Κ.Δ. δύο και τριών αριθμών αντίστοιχα.

Κατά τον Ευκλείδη, η έννοια του σύμμετρου μεγέθους είναι ευρύτερη από τη σημερινή. Ο Ευκλείδης παίρνει μια ευθεία, έστω ε , την οποία θεωρεί ρητή. Τότε κάθε ευθεία που έχει κοινό μέτρο με την ε θεωρείται ρητή, αλλά και κάθε ευθεία που το τετράγωνό της έχει κοινό μέτρο με την ε θεωρείται επίσης ρητή. Δηλαδή κατά τον Ευκλείδη, αν μια ευθεία δεν είναι ρητή, αλλά το τετράγωνό της είναι ρητό, θεωρείται και αυτή ρητή. Όλες οι ευθείες που δεν είναι ρητές ούτε ως προς το μήκος τους, ούτε ως προς το τετράγωνό τους τις ονομάζει *άρρητες*.

Η πρόταση 9 λέει ότι *"οι πλευρές τετραγώνου είναι σύμμετρα ή ασύμμετρα μεγέθη σε μήκος, αν και μόνο αν τα τετράγωνα έχουν ή δεν έχουν λόγο τετράγωνο αριθμό"*. Δηλαδή,

αν α και β είναι οι πλευρές τετραγώνων και μ, ν δύο αριθμοί, τότε:

$$\alpha : \beta = \mu : \nu \Leftrightarrow \alpha^2 : \beta^2 = \mu^2 : \nu^2$$

Η πρόταση αυτή αποδίδεται στο Θεαίτητο¹. Ο Θεαίτητος είχε επιδείξει μεγάλο ενδιαφέρον για τους ασύμμετρους αριθμούς και αυτό προκύπτει από το γνωστό διάλογο του Πλάτωνα, *"Θεαίτητος"* (1470 ff). Επίσης, ένα σχόλιο πάνω στο βιβλίο X που έχει διασωθεί στα Αραβικά και αποδίδεται από τον Heiberg στον Πάππο, αναφέρει ότι ο Θεαίτητος είχε ανακαλύψει και διάφορα είδη ασύμμετρων μεγεθών, που είναι γνωστά ως *διώνυμα* και *αποτομή*.²

Είναι γεγονός ότι αρκετές από τις προτάσεις των αριθμητικών βιβλίων των *Στοιχείων*, καθώς και του βιβλίου X, οφείλονται σε μαθηματι-

¹ J. L. Heiberg and H. Menge, *"Euclidis Opera Omnia"*, τόμος V, σχόλιο 62 στο X βιβλίο των *Στοιχείων*.

² W. Thomson, *"Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements"*. Αραβικό κείμενο με μετάφραση, σημειώσεις, παρατηρήσει και λεξιλόγιο από τους G. Junge and W. Thomson. Cambridge, Mass (1930), επανεκτύπωση 1968.

κούς που έζησαν πριν τον Ευκλείδη και κυρίως στον Εύδοξο, το Θεαίτητο και τους μαθηματικούς της Ακαδημίας του Πλάτωνα. Οι βασικές ανακαλύψεις για τους ασύμμετρους κυρίως αριθμούς έγιναν αυτή την εποχή. Όμως η τακτοποίηση αυτών των προτάσεων, η συμπλήρωσή τους, η τελειοποίησή τους και η ιεράρχησή τους έγιναν από τον Ευκλείδη. Ένα σχόλιο, το οποίο ο Heath αποδίδει στον Πάππο, λέει τα εξής.¹

"Ο Ευκλείδης καθόρισε αυστηρούς κανόνες γύρω από τα σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη γενικά. Έδωσε συγκεκριμένους ορισμούς και διέκρινε μεταξύ τους τα ρητά από τα άρρητα μεγέθη. Έθεσε και ένα μεγάλο αριθμό κανόνων για τα ασύμμετρα μεγέθη και τελικά έδειξε καθαρά τη σημασία τους και την όλη επέκτασή τους".

Βιβλίο ΧΙ

Τα τρία τελευταία βιβλία, τα βιβλία XI, XII και XIII, αποτελούν τη Στερεομετρία των *Στοιχείων*. Αποτελούνται από προτάσεις που αναφέρονται στη Γεωμετρία του χώρου και υπάρχουν και ελάχιστες που αναφέρονται στην Επιπεδομετρία.

Το βιβλίο XI περιέχει 28 ορισμούς και 39 προτάσεις. Είναι το μόνο από τα τρία βιβλία που περιέχει ορισμούς, οι οποίοι χρησιμοποιούνται και για τα βιβλία XII και XIII. Οι ορισμοί αναφέρονται στις γωνίες του χώρου, στην παραλληλία στο χώρο, καθώς και στα βασικά στερεά σώματα, τα πολύεδρα, τον κύλινδρο, τον κώνο και τη σφαίρα. Οι προτάσεις του βιβλίου αυτού εξετάζουν τις σχέσεις ευθείας και επιπέδου, καθώς και τις σχέσεις επιπέδων μεταξύ τους. Επίσης, τις ιδιότητες των στερεών γεωμετρικών σχημάτων και τις σχέσεις παραλληλεπιπέδων και πρίσματος. Το βιβλίο αυτό έχει πολλές ομοιότητες με το βιβλίο I των *Στοιχείων*. Π.χ. οι προτάσεις 1 μέχρι 5 του βιβλίου I αποτελούν τις βασικές προτάσεις, τα θεμέλια της Επιπεδομετρίας. Επίσης, οι προτάσεις 1 - 5 του βιβλίου XI αποτελούν τα θεμέλια της Στερεομετρίας. Οι προτάσεις 11 και 12 του βιβλίου I αναφέρονται στη χάραξη καθέτου σε δοθείσα ευθεία. Και οι προτάσεις 11 και 12 του βιβλίου XI αναφέρονται στην κατασκευή καθέτου σε επίπεδο. Η πρόταση 20 του βιβλίου I αναφέρεται στην τριγωνική ανισότητα επίπεδων γωνιών και η πρόταση 20 του βιβλίου XI αναφέρεται στην τριγωνική ανισότητα για τις γωνίες της κορυφής κλπ.

¹ T. L. Heath, *"The Thirteen Books of Euclid's Elements"*, τόμος III.

Βιβλίο XII

Το βιβλίο XII περιλαμβάνει 18 προτάσεις, οι οποίες αναφέρονται κυρίως στις σχέσεις των στερεών γεωμετρικών σχημάτων. Υπάρχουν και κάποιες προτάσεις της Επιπεδομετρίας, όπως π.χ. οι προτάσεις 1 και 2 οι οποίες αναφέρονται στο εμβαδόν κυκλικού δίσκου. Οι προτάσεις της Στερεομετρίας μελετούν την επιφάνεια και τον όγκο στερεών σχημάτων χωρίς να δίνουν κάποια συγκεκριμένη αριθμητική μέτρηση. Στις αποδείξεις των προτάσεων γίνεται συχνά χρήση της μεθόδου της εξάντλησης (πρόταση 1 του βιβλίου X). Χρησιμοποιείται, για παράδειγμα, η μέθοδος της εξάντλησης στην απόδειξη των προτάσεων:

"Δύο κύκλοι είναι ανάλογοι των διαμέτρων τους",

"Πυραμίδες με τριγωνικές βάσεις και το ίδιο ύψος είναι ανάλογες των βάσεών τους",

"Ο όγκος του κώνου είναι το ένα τρίτο του όγκου του κυλίνδρου με τον οποίον έχει την ίδια βάση και ίσα ύψη",

"Κώνος και κύλινδρος που έχουν ίσα ύψη έχουν λόγο ίσο με το τριπλάσιο λόγο των βάσεών τους".

Θα πρέπει να επισημανθεί εδώ ότι ο Ευκλείδης όταν αναφέρεται σε λόγο στερεών, εννοεί το λόγο των όγκων αυτών των στερεών.

Βιβλίο XIII

Το βιβλίο XIII περιέχει 18 προτάσεις. Στις πρώτες προτάσεις γίνεται εγγραφή σε κύκλο των κανονικών πολυγώνων που δεν είχαν ολοκληρωθεί στο βιβλίο IV. Οι υπόλοιπες προτάσεις ασχολούνται με την εγγραφή σε σφαίρα κανονικών πολυέδρων. Στις προτάσεις 13, 14, 15, 16 και 17 γίνεται η εγγραφή σε σφαίρα των κανονικών στερεών, πυραμίδας, οκταέδρου, κύβου, εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου αντίστοιχα. Τα πέντε αυτά κανονικά στερεά είχαν γίνει αντικείμενο έρευνας από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς πριν από τον Ευκλείδη. Ο Πλάτων κάνει χρήση αυτών των στερεών στο διάλογο *"Τίμαιος"*, γι' αυτό τα συγκεκριμένα στερεά είναι γνωστά ως **πλατωνικά στερεά**.

Το κεντρικό μαθηματικό πρόβλημα στις προτάσεις αυτές είναι να υπολογιστεί η πλευρά κάθε κανονικού στερεού σε συνάρτηση με την ακτίνα της σφαίρας μέσα στην οποία έχει εγγραφεί. Ο Ευκλείδης υπολόγισε την πλευρά της πυραμίδας, του κύβου και του οκταέδρου, συναρτήσεως της ακτίνας της σφαίρας. Για το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο έδειξε ότι οι πλευρές τους είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Στην πρόταση 18 ο Ευκλείδης τοποθετεί τις πλευρές των πέντε κανονικών στερεών στο ίδιο σχήμα, κάνει σύγκριση μεταξύ των πλευρών

αυτών και τελικά αποδεικνύει ότι δεν υπάρχουν άλλα κανονικά στερεά που να μπορούν να εγγραφούν σε σφαίρα.

Σύμφωνα με ένα σχόλιο¹ ανώνυμου σχολιαστή, ο Θεαίτητος ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε ή παρουσίασε τα παραπάνω πέντε κανονικά στερεά. Ειδικά οι προτάσεις 14 και 16 οφείλονται στο Θεαίτητο.

4. Τα άλλα έργα του Ευκλείδη

4.1. Γενικά

Εκτός από τα *Στοιχεία* ο Ευκλείδης έχει γράψει και άλλα σημαντικά έργα, από τα οποία, δυστυχώς, σώζονται ελάχιστα. Πολλές πληροφορίες και αναφορές στα έργα αυτά του Ευκλείδη έχουμε από πολλούς αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, σχολιαστές, μεταφραστές και εκδότες των αρχαίων ελληνικών έργων. Οι περισσότερες πληροφορίες προέρχονται από τον Πάππο και τον Πρόκλο. Στο αραβικό λεξικό *Fihrist* παρουσιάζεται μία λίστα με τα ονόματα μαθηματικών και φιλοσόφων. Εκεί στο όνομα του Ευκλείδη αναφέρονται ως έργα του τα εξής (λατινική μετάφραση H. Suter²): "*Φαινόμενα*", "*Δεδομένα*", "*Στοιχεία Μουσικής*" (αυτό αναφέρεται ως "*Βιβλίο των τόνων*"), "*Περί διαιρέσεων*", "*Πορίσματα*", "*Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων*" και "*Βιβλίο Κανόνων*".

Κάποια από τα έργα του Ευκλείδη περιέχονται (ολόκληρα ή απόσπασματά τους σε έργα άλλων αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, σε αραβικές μεταφράσεις που ανακαλύφθηκαν αργότερα, σε ελληνικά χειρόγραφα (γνωστούς κώδικες), σε πρώιμες εκδόσεις των *Στοιχείων*, καθώς και σε νεότερες εκδόσεις και μελέτες. Π.χ. τα έργα "*Δεδομένα*", "*Πορίσματα*" και "*Τόποι προς Επιφάνειες*" περιλαμβάνονται σε μια συλλογή μαθηματικών έργων του Πάππου, που είναι γνωστή ως "*Θησαυρός της Ανάλυσης*". Τα "*Δεδομένα*" και τα σχόλια του Μαρίνου πάνω στο έργο αυτό υπάρχουν στο Βατικανό ελληνικό κώδικα 190. Τα "*Οπτικά*" και τα "*Φαινόμενα*" βρέθηκαν σε χειρόγραφα του 10^{ου} αιώνα στη Λαυρεντιανή Βιβλιοθήκη της Φλωρεντίας (Ms³ XXVIII, 3 και Ms Philos. Gr. N° 103). Το "*Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων*" περιέχεται σε λατινική μετά-

¹ J. L. Heiberg and H. Menge, "*Euclidis Opera Omnia*", τόμος V, σχόλιο 1 στο βιβλίο XIII, σελίδα 654.5-6.

² H. Suter, "*Das Mathematiker – Verzeichniss im Fihrist in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*", vi, 1892, σελ. 1-87 (κυρίως σελ. 17).

³ Ms = manuscript, δηλαδή χειρόγραφο.

φραση στην έκδοση της Βασιλείας του 1537, καθώς και στο έργο του Gregory το 1703 (βλέπε παράγραφο 5). Τα "*Δεδομένα*" περιέχονται και σε χειρόγραφο του 11^{ου} αιώνα, που αποτελείται από δύο τόμους και βρίσκεται στη Δημόσια Βιβλιοθήκη της Μπολόνια με αριθμό 18-19.

Στο έργο των Heiberg και Menge "*Euclidis Opera Omnia*" υπάρχουν και αναλύονται τα έργα "*Δεδομένα*", "*Φαινόμενα*", "*Στοιχεία Μουσικής*", "*Οπτικά*" και "*Κατοπτρικά*" (βλέπε και παράγραφο 5). Επίσης, αρκετά από τα άλλα έργα του Ευκλείδη παρουσιάζονται, έστω και συνοπτικά, από τον T. L. Heath στο έργο του "*Euclid: The Thirteen Books of the Elements*" (σελίδες 7-28).

Τα έργα που αποδίδονται στον Ευκλείδη είναι:

1. "*Δεδομένα*",
2. "*Φαινόμενα*" ή "*Σφαιρικά*"
3. "*Οπτικά*"
4. "*Κατοπτρικά*"
5. "*Στοιχεία Μουσικής*"
6. "*Βιβλίο περί διαιρέσεων*".
7. "*Πορίσματα*"
8. "*Κωνικά*"
9. "*Τόποι προς επιφάνειες*"
10. "*Ψευδάρια*"
11. "*Μηχανική*"
12. "*Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων*"

Θα αναφερθούμε περιληπτικά σε καθένα από αυτά.

4.2. Το έργο "*Δεδομένα*"

Όπως ήδη αναφέραμε, το έργο αυτό, καθώς και τα σχόλια του Μαρίνου της Νάπολης (μαθητή και βιογράφου του Πρόκλου) πάνω σ' αυτό, περιέχονται στο Βατικανό ελληνικό κώδικα 190, και αποτελούν τον τόμο VI του έργου "*Euclidis Opera Omnia*", που εκδόθηκε από τον H. Menge¹ το 1896. Επίσης, τα "*Δεδομένα*" περιέχονται και στο χειρόγραφο 18-19 της Δημόσιας Βιβλιοθήκης της Μπολόνια.

¹ J. L. Heiberg and H. Menge "*Euclidi's Opera Omnia*", Leipzig τόμος VI (1896), σελ.254.

Είναι το μοναδικό εκτός των *Στοιχείων* έργο του Ευκλείδη το οποίο σώζεται ολόκληρο στα Ελληνικά. Περιέχει 15 ορισμούς και 94 προτάσεις.

Οι ορισμοί αναφέρονται στους διάφορους τρόπους με τους οποίους κάποιος αντιλαμβάνεται κάποια πράγματα ως δεδομένα. Π.χ. οι επιφάνειες, οι ευθείες, οι γωνίες και οι λόγοι θεωρούνται ότι είναι "δεδομένα" ως προς το μέγεθος, όταν μπορούμε να τα συγκρίνουμε ως προς άλλα μεγέθη. Τα ευθύγραμμα σχήματα λέγεται ότι είναι "δεδομένα" στο χώρο ή "δεδομένα" στη μορφή, όταν οι γωνίες και οι λόγοι των πλευρών τους είναι δεδομένα¹. Σημεία, γραμμές και γωνίες είναι "δεδομένα ως προς τη θέση", όταν κατέχουν σταθερή θέση κλπ. Στα σχόλιά του ο Μαρίνος αναφέρεται στους διάφορους τρόπους με τους οποίους ο όρος "δεδομένα" γίνεται αντιληπτός από τους διάφορους Έλληνες γεωμέτρους.

Στα "*Δεδομένα*" βρίσκουμε στοιχεία που μπορούν να θεωρηθούν εφαρμογές στα βιβλία I μέχρι VI των *Στοιχείων*.

Οι 94 προτάσεις που ακολουθούν αναφέρονται σε διάφορα θέματα και βασίζονται στην ιδέα ότι "*αν ορισμένα στοιχεία ενός σχήματος είναι δεδομένα, τότε να δείχθει ότι άλλα στοιχεία του ίδιου σχήματος είναι δεδομένα*". Π.χ.

Η πρόταση 4 λέει: *Αν από δεδομένο μέγεθος αφαιρεθεί δεδομένο μέγεθος, τότε αυτό που μένει είναι δεδομένο μέγεθος.*

Η πρόταση 22 λέει: *Αν δυο μεγέθη έχουν δεδομένο λόγο προς τρίτο μέγεθος, τότε και το άθροισμά τους έχει δεδομένο λόγο ως προς το τρίτο μέγεθος.*

Η πρόταση 84 λέει: *Αν δυο ευθείες γραμμές περιέχουν μια δεδομένη επιφάνεια σε μια δεδομένη γωνία και αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά δεδομένη ποσότητα, τότε κάθε μία από τις γραμμές αυτές είναι δεδομένη.*

Η πρόταση αυτή, όπως είναι φανερό οδηγεί στη λύση συστήματος δευτέρου βαθμού. Αν x, y είναι οι γραμμές, α και β^2 η δεδομένη διαφορά και η επιφάνεια αντίστοιχα, τότε θα έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$x - y = \alpha$$

$$x \cdot y = \beta^2$$

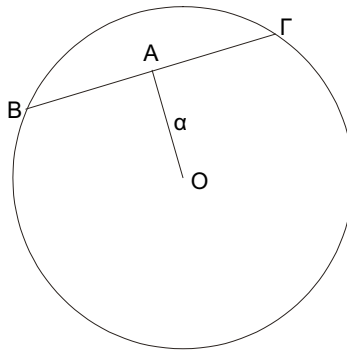
Η πρόταση 85 είναι ίδια με την πρόταση 84, μόνο που θεωρεί ως δεδομένο το άθροισμα των γραμμών και όχι τη διαφορά τους. Η πρόταση αυτή οδηγεί στη λύση συστήματος της μορφής

¹ *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's sons, New York, 1975, vol. IV, σελ.425.

$$\begin{aligned}x + y &= \alpha \\x \cdot y &= \beta^2\end{aligned}$$

Η πρόταση 92 αναφέρεται στον κύκλο και έχει ως εξής: *Αν από δεδομένο σημείο στο εσωτερικό ενός δεδομένου κύκλου φέρουμε ευθεία που τέμνει τον κύκλο, τότε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τις ευθείες από το σημείο μέχρι τον κύκλο είναι δεδομένο.*

Όπως γνωρίζουμε, ο Ευκλείδης όταν αναφέρεται σε ευθείες εννοεί ευθύγραμμα τμήματα. Από το παρακάτω σχήμα έχουμε ότι



$(AB) \cdot (AG) = R^2 - \alpha^2$, όπου R είναι δεδομένο και α είναι δεδομένο ως απόσταση του κέντρου του κύκλου από το δεδομένο σημείο A αυτού.

Ο Πάππος στη "*Συναγωγή*" περιγράφει το έργο "*Δεδομένα*" του Ευκλείδη με αρκετές λεπτομέρειες¹.

4.3. Το έργο "*Φαινόμενα*" ή "*Σφαιρικά*"

Το έργο αυτό έχει αστρονομικό περιεχόμενο. Το κείμενο του Ευκλείδη δε σώζεται. Υπάρχουν όμως κάποια αναθεωρημένα κείμενα, ένα του 10^{ου} αιώνα, που βρέθηκε στη Λαυρεντιανή Βιβλιοθήκη της Φλωρεντίας και ένα του 12^{ου} αιώνα, που βρέθηκε στη Βιέννη. Το δεύτερο κείμενο περιέχεται σε μια συλλογή αστρονομικών έργων, την οποία ο Πάππος είχε ονομάσει "*Θησαυρό της Αστρονομίας*" και είναι γνωστή σε μας ως "*Μικρή Αστρονομία*", σε αντιδιαστολή προς τη "*Μεγάλη Αστρονομία*" του Πτολεμαίου.

Τα κείμενα αυτά, που θεωρείται ότι είναι πολύ κοντά στο αρχικό κείμενο του Ευκλείδη, περιέχονται στον τόμο VIII του έργου "*Euclides Opera Omnia*". Ο τόμος αυτός εκδόθηκε από το Heiberg το 1916.

¹ F. Hultsch, "*Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*", τόμος II, σελίδες 636 και 638-640.

Το έργο "*Φαινόμενα*" περιέχει την εισαγωγή και 16 προτάσεις. Στην εισαγωγή εξηγείται γιατί το Σύμπαν είναι σφαιρικό και υπάρχουν και δύο μερικοί ορισμοί τεχνικών όρων. Εκεί ο Ευκλείδης δίνει τον όρο "*ορίζοντας*" και εισάγει για πρώτη φορά τον όρο "*μεσημβρινός κύκλος*". Στις προτάσεις αποδεικνύεται ότι τα άστρα έχουν συγκεκριμένες θέσεις και ότι ανατέλλουν και δύουν σε καθορισμένους χρόνους. Υπάρχουν προτάσεις που αναφέρονται στην περιστροφή των ουρανίων σωμάτων και της ουράνιας σφαίρας. Ο Πάππος (*Συναγωγή* VI, 104-130) σχολιάζει λεπτομερώς αρκετές από τις προτάσεις αυτού του έργου.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι για αρκετές προτάσεις δε δίνονται αποδείξεις και επίσης ότι οι προτάσεις αυτές υπάρχουν και στο έργο του Αυτόλυκου. Γι' αυτό υπήρξε η εκδοχή ότι προέρχονται από κάποιο παλαιότερο έργο, το οποίο ήταν γνωστό τόσο στον Ευκλείδη όσο και στον Αυτόλυκο. Ο Paul Tannery¹ ισχυρίστηκε ότι τα "*Φαινόμενα*" ήταν έργο του Εύδοξου.

4.4. Το έργο "*Οπτικά*"

Ο Πρόκλος² και ο Πάππος³ αποδίδουν το έργο "*Οπτικά*" στον Ευκλείδη. Ο Πάππος μάλιστα συμπεριλαμβάνει το έργο αυτό στην αστρονομική συλλογή "*Μικρή Αστρονομία*". Στο κείμενο αυτό, που φαίνεται ότι έχει γραφεί από τον Ευκλείδη πριν από το έργο του "*Φαινόμενα*", ο Πάππος έχει προσθέσει ακόμη 12 προτάσεις.

Σήμερα σώζονται δυο μορφές του έργου "*Οπτικά*". Η πρώτη αναθεωρημένη μορφή, που έγινε από το Θέωνα τον Αλεξανδρινό, ήταν το μόνο γνωστό κείμενο μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα. Στο κείμενο αυτό υπάρχει μια εισαγωγή, η οποία φαίνεται να έχει προστεθεί από το Θέωνα.

Η δεύτερη μορφή οφείλεται στο Heiberg. Κατά το τέλος του 19^{ου} αιώνα ο Heiberg ανακάλυψε δυο κείμενα, το ένα του 10^{ου} αιώνα στη Λαυρεντιανή Βιβλιοθήκη της Φλωρεντίας και το άλλο του 12^{ου} αιώνα στη Βιέννη. Με βάση τα κείμενα αυτά συνέθεσε τη νέα μορφή του έργου "*Οπτικά*", που θεωρείται ότι αποδίδει το αυθεντικό κείμενο του Ευκλείδη και περιέχεται στο έργο των Heiberg και Henge "*Euclidis Opera Omnia*"⁴.

¹ Paul Tannery, "*La Geometriae Graecae*", Παρίσι, 1887.

² G. Friedlein, "*Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*", Leipzig 1883 και επανέκδοση 1967 (σελ.69. 2).

³ F. Hultsch, "*Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*" 3 τόμοι, Berlin 1876-1878 (τόμος II, σελ. 568-594).

⁴ J. L. Heiberg and H. Menge "*Euclidis Opera Omnia*", τόμος VII (1895).

Τα "*Οπτικά*", όπως παρουσιάζονται στην έκδοση του Heiberg, αρχίζουν με ορισμούς πάνω σε θέματα οπτικής και περιέχουν ακόμη 58 προτάσεις. Οι ορισμοί μπορούμε να πούμε ότι δεν ανταποκρίνονται στη σημερινή έννοια του ορισμού, αλλά είναι υποθέσεις (παραδοχές). Για παράδειγμα, ο ορισμός 1 παραδέχεται ότι η όραση προκαλείται από τις οπτικές ακτίνες που ξεκινούν από το μάτι του παρατηρητή και κατ'αλήθειαν στο παρατηρούμενο αντικείμενο. Ο ορισμός 2 λέει ότι το σχήμα που περικλείεται από τις οπτικές ακτίνες είναι ένας κώνος, ο οποίος έχει την κορυφή στο μάτι του παρατηρητή και βάση του είναι το μέρος του αντικειμένου που βλέπει ο παρατηρητής. Σε άλλο ορισμό υποθέτει ότι αντικείμενα που φαίνονται υπό ίσες γωνίες είναι ίσα, ενώ εκείνα που φαίνονται υπό άνισες γωνίες είναι ομοίως άνισα κλπ.

4.5. Το έργο "*Κατοπτρικά*"

Ο Πρόκλος αποδίδει στον Ευκλείδη ένα έργο με τον τίτλο "*Κατοπτρικά*". Γράφει συγκεκριμένα: "*Υπάρχουν πολλά άλλα μαθηματικά έργα του Ευκλείδη, όπως είναι τα Οπτικά του, τα Κατοπτρικά του, τα Στοιχεία Μουσικής και το μικρό του βιβλίο Περί διαιρέσεων*". Τα "*Κατοπτρικά*" περιέχονται στον τόμο VII του έργου "*Euclidis Opera Omnia*" των Heiberg και Menge.

Ωστόσο, θεωρείται ότι το έργο που αναφέρει ο Πρόκλος δεν το έχει γράψει ο Ευκλείδης, αλλά ανήκει σε συγγραφέα πολύ μεταγενέστερο. Υπάρχουν ενδείξεις ότι συγγραφέας του είναι ο Θέων και ότι ο Πρόκλος από παραδρομή το απέδωσε στον Ευκλείδη.

4.6. Το έργο "*Στοιχεία Μουσικής*"

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ο Πρόκλος αποδίδει στον Ευκλείδη και ένα έργο με τον τίτλο "*Στοιχεία Μουσικής*". Το ίδιο έργο αποδίδει στον Ευκλείδη και ο Μαρίνος.

Στα "*Στοιχεία Μουσικής*" περιέχονται ουσιαστικά δύο μουσικές εργασίες. Η πρώτη ονομάζεται "*Κατατομή Κανόνος*", (δηλαδή διαίρεση της κλίμακας) και ερμηνεύει τη θεωρία περί μουσικής των Πυθαγορείων. Η δεύτερη ονομάζεται "*Εισαγωγή Αρμονική*" και είναι βασισμένη στη θεωρία του Αριστόξενου. Η θεωρία αυτή είναι αντίθετη με τη θεωρία των Πυθαγορείων. Αυτή η αντίφαση σημαίνει ότι είναι μάλλον δύσκολο να έχει γραφεί ολόκληρο το έργο από τον Ευκλείδη.

Σήμερα, η φιλολογική κριτική έχει δεχτεί ότι η *"Εισαγωγή Αρμονική"* είναι γραμμένη από έναν μαθητή του Αριστόξενου, τον Κλεονίδα. Ενώ η *"Κατατομή Κανόνος"* αποδίδεται με βεβαιότητα στον Ευκλείδη, επειδή, εκτός των άλλων, είναι μαθηματική μουσική και το ύφος, η επιλογή των λέξεων, η μορφή των προτάσεων και γενικά η ανάπτυξη του κειμένου συμφωνούν με αυτά των *Στοιχείων*.

Ο Πορφύριος, που έγραψε σχόλια στο έργο *"Αρμονικά"* του Πτολεμαίου, αναφέρεται αρκετές φορές στην *"Κατατομή Κανόνος"*, θεωρώντας ότι είναι έργο του Ευκλείδη. Π.χ. σε κάποιο σημείο γράφει¹: *"Και αυτός ο Στοιχειωτής Ευκλείδης στο έργο του Κανόνος Κατατομής..."*. Και παρακάτω: *"Στον Κανόνα Κατατομής του Ευκλείδη..."*.

4.7. Το έργο *"Βιβλίο διαιρέσεων"*

Το έργο αυτό δε σώζεται ολόκληρο στα Ελληνικά. Ένα μεγάλο μέρος του περιέχεται στον τόμο VIII του έργου *"Euclides Opera Omnia"*, που εκδόθηκε από τον Heiberg το 1916. Το κείμενο αυτό είναι βασισμένο σε δύο κυρίως πηγές:

1. Σε μια αραβική μετάφραση του 10^{ου} αιώνα, την οποία ανακάλυψε ο Franz Woepcke στην Εθνική Βιβλιοθήκη του Παρισιού το 1849. Το κείμενο αυτό το μετέφρασε ο Woepcke στα Γαλλικά και το δημοσίευσε² στο επιστημονικό περιοδικό *Journal Asiatique* το 1851.
2. Στο έργο *Practica Geometriae*, που γράφτηκε το 1220 από το Leonardo Fibonacci. Στο έργο αυτό υπάρχει ένα μεγάλο μέρος από το βιβλίο *"Περί διαιρέσεων"* του Ευκλείδη. Υπάρχουν σήμερα ισχυρές ενδείξεις ότι το κείμενο αυτό του Fibonacci προέρχεται από κείμενα του Ευκλείδη που σήμερα δε σώζονται.

Το 1915 ο R. C. Archibald ανακατασκεύασε ολόκληρο το έργο *"Περί διαιρέσεων"*, βασισμένος στα έργα του L. Fibonacci και του F. Woepcke³.

¹ Porphyry *"Commentary on Ptolemy's Harmonica"*, Wallis, *Opera Mathematica* III, Oxford, 1669, σελ. 267. 31-32 και 272. 26-27.

² F. Woepcke, *"Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d' Euclide"*, Journal Asiatique, 1851.

³ R. C. Archibald, *"Euclid's Book on Divisions of Figures with a Restoration Based on Woepcke's Text and the Practica Geometriae of Leonardo Pisano"*, Cambridge, 1915.

Ο Πρόκλος αναφέρεται στο "*Βιβλίο διαιρέσεων*" και λέει ότι ο Ευκλείδης διαιρεί δεδομένα ευθύγραμμα σχήματα σε όμοια ή ανόμοια ευθύγραμμα σχήματα¹.

Όλες οι προτάσεις του έργου αναφέρονται σε ευθύγραμμα σχήματα, τα οποία διαιρούνται με ευθείες γραμμές σε άλλα ευθύγραμμα σχήματα, που έχουν δεδομένη σχέση. Π.χ. διαιρούνται τρίγωνα, παραλληλόγραμμα, τραπέζια, τετράπλευρα, κύκλοι, κυκλικοί τομείς σε δύο ή περισσότερα ίσα μέρη ή σε δύο ή περισσότερα μέρη τα οποία έχουν δοθέντα λόγο.

Οι προτάσεις είναι 36 συνολικά, αλλά αποδειξείς υπάρχουν μόνο για τέσσερις, τις προτάσεις 19, 20, 28 και 29.

Καταγράφουμε ενδεικτικά μερικές από αυτές τις προτάσεις, όπως υπάρχουν στο έργο του Heiberg:

- ♦ *Να διαιρεθεί δεδομένο τρίγωνο σε δύο ίσα μέρη από ευθεία που είναι παράλληλη προς τη βάση του τριγώνου (πρόταση 1).*
- ♦ *Να διαιρεθεί τρίγωνο σε τρία ίσα μέρη από δύο ευθείες παράλληλες προς τη βάση του τριγώνου (πρόταση 3).*
- ♦ *Να διαιρεθεί τραπέζιο σε δύο ίσα μέρη από μια ευθεία που είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου (πρόταση 4).*
- ♦ *Να διαιρεθεί παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα μέρη από μια ευθεία γραμμή, που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω σε μια πλευρά του παραλληλογράμμου (πρόταση 6).*
- ♦ *Να διαιρεθεί τραπέζιο σε δύο ίσα μέρη από μια ευθεία που περνά από δεδομένο σημείο, το οποίο ανήκει σε μία πλευρά του τραπεζίου (πρόταση 8).*
- ♦ *Να διαιρεθεί δεδομένο τρίγωνο σε δύο ίσα μέρη από μια ευθεία γραμμή που περνά από ένα δεδομένο σημείο, το οποίο βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο. (πρόταση 19).*
- ♦ *Σε δεδομένο τρίγωνο να φέρουμε ευθεία, η οποία να περνά από ένα δεδομένο σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου και να αποκόπτει από το τρίγωνο ένα τμήμα του, που να έχει δεδομένο λόγο προς το τρίγωνο. (πρόταση 20).*

Στην απόδειξη που υπάρχει στο κείμενο, αποκόπτεται από το τρίγωνο τμήμα ίσο με το $\frac{1}{3}$ του τριγώνου.

¹ G. Friedlein, "*Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*", Leipzig 1883, σελ. 68. 23-27.

- ♦ Σε δεδομένο κύκλο να φέρουμε δυο παράλληλες ευθείες, οι οποίες να τέμνουν τον κύκλο και να αποκόπτουν από αυτόν ένα δεδομένο κλάσμα του. (πρόταση 29).

Ο Ευκλείδης στην απόδειξη της πρότασης 29 κατασκευάζει ένα τμήμα του κύκλου ίσο με το ένα τρίτο του κύκλου. Αναφέρει όμως ότι με όμοιο τρόπο κατασκευάζεται το ένα τέταρτο του κύκλου, το ένα πέμπτο του και κάθε τμήμα οποιουδήποτε κλάσματος του κύκλου.

Ο Ήρων στα "*Μετρικά*" (τόμος III, σελ. 8) λύνει την πρόταση 29 όταν το κλάσμα είναι το ένα τρίτο του κύκλου. Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση με ρητούς αριθμούς και προσπαθεί να βρει προσεγγιστικές τιμές για τη λύση αυτού του προβλήματος.

Θεωρούμε χρήσιμο να προσθέσουμε εδώ ότι ο John Dee βρήκε μια εργασία με τίτλο "*De divisionibus*" με περιεχόμενο στα αραβικά κάποιου Muhammad Bagdadinus, τη μετέφρασε στα Λατινικά και το 1563 έδωσε αντίγραφο της λατινικής μετάφρασης στον Commandinus, ο οποίος το δημοσίευσε το 1570 με το όνομά του και το όνομα του Dee. Το κείμενο αυτό περιέχεται στο έργο του Gregory του 1703.

4.8. Το έργο "*Πορίσματα*"

Ο Πρόκλος¹ και ο Πάππος² αποδίδουν το έργο "*Πορίσματα*" στον Ευκλείδη. Αποτελείται από τρία βιβλία και, σύμφωνα με τον Πάππο, περιέχει 171 προτάσεις και 38 λήμματα. Οι προτάσεις αναφέρονται κυρίως σε γεωμετρικούς τύπους σημείων ή γραμμών. Ο Πάππος το συμπεριλαμβάνει στη συλλογή μαθηματικών έργων "*Θησαυρός της Ανάλυσης*".

Από τα στοιχεία που παρουσιάζουν ο Πρόκλος και ο Πάππος, ο Robert Simson³ και ο Michel Chasles⁴ έκαναν σημαντικές προσπάθειες να το ανακατασκευάσουν. Το έργο "*Πορίσματα*" μπορεί να βρεθεί στα έργα "*Euklid-Studien*" του Heiberg (σελίδες 56-79) και "*Le scienze essate nell' antica Grecia*" (1914, σελίδες 245-268) του G. Loria.

Στο έργο "*Euclidis the thirteen books of Elements*", του Heath, (τόμος I, σελίδες 10-15), υπάρχουν εκτεταμένα αποσπάσματα του έργου αυτού.

¹ G. Friedlein, '*Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*', Leipzig 1883 και επανέκδοση 1967 (σελ.69. 2)

² F. Hultsch, '*Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*' 3 τόμοι, Berlin 1876-1878 (τόμος II, σελ. 568-594)

³ Robert Simson, '*De porismatibus tractatus*', *Opera quaedam reliqua*, Glasgow 1776, σελ.315-594.

⁴ Michel Chasles, '*Le trois livres de porismes d' Euclide*', Paris, 1860.

4.9. Το έργο "*Κωνικά*"

Από τον Πάππο ("*Συναγωγή*", VII, σελ. 672) γνωρίζουμε ότι ο Ευκλείδης είχε γράψει ένα έργο με τον τίτλο "*Κωνικά*". Το έργο έχει χαθεί, ωστόσο ο Πάππος αναφέρεται συχνά σ' αυτό και από τις αναφορές αυτές γνωρίζουμε αρκετά για το περιεχόμενό του. Μάλιστα, επειδή αναφέρεται τόσο σ' αυτό όσο και σε αντίστοιχο έργο του Αρισταίου, ως να υπήρχαν και να κυκλοφορούσαν στην εποχή του, πιστεύεται ότι το έργο αυτό του Ευκλείδη χάθηκε μετά την εποχή του Πάππου.

Ο Πάππος στη "*Συναγωγή*" (βιβλίο VII, σελ. 672, σειρά 18 κ.ε.) αναφέρει ότι τα "*Κωνικά*" του Ευκλείδη αποτελούνται από τέσσερα βιβλία και περιέχουν και τις κωνικές τομές. Αργότερα, ο Απολλώνιος αναθεώρησε και συμπλήρωσε τα τέσσερα αυτά βιβλία, πρόσθεσε άλλα τέσσερα δικά του και έτσι δημιούργησε το περίφημο έργο του "*Κωνικές τομές*", το οποίο αποτελείται συνολικά από οκτώ βιβλία ("*τεύχη*").

Συχνές αναφορές στα "*Κωνικά*" του Ευκλείδη κάνει και ο Αρχιμήδης, ο οποίος μάλιστα αναφέρεται και σε συγκεκριμένες προτάσεις του έργου αυτού.

Ασφαλώς, ο Ευκλείδης γνώριζε ότι μια κωνική τομή γεννιέται από την τομή ενός κώνου από ένα επίπεδο. Θεωρούσε τρεις ορθούς κώνους, οι οποίοι είχαν τη γωνία της κορυφής οξεία, ορθή ή αμβλεία αντίστοιχα. Οι τομές των κώνων αυτών με επίπεδο κάθετο στη γενέτειρα του κώνου σχηματίζουν τις κωνικές τομές, τις οποίες ονόμαζε *τομή οξυγωνίου κώνου*, *τομή ορθογωνίου κώνου* και *τομή αμβλυγωνίου κώνου*. Για τις κωνικές αυτές τομές ο Απολλώνιος καθόρισε τους όρους *έλλειψη*, *παραβολή* και *υπερβολή* αντίστοιχα. Όμως ο Ευκλείδης γνώριζε ότι η υπερβολή μπορεί να σχηματισθεί από την τομή ενός κώνου ή ενός κυλίνδρου από επίπεδο που δεν είναι παράλληλο προς τη βάση. Στο έργο του "*Φαινόμενα*" λέει: "*Αν ένας κώνος ή κύλινδρος τμηθεί από ένα επίπεδο που δεν είναι παράλληλο προς τη βάση του κώνου ή του κυλίνδρου, η τομή είναι μια τομή οξυγώνιου κώνου, η οποία μοιάζει με θυρεό*".

4.10. Το έργο "*Τόποι προς επιφάνειες*"

Το έργο αυτό δεν έχει διασωθεί. Το περιεχόμενό του μπορούμε να το υποθέσουμε από διάφορες αναφορές που βρίσκουμε στα έργα του Πρόκλου και του Πάππου. Έτσι π.χ. γνωρίζουμε ότι αποτελούνταν από δυο βιβλία.

Ο Πάππος αποδίδει το έργο αυτό στον Ευκλείδη (*Συναγωγή*, VII, 636, 23-24), και το εντάσσει στη μαθηματική συλλογή "*Θησαυρός της Ανάλυσης*". Επίσης, αποδίδει στον Ευκλείδη δύο λήμματα πάνω στους

γεωμετρικούς τόπους επιφάνειες, τα οποία καταγράφει στον τόμο VII, 312 της *Συναγωγής*. Το δεύτερο λήμμα αναφέρεται στις ιδιότητες της *διευθετούσης κωνικής τομής*. Κατά τον Πάππο, ο Ευκλείδης γνώριζε αυτές τις ιδιότητες. Πολύ αργότερα, ο Zeuthen υποθέτει ότι ο Ευκλείδης είχε χρησιμοποιήσει αυτές τις ιδιότητες για να προσδιορίσει "*γεωμετρικούς τόπους επιφάνειες*". Π.χ. να αποδείξει ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων η απόσταση από μια δεδομένη ευθεία και η απόσταση από ένα δεδομένο επίπεδο έχουν σταθερό λόγο, είναι κώνος.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων η απόσταση από ένα δεδομένο σημείο και η απόσταση από ένα δεδομένο επίπεδο έχουν σταθερό λόγο, είναι μια επιφάνεια, η οποία σχηματίζεται από την περιστροφή μιας κωνικής τομής γύρω από έναν άξονα.

Αυτό ερμηνευόμενο σημαίνει ότι οι "*γεωμετρικοί τόποι επιφάνειες*" του Ευκλείδη δεν είναι μόνο κώνοι, κύλινδροι και ίσως και σφαίρα, αλλά και άλλες επιφάνειες εκ περιστροφής, όπως π.χ. σφαιροειδές, παραβολοειδές, υπερβολοειδές κλπ.

4.11. Το έργο "*Ψευδάρια*"

Ο Πρόκλος¹ στα σχόλιά του πάνω στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* αποδίδει στον Ευκλείδη ένα έργο με τον τίτλο "*Ψευδάρια*". Το περιγράφει αναλυτικά και από αυτή την περιγραφή φαίνεται ότι ανήκει στη Στοιχειώδη Γεωμετρία. Το έργο αυτό δεν έχει διασωθεί. Όμως, ένα ακριβώς ίδιο έργο αναφέρεται από το Μιχαήλ Εφέσιο² στα σχόλιά του πάνω στο έργο του Αριστοτέλη "*Περί σοφιστικών ελέγχων*".

4.12. Τα έργα "*Μηχανικά*" και "*Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων*"

Δε σώζεται έργο του Ευκλείδη με το γενικό τίτλο "*Μηχανικά*". Ωστόσο, από διάφορα χειρόγραφα που έχουν βρεθεί κατά καιρούς και αποδίδονται στον Ευκλείδη, προκύπτει ότι είναι πολύ πιθανόν ο Ευκλείδης να είχε γράψει ένα τέτοιο έργο.

¹ G. Friedlein, "*Procli Diadochi in primum Euclidi's Elementorum librum commentarii*", Leipzig, 1883, σελ. 69.27 – 70.18.

² Alexander of Aphrodisias "*Commentary on Aristotel's sophistici elenchi*", Wallis, Berlin 1898, σελ. 76.27.

Σύμφωνα με αραβικές πηγές, ο Ευκλείδης είχε γράψει ένα έργο Μηχανικής με τίτλο "*Περί βαρέων και ελαφρών*". Το 1537 ο Hervagius¹ δημοσίευσε στη Βασιλεία σε λατινική μετάφραση ένα μισοκατεστραμμένο χειρόγραφο φυλλάδιο, με τίτλο "*De levi et ponderoso*", το οποίο θεωρούσε ως έργο του Ευκλείδη και ήταν προφανώς το έργο *Περί βαρέων και ελαφρών*. Το ίδιο έργο δημοσίευσε και ο Gregory το 1703.

Κατά τον Ivor Bulmer-Thomas² το 1900 ο M. Curtze δημοσίευσε το παραπάνω κείμενο και πάλι σ' αυτό δημοσίευσε κι ένα χειρόγραφο που ο ίδιος είχε ανακαλύψει στη Δρέσδη της Γερμανίας με τίτλο "*Liber Euclidis de gravi et levi et de comparatione corporum ad invicem*". Από τη σύγκριση των δύο αυτών κειμένων προέκυψε ότι επρόκειτο για το ίδιο κείμενο, γραμμένο σε διαφορετική γλώσσα. Ο Duhem³ ισχυρίστηκε ότι τα χειρόγραφα αυτά αναφέρονται στη *Μηχανική* του Αριστοτέλη τη σχετική με την ελεύθερη κίνηση των σωμάτων. Ο ίδιος βρήκε στο Παρίσι ένα χειρόγραφο απόσπασμα, στο οποίο περιέχεται η παραπάνω εργασία.

Το 1952 οι Moody και Clagett δημοσίευσαν ένα κείμενο σε αγγλική μετάφραση, το οποίο βασιζόταν σε ένα χειρόγραφο που βρέθηκε στη Bodleian βιβλιοθήκη της Οξφόρδης⁴.

Ο G. Sarton⁵ έχει αντιρρήσεις και θεωρεί ότι το έργο αυτό δεν μπορεί να ανήκει στον Ευκλείδη, γιατί περιέχει την έννοια της ειδικής βαρύτητας σε τόσο καθαρή μορφή, που δεν παρουσιάζεται πριν από τον Αρχιμήδη. Όμως ο Clagett ισχυρίζεται ότι η ειδική βαρύτητα που αναφέρεται στο έργο αυτό είναι αριστοτέλεια και επομένως είναι δυνατό το έργο αυτό να ανήκει στον Ευκλείδη.

Ο F. Woepcke⁶ ανακάλυψε στο Παρίσι δύο χειρόγραφα. Το ένα είναι αραβικό κείμενο και το δημοσίευσε το 1851 με τίτλο "*Le livre d' Euclide sur la balance*". Αυτό περιέχει έναν ορισμό, δύο αξιώματα και τέσσερις προτάσεις και αναφέρεται στη θεωρία των μοχλών, προσπαθώντας να εκφράσει τη

¹ J. Hervagius, "*Euclidis de levi et ponderoso fragmentum*", *Euclidis Megarensis Mathematici clarissimi elementorum geometricorum libri xv*, Basel 1537, σελ. 585-586.

² Ivor Bulmer-Thomas *Dictionary of Scientific Biography*, τόμος 4, σελ. 431

³ P. Duhem, "*Les origines de la statique*", *Biblioteca Mathematica I* (1900), σελ. 61-97.

⁴ E. A. Moody and Marshall Clagett, "*The Medieval Science of Weights*", Madison Wis. 1952. Το έργο αυτό περιέχει το "*Liber Euclidis de ponderoso et levi et de comparatione corporum ad invicem*", έκδοση από τον M. Clagett με εισαγωγή, αγγλική μετάφραση και παρατηρήσεις από τον E. A. Moody.

⁵ G. Sarton, "*Introduction to the Theory of Science*", *Biblioteca Mathematica I* (1900), σελ. 156.

⁶ F. Woepcke, "*Notice sur de traductions arabes de deux ouvrages perdus d' Euclide*", *Journal Asiatique* 18, (1851) ser. 4th, σελ. 233-247.

θεωρία αυτή όχι με τον τρόπο που διατυπώνεται στη *Μηχανική* του Αριστοτέλη, αλλά αξιωματικά, με βάση προτάσεις που μπορούν να θεωρηθούν αυταπόδεικτες και επιβεβαιώνονται μόνο από την εμπειρία.

Στο δεύτερο χειρόγραφο με τίτλο "*Liber de canonio*", υπάρχει η πρόταση: "*Τα μήκη των βραχιόνων των μοχλών που είναι παράλληλοι προς τον ορίζοντα είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τα βάρη που οι μοχλοί φέρουν στα άκρα τους*". Αμέσως μετά την πρόταση αυτή υπάρχει η παρατήρηση: "*Sicut demonstratum est ab Euclide et Archimide et aliis*" (=όπως παρουσιάζεται από τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη και άλλους). Από όλα αυτά ο Woerpcke συμπεραίνει ότι το πρώτο κείμενο θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι ανήκε στον Ευκλείδη.

Ο Duhen μετά από επίμονες έρευνες ανακάλυψε στο Παρίσι και ένα τρίτο χειρόγραφο, με τίτλο "*Liber Euclidis de ponteribus secundum terminorum circumferentiam*". Αυτό περιέχει τέσσερις προτάσεις, οι οποίες αναφέρονται στους κύκλους που διαγράφουν τα άκρα των μοχλών, όταν αυτοί ανεβοκατεβαίνουν. Το κείμενο αυτό αποδίδεται στον Ευκλείδη. Ο Duhen παρατηρεί ότι τα τρία αυτά χειρόγραφα είναι συμπληρωματικά το ένα του άλλου και επομένως μπορεί να είναι κομμάτια του ίδιου έργου. Ο πιθανότερος συγγραφέας κατά τη γνώμη του είναι ο Ευκλείδης.

5. Οι μεταφράσεις και οι εκδόσεις των *Στοιχείων*

5.1. Γενικά

Τα *Στοιχεία* είναι ένα έργο, το οποίο μέσα στη μακραίωνη ιστορία του από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, απασχόλησε πολλούς σχολιαστές, υπομνηματιστές, μεταφραστές, συγγραφείς, εκδότες και άλλους επιστήμονες, με πάρα πολύ μεγάλη συχνότητα και αυξημένο ενδιαφέρον. Μελετώντας όλα τα στοιχεία που σήμερα έχουμε στη διάθεσή μας μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι ο αριθμός των μεταφράσεων και εκδόσεων των *Στοιχείων* ξεπερνά τις 2.000.

Εκτός από τα ελληνικά κείμενα και τις ελληνικές εκδόσεις, τα *Στοιχεία* έχουν μεταφραστεί και εκδοθεί στα Αραβικά, Λατινικά, Ιταλικά, Ισπανικά, Γαλλικά, Γερμανικά, Αγγλικά, Ολλανδικά, Σουηδικά, Δανικά, Ρωσικά, Κινέζικα και σε πολλές άλλες γλώσσες. Ο Heath¹ αναφέρει 97 πρώιμες εκδόσεις

¹ T. L. Heath, "*The Thirteen Books of Euclid's Elements*", Cambridge 1905, 1925, New York 1956, vol.I p.p. 91-113.

και μεταφράσεις των *Στοιχείων* από το 1482 μέχρι το 1820. Ο C. T. Stanford¹ αναφέρει 84 μεταφράσεις και εκδόσεις από το 1482 μέχρι το 1600. Ο Max Steck² αναφέρει 60 μέχρι το 1600 και ο F. J. Duart³ αναφέρει 123.

Στο έργο μας αυτό δε θα αναφερθούμε αναλυτικά σε όλες τις μεταφράσεις και τις εκδόσεις που είναι σήμερα γνωστές. Αυτό, ασφαλώς, θα ήταν πολύ ενδιαφέρον και χρήσιμο, αλλά δεν ταιριάζει στους σκοπούς αυτού του έργου. Πρόθεσή μας είναι να αναφερθούμε στα σπουδαιότερα σχόλια και τις εκδόσεις που έγιναν κατά την αρχαία ελληνική περίοδο μέχρι τον 6^ο μ.Χ. αιώνα, να παρουσιάσουμε τις βασικές αραβικές μεταφράσεις και εκδόσεις των *Στοιχείων*, καθώς και τις άλλες εκδόσεις τους κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα. Τέλος, να αναφερθούμε στις σημαντικότερες λατινικές μεταφράσεις και εκδόσεις, καθώς και σε εκείνες που έγιναν σε διάφορες ευρωπαϊκές γλώσσες από την Αναγέννηση μέχρι και τον 20^ο αιώνα.

5.2. Αρχαία ελληνική εποχή

Αρκετές πληροφορίες, μαρτυρίες, αναφορές και σχόλια για το έργο του Ευκλείδη υπάρχουν σε αρκετά έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, αστρονόμων, φιλοσόφων και σχολιαστών μέχρι και τον 6^ο μ.Χ. αιώνα. Στο έργο του Ευκλείδη αναφέρονται, όπως ήδη έχουμε μνημονεύσει, ο Αρχιμήδης, ο Απολλώνιος, ο Πτολεμαίος, ο Γέμινος ο Ρόδιος, ο Ήρων ο Αλεξανδρινός, ο Πάππος, ο Πορφύριος, ο Θέων ο Αλεξανδρινός, ο Πρόκλος και ο Σμπλίκιος.

Το έργο που είχε τη μεγαλύτερη απήχηση στην έκδοση των *Στοιχείων* στην Ελληνική γλώσσα, αλλά και στις μεταφράσεις τους στα Λατινικά και τις άλλες ευρωπαϊκές γλώσσες, ήταν ένα χειρόγραφο κείμενο των *Στοιχείων*, το οποίο είχε γράψει ο Θέων ο Αλεξανδρινός τον 4^ο μ.Χ. αιώνα. Το χειρόγραφο αυτό του Θέωνα ήταν το μόνο ελληνικό κείμενο που χρησιμοποιήθηκε για κάθε ελληνική έκδοση των *Στοιχείων* μέχρι και τις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Ο Θέων, στα σχόλια που κάνει στο έργο "*Almagest*" του Πτολεμαίου, αναφέρεται και στα *Στοιχεία* και καταγράφει αρκετές επεμβάσεις και προσθήκες που ο ίδιος έκαμε στο κείμενο των *Στοιχείων*. Σύμφωνα με αυτές τις μαρτυρίες, ο Θέων ξαναδημοσίευσε τα *Στοιχεία* αλλάζοντας τη γλώσσα σε κάποιες περιπτώσεις, στην προσπάθειά του να κάνει τα *Στοιχεία* περισσότερο κατανοητά, εισήγαγε ενδιά-

¹ C. T. Stanford, "*Early Editions of Euclid's Elements*". London 1926.

² Max Steck, "*Die Geistige Tradition de Frühen Euklid-Ausgaben*" *Forschungen und Fortschritte*, 31 (1957) p.p. 113-117.

³ F. J. Duart, "*Bibliografia in Eucleides, Arquimedes, Newton*" Caracas 1967.

μεσα βήματα στις αποδείξεις, διέκρινε ειδικές περιπτώσεις, πρόσθεσε νέες αποδείξεις και πορίσματα. Αναφέρεται ειδικά και στην προσθήκη ενός πορίσματος στην πρόταση 33 του βιβλίου VI. Δηλαδή ο Θέων πρόσθεσε ένα πόρισμα που δεν υπήρχε στο αρχικό κείμενο του Ευκλείδη.

Οι αναφορές αυτές του Θέωνα έδωσαν στους μεταγενέστερους ερευνητές και επιστήμονες τη δυνατότητα να μπορούν να κάνουν διάκριση μεταξύ των κειμένων του Θέωνα και των κειμένων του Ευκλείδη που είχαν γραφεί πριν από το Θέωνα.

Ο πρώτος ίσως αρχαίος Έλληνας μαθηματικός που έγραψε συστηματικά σχόλια για τα Στοιχεία του Ευκλείδη ήταν ο Ήρων ο Αλεξανδρινός (2^{ος} μ.Χ. αιώνας). Τα ίδια τα κείμενα του Ήρωνα δεν έχουν διασωθεί. Υπάρχουν όμως αρκετές μαρτυρίες και αναφορές σ' αυτά από τον Πρόκλο και από πολλούς Άραβες μαθηματικούς και συγγραφείς. Ο Άραβας μαθηματικός και σχολιαστής al-Nayrizi (πέθανε το 922 μ.Χ.) έγραψε σχόλια πάνω στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων*. Εκεί αναφέρεται πολύ συχνά στον Ήρωνα και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ως να είχε το έργο του Ήρωνα μπροστά του¹. Για παράδειγμα, αναφέρει: "*ο Ήρων λέει*", "*ο Ήρων δεν αναφέρει τίποτε*", "*δε βρέθηκε να λέει τίποτα ο Ήρων*" κλπ.

Μερικά από τα σχόλια του al-Nayrizi βρέθηκαν σε ένα χειρόγραφο στην ιστορική πόλη Leiden της Ολλανδίας και έχουν εκδοθεί από τους Besthorn και Heiberg. Το χειρόγραφο αυτό περιέχει τις μεταφράσεις των έξι πρώτων βιβλίων των *Στοιχείων* από τον al-Hajjaj με συνημμένα τα σχόλια του al-Nayrizi. Όμως, αρκετές σελίδες του πρώτου βιβλίου που περιέχουν τα σχόλια του Συμπλίκιου πάνω στους 22 ορισμούς του βιβλίου I, έχουν χαθεί. Το χειρόγραφο αυτό αποτελεί τον **Κώδικα Leidensis 399**. Το 12^ο αιώνα ο Gherardus Cremonensis (Gherard της Cremona) βρήκε μια λατινική μετάφραση, η οποία περιείχε τα σχόλια του al-Nayrizi για δέκα βιβλία των *Στοιχείων*, καθώς και τα χαμένα σχόλια του Συμπλίκιου. Αυτά εκδόθηκαν από το Maximilian Curtze το 1899 στη Λιγία.

Έτσι, από τα σχόλια του Πρόκλου πάνω στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων*, το αραβικό λεξικό "*Fihrist*", τα σχόλια του al-Nayrizi πάνω στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* αλλά και από πολλές αναφορές άλλων επιστημόνων, μπορούμε να έχουμε αρκετές πληροφορίες για το περιεχόμενο των σχολίων του Ήρωνα πάνω στα *Στοιχεία*.

Κατά τον Heath, τα σχόλια του Ήρωνα δε φαίνεται να έχουν διαφορές από το κείμενο του Ευκλείδη και μάλιστα από εκείνες που χαρακτηρίζονται ως πολύ σημαντικές. Υπάρχουν απλώς μερικές γενικές πα-

¹ T. L. Heath, "*The Thirteen Books of Euclid's Elements*", τόμος I, σελ. 21-22.

ρατηρήσεις, κάποιες διευκρινίσεις για τον τρόπο που έπρεπε να έχει γραφεί ένα σχήμα κλπ. Για παράδειγμα, στις προτάσεις 35 και 36 του βιβλίου I, ο Ήρων διακρίνει διάφορες περιπτώσεις, ενώ στις προτάσεις 7 και 8 του βιβλίου III, που αναφέρονται σε χορδές, οι χορδές στα *Στοιχεία* χαράσσονται από την ίδια πλευρά της διαμέτρου, ενώ στα σχόλια του Ήωνα χαράσσονται από διαφορετικές πλευρές. Ο Ευκλείδης στην πρόταση 11 του βιβλίου III αναφέρεται σε δύο κύκλους που εφάπτονται εσωτερικά. Ο Ήρων πρόσθεσε την πρόταση 12, η οποία αναφέρεται στην περίπτωση που οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. Στο βιβλίο III ο Ήρων αποδεικνύει την πρόταση 10 με τη βοήθεια της πρότασης 9 και τοποθετεί την πρόταση 25 μετά την πρόταση 3. Επίσης, σε μερικές προτάσεις των *Στοιχείων* προσθέτει και τις αντίστροφές τους που δεν υπήρχαν στο αρχικό κείμενο του Ευκλείδη. Π.χ. στα κείμενα του Ήωνα υπάρχουν οι αντίστροφες των προτάσεων 12 και 13 του βιβλίου II, καθώς και η αντίστροφη πρόταση της πρότασης 27 του βιβλίου VIII.

Νεότερος από τον Ήωνα αλλά μεγαλύτερος του Θέωνα ήταν ο **Πάππος**. Ο Πάππος έζησε κατά το τέλος του 3^{ου} και τις αρχές του 4^{ου} αιώνα μ.Χ. και το έργο του "*Μαθηματική Συναγωγή*" ή απλώς "*Συναγωγή*" θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα έργα της αρχαίας ελληνικής εποχής, ένα έργο που είχε μεγάλη απήχηση και στους μεταγενέστερους μαθηματικούς. Η *Συναγωγή* του Πάππου αποτελείται από οκτώ βιβλία και αφορά ολόκληρη τη Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων. Σώζεται μέχρι σήμερα σε πολύ καλή κατάσταση. Έχει εκδοθεί στο Βερολίνο σε τρεις τόμους από τον F. Hultsch¹ στα Ελληνικά με γερμανική μετάφραση. Υπάρχει επίσης και σε γαλλική μετάφραση, που έγινε στο Παρίσι το 1933 από τον Paul Ver Eecke².

Ο Πάππος έχει γράψει σχόλια σε πολλά αρχαία ελληνικά έργα. **Πολύ σημαντικά και αρκετά εκτεταμένα είναι και τα σχόλια του Πάππου στο βιβλίο X των Στοιχείων.** Το έργο αυτό, δυστυχώς, δε σώζεται στα Ελληνικά. Υπάρχει όμως σε μια αραβική μετάφραση, η οποία έχει μεταφραστεί και εκδοθεί σε πολλές γλώσσες. Το αραβικό αυτό κείμενο είναι μετάφραση των σχολίων του Πάππου από τον Άραβα μαθηματικό Abu Uthmam al-Dimashgi (αρχές του 10ου μ.Χ. αιώνα). Στο αραβι-

¹ F. Hultsch, "*Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*", 3 τόμοι, Berlin 1876-1878.

² Paul Ver Eecke, "*Pappus d' Alexandre: La Collection Mathematique*" 2 τόμοι, Paris-Bruges 1933.

κό λεξικό *Fihrist*¹, το οποίο είναι η αρχαιότερη επίσημη αραβική πηγή που υπάρχει, αναφέρεται ότι ο Πάππος έγραψε σχόλια στο βιβλίο X των *Στοιχείων* του Ευκλείδη σε δύο μέρη².

Το αραβικό κείμενο με τα σχόλια του Πάππου δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά μαζί με μια γαλλική μετάφραση το 1856 από τον Franz Woerpcke³. Φαίνεται ότι ο Woerpcke είχε δημοσιεύσει ολόκληρο το κείμενο του Πάππου και λίγο νωρίτερα, ίσως το 1855, στο Παρίσι. Όμως αυτή η έκδοση του Woerpcke δεν είχε ούτε τύπο έκδοσης ούτε χρονολογία.

Στη συνέχεια το αραβικό κείμενο μεταφράστηκε στα Γερμανικά με σχόλια του H. Suter⁴.

Μια νέα έκδοση του αραβικού κειμένου με αγγλική μετάφραση και παρατηρήσεις, λεξιλόγιο και σημειώσεις από τους William Thomson⁵ και Gustar Junge δημοσιεύτηκε στο Cambridge το 1930. Τρία χρόνια αργότερα, ο G. Bergstrasser⁶ δημοσίευσε κριτικά σχόλια πάνω στην έκδοση του Thomson.

Ο Ευτόκιος στις παρατηρήσεις που κάνει πάνω στο έργο "*Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου*" του Αρχιμήδη λέει: "*Ο Πάππος, στα σχόλιά του πάνω στα Στοιχεία, εξήγησε πώς να εγγράψει σε κύκλο ένα πολύγωνο, το οποίο να είναι όμοιο προς ένα άλλο πολύγωνο που είναι εγγεγραμμένο σε έναν άλλο κύκλο*".

Ένας ανώνυμος σχολιαστής του έργου "*Δεδομένα*" του Ευκλείδη χρησιμοποιεί τη φράση⁷: "*όπως λέει ο Πάππος στην αρχή των σχολίων του πάνω στο βιβλίο X των Στοιχείων του Ευκλείδη...*".

¹ *Fihrist*: Ήταν αραβικό λεξικό υψηλού επιπέδου. Στο λεξικό αυτό το όνομα του Πάππου, καθώς και του Ευκλείδη, του Ήρωνα κλπ. υπήρχε σε μια λίστα μαθηματικών φιλοσόφων που περιέχονται σ' αυτό το λεξικό.

² H. Suter, "*Das Mathematiken – Verzeichniss im Fihrist*" *Abhandlungen sur Geschichteder Mathematik Leipzig* (1892), σελίδες 1-87.

³ Franz Woerpcke, "*Essai d' une restitution de travaux perdus d' Apollonius sur les quantitesirrationnelles*. Memoires presentea par divers savants à l' Academie des sciences 14 (1856), σελ. 658-720.

⁴ H. Suter, "*Der Kommentar des Pappus Zum X Buche des Euklides dus der arabischen Übersetzung des Abü Othman al-Dimashki ins Deutsche übertragen*". *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der medizin* 4 (1922) σελ. 9-78.

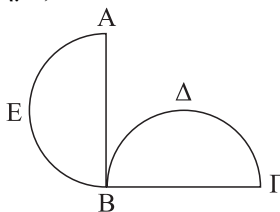
⁵ W. Thomson, "*The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*", Cambridge, Mass, 1930.

⁶ G. Bergstrasser, "*Pappus Kommentar Zum Zehnten Buchvon Eucklid's Elementen*", *Der Islam* 21 (1933), σελίδες 195-222.

⁷ J. L. Heiberg and H. Menge, "*Euclidis Opera Omnia*", σελ. 256.

Ο Πρόκλος αναφέρεται αρκετές φορές στα σχόλια του Πάππου πάνω στο βιβλίο X των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Π.χ. αναφερόμενος σε συγκεκριμένα σημεία των σχολίων του Πάππου, λέει ότι:

- ♦ Στο αίτημα 4 των *Στοιχείων* ότι οι ορθές γωνίες είναι όλες ίσες μεταξύ τους, ο Πάππος αποδεικνύει ότι το αντίστροφο, ότι δηλαδή όλες οι γωνίες που είναι ίσες με μια ορθή είναι ορθές, δεν ισχύει πάντοτε, παρά μόνο όταν είναι ευθύγραμμες¹. Ας πάρουμε μια ορθή γωνία $AB\Gamma$, λέει ο Πάππος, και ας υποθέσουμε ότι $AB = B\Gamma$ (Βλέπε σχήμα).



Με διαμέτρους τα τμήματα AB και $B\Gamma$ χαράσσουμε τα ημικύκλια AEB και $B\Delta\Gamma$. Επειδή τα ημικύκλια είναι ίσα, θα ταυτίζονται και επομένως οι γωνίες AEB και $B\Delta\Gamma$ θα είναι ίσες μεταξύ τους. Αν στις γωνίες αυτές προσθέσουμε τη γωνία $AB\Delta$, τότε η ορθή γωνία $AB\Gamma$ θα είναι ίση με τη γωνία $EB\Delta$ και αυτή τη γωνία δεν μπορούμε να την ονομάσουμε ορθή.

- ♦ Ο Πάππος δίνει πρόσθετα αξιώματα από εκείνα που υπήρχαν στα *Στοιχεία* όπως π.χ. "αν σε άνισα προσθέσουμε άνισα προκύπτουν άνισα", "ένα σημείο διαιρεί μια ευθεία, μια ευθεία διαιρεί μια επιφάνεια, μια επιφάνεια διαιρεί ένα στερεό" κλπ.
- ♦ Ο Πάππος έδωσε μια όμορφη λύση στην πρόταση 5 του βιβλίου I και έκανε αξιόλογες παρατηρήσεις στην πρόταση 47 του βιβλίου I (Πυθαγόρειο θεώρημα).

Σημαντικότατο έργο, το οποίο είχε μεγάλη σημασία για όλες τις εκδόσεις των *Στοιχείων* που ακολούθησαν είναι τα σχόλια του Πρόκλου πάνω στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων*.

¹ G. Friedlein, "*Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*", Leipzig 1883, επανέκδοση 1967, σελίδες 189-190.

Ο **Πρόκλος** (410-485 μ.Χ.) είχε γράψει σχόλια και για πολλά έργα του Πλάτωνα. Τα σχόλιά του πάνω στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* σώζονται σήμερα στην ελληνική γλώσσα και σε πολύ καλή κατάσταση.

Βασικές εκδόσεις των σχολίων του Πρόκλου είναι:

- ♦ Η έκδοση στα Ελληνικά του G. Friedlein¹, που έγινε στη Λιψία το 1883.
- ♦ Η έκδοση του Tomas Taylor², που έγινε στο Λονδίνο το 1788-1789.
- ♦ Η αγγλική έκδοση του G. R. Marrow³ που έγινε το 1970 στο New Jersey και στηρίχτηκε στην έκδοση του Taylor και
- ♦ Η γαλλική μετάφραση του P. ver Eecke⁴ που έγινε στο Παρίσι το 1948.

Ο Πρόκλος αναφέρεται σε πολλούς μαθηματικούς και σχολιαστές των *Στοιχείων*, όπως π.χ. στον **Εύδημο το Ρόδιο**, μαθητή του Αριστοτέλη, ο οποίος έγραψε πολλά έργα πάνω στα Μαθηματικά και την Αστρονομία. Μεταξύ των έργων αυτών ήταν και τα: *"Ιστορία της Αριθμητικής"*, *"Ιστορία της Αστρονομίας"* και *"Ιστορία της Γεωμετρίας"*. Το τελευταίο αυτό έργο, κατά τον Πρόκλο, ήταν και το τελευταίο έργο που γράφτηκε πάνω στην Ιστορία της Γεωμετρίας. Επίσης ο Πρόκλος αναφέρεται στον Εύδοξο, στο Θεαίτητο, στον Πλάτωνα, στον Αριστοτέλη, στον Αρχιμήδη, στον Απολλώνιο, στον Πτολεμαίο, στο Γέμινο το Ρόδιο, στον Ήρωνα, τον Πορφύριο, τον Πάππο και σε πολλούς άλλους.

5.3. Οι εκδόσεις των *Στοιχείων* στα Αραβικά

Όταν το 766 μ.Χ. ο Χαλίφης al-Mansür (754-775) κατέλαβε τη Βαγδάτη, άρχισαν να συρρέουν στην πόλη αυτή πολλοί Άραβες μαθηματικοί, φιλόσοφοι και Αστρονόμοι. Μεταξύ αυτών ήταν και ο Tabit ben Qurra, καθώς και ο al-Battani. Από την εποχή αυτή ξεκίνησε μια διαδικασία μετάφρασης πολλών μεγάλων αρχαίων έργων. Τα έργα των μεγάλων Ελλήνων μαθηματικών, αστρονόμων και φιλοσόφων άρχισαν να μεταφράζονται με μεγάλο ζήλο. Ο Ευκλείδης, ο Πτολεμαίος και ο Αριστοτέλης έγιναν οι μεγάλες αυθεντίες της Γεωμετρίας, της Αστρονομίας και της Φιλοσοφίας αντί-

¹ G. Friedlein, *"Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum librum Commentarii"*, Leipzig 1883. Επανεκδοση 1967.

² Tomas Taylor, *"The Philosophical and Mathematical Commentaries of Proclus on the First Book of Euclid's Elements"*, Λονδίνο 1788-1789.

³ G.R.Marrow, *"Proclus a commentary on the First Book of Euclid's Elements"*, Princeton, New Jersey 1970.

⁴ Paul ver Eecke, *"Proclus de Lycie, Les Commentaires sur le Premier livre des Elements d' Euclide"*, Paris 1948.

στοιχα¹. Λέγεται ότι ο al-Mansür είχε ζητήσει ως λάφυρα από το Βυζαντινό αυτοκράτορα τα χειρόγραφα των έργων των μεγάλων Ελλήνων επιστημόνων.

Αργότερα, ο Χαλίφης al-Ma'mun (813-833), εγγονός του al-Mansür, ίδρυσε στη Βαγδάτη την Ακαδημία, ένα Αστεροσκοπείο και μια μεγάλη Βιβλιοθήκη. Στη βιβλιοθήκη αυτή προσπάθησε να συγκεντρώσει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα μεγάλα έργα της αρχαιότητας. Ζήτησε χειρόγραφα των έργων των αρχαίων Ελλήνων και η μετάφρασή τους συνεχίστηκε με μεγαλύτερη ένταση. Μεταξύ των χειρογράφων αυτών ήταν και τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Από το αραβικό λεξικό *Fihrist* πληροφορούμαστε για το πώς και πότε τα *Στοιχεία* εισήχθησαν στον αραβικό κόσμο, πώς μεταφράστηκαν και πώς διαδόθηκαν μεταξύ του ισλαμικού κόσμου, από μια εκτεταμένη και εμπειριστατωμένη αναφορά που υπάρχει πριν από το όνομα *Ευκλείδης*, γραμμένη από τον Άραβα βιβλιογράφο του 10^{ου} μ.Χ. αιώνα **Muhammad Ibn Ishaq ibn Abi Ya qub al-Nadim**. Ο al-Nadim αναφέρει ότι τα *Στοιχεία* είχαν μεταφραστεί πρώτα από τον al-Hajjaj ibn Yusuf Ibn Matar δύο φορές.

Ο **al-Hajjaj** φαίνεται να δραστηριοποιείται από το 785 μέχρι το 835 περίπου. Η πρώτη μετάφραση έγινε από ένα χειρόγραφο, το οποίο είχε πάρει από το Βυζαντινό αυτοκράτορα ο Χαλίφης al-Mansür. Η μετάφραση αυτή έγινε μετά από προτροπή του Χαλίφη Harun al-Rashid (786-809) και γι' αυτό ίσως η μετάφραση αυτή ονομάστηκε *Harumian*. Η δεύτερη μετάφραση του al-Hajjaj είναι μετάφραση του ίδιου χειρογράφου, αλλά, όπως αναφέρεται στην εισαγωγή της, ο Hajjaj αφαίρεσε τα περιττά, συμπλήρωσε τα κενά, διόρθωσε ή αφαίρεσε τα λάθη, μέχρι που τελειοποίησε το κείμενο και το έφερε στη μορφή που υπήρχε αρχικά. Ασφαλώς εδώ θα εννοεί το αρχικό κείμενο του Ευκλείδη.

Η δεύτερη αυτή μετάφραση ονομάζεται *Mamunian* προς τιμή του Χαλίφη al-Ma'mun και είναι η μόνη που έχει διασωθεί μέχρι σήμερα. Περιέχει τα βιβλία I-VI και XI-XIII των *Στοιχείων*. Δεν περιέχει δηλαδή τα αριθμητικά βιβλία των *Στοιχείων*, που είναι τα βιβλία VII-X. Τα πρώτα έξι βιβλία σε αραβική γλώσσα, υπάρχουν σε ένα χειρόγραφο, που βρέθηκε στην ιστορική πόλη Leiden της Ολλανδίας, μαζί με τα σχόλια του al-Nayrizi (κώδικας Leidensis 399).

Κατά τον al-Nadim, μια δεύτερη μετάφραση των *Στοιχείων*, η οποία είχε ευρεία διάδοση, ήταν αυτή που έγινε από τον Άραβα **Ishaq Ibn**

¹ B. L. Van der Waerden, "Science Awakening", σελ. 57.

Hunayn, γιο του Hunayn Ibn Ishaq, ο οποίος ήταν ο πιο φημισμένος μεταφραστής των αρχαίων ελληνικών έργων στα Αραβικά.

Στη συνέχεια, ο μαθηματικός και ιστορικός των ισλαμικών Μαθηματικών **Thabit ibn Qurra al-Harrani** (826-901) αναθεώρησε και συμπλήρωσε τη μετάφραση των *Στοιχείων* που είχε γίνει από τον Ishaq, αναθεώρησε την αραβική μετάφραση των *"Δεδομένων"*, που είχε γίνει επίσης από τον Ishaq, καθώς και το βιβλίο *"Περί διαιρέσεων"*, που είχε μεταφραστεί από κάποιον ανώνυμο. Επίσης, έγραψε αρκετά βιβλία που αφορούσαν το περιεχόμενο των *Στοιχείων*. Μια εργασία του, που αναφέρεται στο πέμπτο αίτημα των παραλλήλων, υπάρχει σήμερα σε ένα χειρόγραφο το οποίο ανακάλυψε στο Παρίσι ο Woepcke (Paris, 2457, 32°). Έχει επίσης μεταφράσει τα βιβλία V-VII των *"Κωνικών τομών"* του Απολλωνίου και μερικά μέρη από τα έργα του Αρχιμήδη.

Σήμερα δεν έχει διασωθεί αντίγραφο της μετάφρασης του Ishaq, υπάρχουν όμως χειρόγραφα της μετάφρασης του Thabit. Αυτά τα χειρόγραφα είναι γνωστά ως **μεταφράσεις Ishaq-Thabit**. Ένα τέτοιο χειρόγραφο βρίσκεται στην Οξφόρδη, στη Bodleian βιβλιοθήκη, και αποτελεί τον κώδικα Thurston 11.

Το 1881 ο Γερμανός ιστορικός με εξειδίκευση στα μεσαιωνικά αραβικά κείμενα Martin Klamroth¹ σύγκρινε τη μετάφραση των Ishaq-Thabit με εκείνη του Hajjaj πάνω στα βιβλία XI-XIII και διαπίστωσε ότι οι διαφορές ήταν ελάχιστες. Αυτός ίσως ήταν και ο λόγος που ο Klamroth πίστευε ότι οι αραβικές μεταφράσεις των *Στοιχείων* εκφράζουν με περισσότερη προσέγγιση το αυθεντικό κείμενο του Ευκλείδη από ό,τι το εκφράζουν τα διάφορα ελληνικά χειρόγραφα που έχουν διασωθεί. Την άποψη βέβαια αυτή την απορρίπτει ο Heiberg και παρουσιάζει διάφορα στοιχεία, μέσα από τα οποία τεκμηριώνεται η άποψη ότι τα ελληνικά χειρόγραφα εκφράζουν πιο πιστά το αρχικό κείμενο του Ευκλείδη.

Ο al-Nadim αναφέρει ότι ο Abû Uthman al-Dimashqi, που άκμασε κατά την περίοδο 902-932, μετέφρασε αρκετά κομμάτια των *Στοιχείων* και τα σχόλια του Πάππου πάνω στο βιβλίο X. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, τα σχόλια του Πάππου σώζονται από αυτή την αραβική μετάφραση.

Ο al-Nadim αναφέρει επίσης ότι ο Nazif ibn Yumn (πέθανε το 990) είχε μεταφράσει το βιβλίο X των *Στοιχείων*. Η μετάφραση αυτή σώζεται και σήμερα.

Ο κατάλογος των Αράβων μεταφραστών των *Στοιχείων* είναι πολύ μεγάλος. Εκτός από τις μεταφράσεις υπάρχουν ακόμη οι επιτομές και οι πε-

¹ Martin Klamroth, *"Ueber der arabischem Euklid"*, σελ. 270-326.

ρλήψεις των *Στοιχείων*. Η πιο πλήρης και περισσότερο φημισμένη επιτομή είναι του Πέρση Avicenna (ibn Sina, 980-1037), που περιέχεται στη φιλοσοφική εγκυκλοπαίδεια "*Kitab al-shifa*" στον τόμο της Γεωμετρίας. Στην επιτομή του Avicenna υπάρχουν και τα 15 βιβλία (τα 13 του Ευκλείδη, το XIV του Υψικλή και το XV, που γράφτηκε από έναν μαθητή του Ισίδωρου), μόνο που έχουν περιληπτικές αποδείξεις των προτάσεων. Ο Avicenna έγραψε και σχόλια πάνω στα *Στοιχεία*, τα οποία σώζονται σήμερα σε ένα χειρόγραφο στην πόλη Leiden της Ολλανδίας (N° 1445).

Υπάρχει επίσης ένας μεγάλος αριθμός ειδικών εκδόσεων των *Στοιχείων* σε αραβική μετάφραση, καθώς και πολλές αναθεωρημένες εκδόσεις. Οι περισσότεροι γνωστές από αυτές είναι οι αναθεωρημένες εκδόσεις του Πέρση μαθηματικού και φιλοσόφου **Nasir al-Din al-Tusi** (1201-1274). Μια από αυτές, που έγινε από τον al-Tusi το 1248, περιέχει και τα δεκαπέντε βιβλία και έχει ως βάση τις μεταφράσεις του Hajjaj και των Ishaq-Thabit. Μια άλλη αναθεωρημένη έκδοση του al-Tusi, πιο εκτεταμένη, περιέχει τα βιβλία I-XIII και είναι πιο αναλυτική και πιο λεπτομερειακή από την έκδοση του 1248.

Η τελευταία αυτή έκδοση υπάρχει σε δύο χειρόγραφα στη βιβλιοθήκη Medicea-Laurenziana της Φλωρεντίας. Είναι οι κώδικες pal. 273 και 313. Το δεύτερο χειρόγραφο περιέχει έξι βιβλία. Και τα δύο χειρόγραφα δημοσιεύτηκαν στη Ρώμη το 1594. Το περίεργο είναι ότι σε μερικές εκδόσεις αυτού του έργου βρίσκονται μόνο τα 12 βιβλία και σε άλλες τα 13 βιβλία. Σε μερικές υπάρχει και ένας λατινικός τίτλος, ενώ σε άλλες δεν υπάρχει τέτοιος τίτλος¹.

Η πρώτη αναθεωρημένη έκδοση του al-Tusi, που στα περισσότερα χειρόγραφα υπάρχει σε δεκαπέντε βιβλία, σώζεται σήμερα στο Βερολίνο, στο Μόναχο, στην Οξφόρδη, στο Βρετανικό Μουσείο (974,1334,1335), στο Παρίσι (2465-2466), στην Κωνσταντινούπολη και αλλού. Το 1801 τυπώθηκε στην Κωνσταντινούπολη και το 1824 στην Καλκούτα. Το έργο αυτό του al-Tusi δεν είναι μια απλή αραβική μετάφραση κάποιων ελληνικών χειρογράφων των *Στοιχείων*, αλλά είναι σύνθεση των *Στοιχείων* από την αρχή με βάση τις παλαιότερες αραβικές μεταφράσεις και κυρίως τις μεταφράσεις του al-Hajjaj και του Ishaq. Το έργο του al-Tusi περιέχει συνολικά 468 προτάσεις, όσες ακριβώς περιέχει και η αραβική μετάφραση του al-Hajjaj, ενώ η μετάφραση των Ishaq-Thabit περιέχει 478 συνολικά προτάσεις. Επίσης, ο al-Tusi είναι πολύ προσεκτικός στις αναφορές

¹ H. Suter, "*Die Mathematiker und Astronomen der Araber*", Ρώμη, Medicea 1900 σελ.151.

που κάνει σε προηγούμενους συγγραφείς, όπως ακριβώς προσεκτικός είναι και ο al-Hajjaj. Από αυτά, αλλά και από διάφορες ομοιότητες που παρουσιάζει το έργο του al-Tusi με αυτό του al-Hajjaj, ο Klamroth το 19^ο αιώνα συμπέρανε ότι ο al-Tusi ήταν πιο κοντά στην έκδοση του al-Hajjaj από ό,τι ήταν στην έκδοση Ishaq-Thabit.

Εκτός από τις μεταφράσεις των *Στοιχείων* που αναφέραμε παραπάνω, ο al-Tusi έχει γράψει δύο πραγματείες για τα αιτήματα του Ευκλείδη. Η δεύτερη αναφέρεται στο 5^ο αίτημα των παραλλήλων. Και οι δύο αυτές πραγματείες σώζονται σήμερα. Η πρώτη στο Παρίσι (Paris 2467, 5^ο) και η δεύτερη στο Βερολίνο και στο Παρίσι (Berlin 5942 και Paris 2467, 6^ο). Έχει γράψει και 105 προβλήματα που δεν υπάρχουν στα *Στοιχεία*. Ο al-Tusi έχει εκδώσει και το έργο *Δεδομένα* του Ευκλείδη.

Ένας μεγάλος αριθμός Αράβων σχολιαστών έγραψαν ποικίλα σχόλια για τα ελληνικά χειρόγραφα των *Στοιχείων*, τις μεταφράσεις τους, τις διάφορες εκδόσεις και επανεκδόσεις τους, καθώς και για διάφορα βιβλία ή τμήματά τους. Θα παρουσιάσουμε εδώ τα πιο σημαντικά σχόλια, όπως αυτά αναφέρονται στο *Fihrist* από τον al-Nadim.

Ένας από τους σημαντικότερους σχολιαστές των *Στοιχείων*, ο οποίος κάνει αναφορά και στα σχόλια του Πάππου, είναι ο **Abū l'Abbas al-Fadl b. Hatim al-Nayrizi**. Σε ένα χειρόγραφο που βρέθηκε στη Leiden, περιέχεται η δεύτερη έκδοση του al-Hajjaj μαζί με τα σχόλια του al-Nayrizi πάνω στα βιβλία I-VI και λίγες γραμμές από το βιβλίο VII. Αυτό έχει εκδοθεί σε λατινική μετάφραση από τους J. L. Heiberg και R. O. Besthor και αποτελεί σήμερα τον κώδικα Leidensis 399, I. Επίσης τα σχόλια του al-Nayrizi στα βιβλία I-X υπάρχουν σε λατινική μετάφραση που έκανε ο Cherard της Gremona το 12^ο μ.Χ. αιώνα. Η μετάφραση αυτή έχει δημοσιευθεί από τον Curtze από ένα χειρόγραφο που βρέθηκε στην Κρακοβία.

Ένας δεύτερος σημαντικός Άραβας σχολιαστής των *Στοιχείων* είναι ο **Muhammed b. Tsa Abu Abdallah al-Mahani**, που πέθανε μεταξύ 874 και 884. Σύμφωνα με τον al-Nadim, ο al-Mahani έγραψε σχόλια για το βιβλίο V, έγραψε ένα βιβλίο *"Περί προτάσεων"* και μια εργασία για 26 προτάσεις του βιβλίου I των *Στοιχείων*, τις οποίες αποδεικνύει χωρίς να χρησιμοποιεί τη μέθοδο της *εις άτοπον απαγωγής*. Έγραψε επίσης σχόλια για το βιβλίο X των *Στοιχείων*, ένα τμήμα του οποίου βρέθηκε στο Παρίσι σε ένα χειρόγραφο (κώδικας 2457, 39^ο).

Στο *Fihrist* αναφέρεται επίσης και ο Ibn Muadh al-Tayani, ο οποίος έγραψε ένα έργο με σχόλια για το βιβλίο V, το οποίο περιέχει και τη *Θεωρία των αναλογιών* του Εύδοξου.

Αναφορά γίνεται και στους:

- ♦ al-Abbas b. Said al-Jauhari, αστρονόμο του Χαλίφη al-Ma'mun, ο οποίος ασχολήθηκε πολύ με τη Γεωμετρία. Έγραψε σχόλια σε όλα τα βιβλία των *Στοιχείων* και ένα βιβλίο με προτάσεις, τις οποίες πρόσθεσε στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων*.
- ♦ Abū Jafar al-Khazin. Ο al-Nadim αναφέρει ότι ο al-Khazin έγραψε σχόλια πάνω στο βιβλίο X των *Στοιχείων*, αλλά σώζεται μόνο ένα μέρος τους.
- ♦ Abū I Wafa al-Buzjani, που είναι ένας από τους μεγαλύτερους Άραβες μαθηματικούς. Έγραψε σχόλια στα *Στοιχεία*, καθώς και στο έργο του Διόφαντου.
- ♦ Αναφορά γίνεται και στους φιλοσόφους al-Kindi και al-Farabi, οι οποίοι έγραψαν σχόλια στα βιβλία I και V των *Στοιχείων*. Στον al-Hazen, που είναι ο συγγραφέας των σχολίων πάνω στο έργο *Κωνικά* του Ευκλείδη. Στον Omar Khayyam, το φημισμένο Πέρση μαθηματικό και ποιητή, που έγραψε σχόλια για τα προβλήματα των παραλλήλων, των λόγων και αρκετών προτάσεων.
- ♦ Ο al-Haithan (965-1035 περίπου) ήταν ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του. Έγραψε πολλά βιβλία που αναφέρονται στα *Στοιχεία* και σχόλια πάνω στους ορισμούς των *Στοιχείων*. Τα σχόλια σώζονται σε ένα χειρόγραφο που βρίσκεται στην Οξφόρδη (Catal. Mss. Orient. 908). Επίσης έχει γράψει σχόλια πάνω στα δύσκολα σημεία του βιβλίου V. Σχόλια στο βιβλίο V και στα επόμενα βιβλία βρέθηκαν σε ένα χειρόγραφο της Bodleian βιβλιοθήκης (catal. II, p.262).

Υπάρχει ακόμη ένας μεγάλος αριθμός Αράβων σχολιαστών των *Στοιχείων*. Οι σχολιαστές αυτοί είναι κυρίως μαθηματικοί, φυσικοί, αστρονόμοι και φιλόσοφοι. Επίσης, υπάρχουν πολλές ακόμη αραβικές μεταφράσεις, εκδόσεις, επανεκδόσεις, αναθεωρημένες εκδόσεις ή ειδικές εκδόσεις για συγκεκριμένους σκοπούς. Αυτό δείχνει ότι τα *Στοιχεία* χρησιμοποιήθηκαν πολύ από τους Άραβες και αποτέλεσαν το βασικό βιβλίο αναφοράς για όλες τις μαθηματικές τους δραστηριότητες.

Κατά τον 13^ο αιώνα υπήρξαν και ισραηλινές μεταφράσεις των *Στοιχείων*. Οι μεταφράσεις αυτές αναφέρονται κυρίως στις αραβικές εκδόσεις των Ishaq-Thabit και al-Hajjaj. Επειδή οι αναφορές στην έκδοση του al-Hajjaj είναι ελάχιστες, συμπεραίνουμε ότι οι ισραηλινές εκδόσεις είχαν ως βάση τους την έκδοση των Ishaq-Thabit.

Επίσης, υπάρχουν αρμενικές εκδόσεις, οι οποίες φαίνεται να σχετίζονται με τις εκδόσεις του Ishaq-Thabit. Λέγεται ότι μια αρμενική έκδοση ήταν έργο του Gregory Magistros, που πέθανε το 1058.

Υπάρχουν και αποσπάσματα των *Στοιχείων* που έχουν μεταφραστεί στα Συριακά. Ένα χειρόγραφο του 15^{ου} αιώνα σε συριακή μετάφραση φαίνεται να σχετίζεται με τις αραβικές μεταφράσεις. Όμως συριακές μεταφράσεις των *Στοιχείων* πρέπει να υπήρχαν από τον 11^ο ή τον 12^ο μ.Χ. αιώνα. Ο Σύριος λόγιος Abûl Faraj (1226-1286) δίδασκε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη στο Maragha από το 1268. Επιπλέον, υπάρχουν αναφορές σε μια συριακή έκδοση των *Στοιχείων*, που έγινε το 1298 από τον Pseudo-al-Tusi Tahrir και από τον Ibn al-Sari, ο οποίος πέθανε το 1153.

5.4. Λατινικές και άλλες μεταφράσεις και εκδόσεις των *Στοιχείων*

Η πρώτη γνωστή αναφορά στον Ευκλείδη από Λατίνο συγγραφέα γίνεται στο έργο "*Περί ρητορικής*" (III,132) του Κικέρωνα (106-43 π.Χ.). Ο Κικέρων μας πληροφορεί ακόμη ότι η Γεωμετρία απασχολούσε τους Ρωμαίους μόνο για πρακτικούς σκοπούς. Από τον Κικέρωνα επίσης, αλλά και από άλλες αξιόπιστες πηγές, προκύπτει ότι κατά την εποχή αυτή δεν υπήρχαν μεταφράσεις των *Στοιχείων*.

Κατά το 2^ο μ.Χ. αιώνα, τα μόνα αρχαία ελληνικά κείμενα που είχαν μεταφραστεί στα Λατινικά ήταν μερικά αποσπάσματα από τα "*Μετρικά*" του Ήρωνα και κάποιοι ορισμοί από το βιβλίο I των *Στοιχείων*.

Σύμφωνα με τις υπάρχουσες πηγές, οι μεταφράσεις των *Στοιχείων* στη λατινική γλώσσα άρχισαν τον 3^ο μ.Χ. αιώνα. Ο Αστρονόμος Censorinus το 238 μ.Χ. έγραψε ένα έργο με τίτλο "*De die natali*" (=περί γενεθλίων), στο οποίο υπάρχουν αποσπάσματα (ορισμοί, αιτήματα, κοινές έννοιες κλπ.) από ένα ελληνικό χειρόγραφο των *Στοιχείων*. Το έργο αυτό του Censorinus είναι το πρώτο έργο στο οποίο γίνεται μετάφραση, έστω και αποσπασματικά, των *Στοιχείων*. Τα αποσπάσματα αυτά διαφαίνονται και στο έργο "*De Nuptiis*" του Καρχηδόνιου Martianus Capella, που γράφτηκε κατά το τέλος του 4^{ου} μ.Χ. αιώνα. Ο Martianus Capella έγραψε επίσης και ένα είδος εγκυκλοπαίδειας των επτά "*ελευθερίων τεχνών*" (*artes liberales*), δηλαδή της Γραμματικής, της Διαλεκτικής, της Ρητορικής, της Αριθμητικής, της Αστρονομίας, της Γεωμετρίας και της Μουσικής. Η εγκυκλοπαίδεια είχε το γενικό τίτλο "*Σατυρικόν*" και μέσα σ' αυτήν εντοπίζονται στοιχεία Γεωμετρίας από τον Ήρωνα και τον Ευκλείδη.

Κατά τον 5^ο μ.Χ. αιώνα φαίνεται ότι έγιναν κάποιες προσπάθειες μετάφρασης στα Λατινικά κάποιων τμημάτων των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Αυτό προκύπτει και από ένα **παλίμνηστο** που βρέθηκε στη βιβλιοθήκη-

κη του Καπιτωλίου της Βερόνας, το "*παλίμψηστο της Βερόνας*", όπως ονομάστηκε. Αυτό εξετάστηκε με χημικά μέσα και κατά το 19^ο αιώνα, αλλά ήταν πολύ δύσκολο να αναγνωσθεί πλήρως. Διαπιστώθηκε όμως ότι περιέχει αποσπάσματα από τα βιβλία XII και XIII των *Στοιχείων*.

Ο εκδότης M. Geymonat υποστηρίζει την άποψη ότι το παλίμψηστο είναι νεότερο από ό,τι είχε υπολογιστεί αρχικά και ότι συγγραφέας του και μεταφραστής των ελληνικών αποσπασμάτων είναι ο **Boethius (Βοήθιος)**. Ο Boethius (480-524 μ.Χ.) ήταν ένας Ρωμαίος ελληνομαθής, που είχε θέσει ως στόχο να μεταφράσει στα Λατινικά τα έργα του Αριστοτέλη, του Πλάτωνα και άλλων Ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων. Έγραψε βιβλία Αριθμητικής, Μουσικής, Αστρονομίας και Γεωμετρίας. Εκεί παρουσιάζονται αποσπάσματα από διάφορα βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Το έργο αυτό δεν έχει διασωθεί, υπάρχουν όμως διάφορες αναφορές στο περιεχόμενο των έργων του Boethius, από τις οποίες προκύπτει ότι πράγματι ο Boethius είχε μεταφράσει αρκετά αποσπάσματα από τα *Στοιχεία*. Για παράδειγμα, ο Magnus-Avrilius Cassiodorus (γεννήθηκε το 490 μ.Χ.), στο βιβλίο II του έργου του "*Institutiones*" αναφέρει ότι ο Boethius είχε μεταφράσει αποσπάσματα των *Στοιχείων* και παρουσιάζει μια επιστολή που είχε στείλει στον Boethius ο Thodoric, από την οποία προκύπτει ότι πράγματι ο Boethius είχε μεταφράσει στα Λατινικά αρκετά ελληνικά χειρόγραφα που ήταν αποσπάσματα διάφορων βιβλίων των *Στοιχείων*. Επίσης, από τον 8^ο ως τον 11^ο μ.Χ. αιώνα δημοσιεύτηκαν δύο έργα με τίτλους "*Five-Books of Boethian Geometry*" και "*Two-Books of Boethian Geometry*" αντίστοιχα. Στα έργα αυτά υπάρχουν αποσπάσματα από το βιβλίο I των *Στοιχείων*, καθώς και από τα βιβλία III και IV. Αν τώρα εξετάσουμε τα έργα του Cassiodorus, τη συλλογή χειρογράφων, γνωστή ως *Agrimensores* (= γεωμέτρες), και τα παραπάνω έργα της Γεωμετρίας του Boethius, προκύπτει ότι στα έργα αυτά υπάρχουν μεταφρασμένα στα Λατινικά όλοι οι ορισμοί, τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες των βιβλίων I-IV των *Στοιχείων*, μια αναθεωρημένη παρουσίαση σχεδόν όλων των προτάσεων των βιβλίων I-IV και οι αποδείξεις των προτάσεων 1-3 του βιβλίου I. Οι πηγές αυτές αποδίδουν όλα τα παραπάνω αποσπάσματα στον Boethius¹.

Ένα ακόμη ελληνικό χειρόγραφο των *Στοιχείων* βρέθηκε στο Μόναχο. Αυτό το χειρόγραφο περιέχει τις προτάσεις 37 και 38 του βιβλίου I, καθώς και τις προτάσεις 8 και 9 του βιβλίου II και έχει μεταφραστεί στα Λατινικά (Bibliothecae Regiae Universitatis Monacensis 2^ο .757).

¹ John Murdoch, "*Euclid: Transmission of the Elements*". *Dictionary of Scientific Biography*, New York 1975, σελ. 437.

Ο Maximilian Gurtze¹ αναφέρει και ένα άλλο ελληνικό χειρόγραφο που περιέχει τα βιβλία I-XIII και το XV και είναι βασισμένο κυρίως στο χειρόγραφο του Θέωνα. Η λατινική του μετάφραση είναι γνωστή από δύο χειρόγραφα που έχουν διασωθεί, αλλά δεν είναι γνωστά ούτε τα ονόματα των χειρογράφων, ούτε το όνομα του μεταφραστή. Όμως, κατά τον John Murdoch², το χειρόγραφο αυτό μπορεί να θεωρηθεί η πιο ακριβής μετάφραση των *Στοιχείων* που έγινε ποτέ. Γιατί, διαβάζοντας κατά λέξη και προσεκτικά το κείμενο, γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι η σειρά των λέξεων, η σύνταξη του κειμένου, οι εκφράσεις και πολλά άλλα στοιχεία είναι περισσότερο ελληνικά παρά λατινικά.

Υπάρχουν επίσης αρκετές μεταφράσεις των *Στοιχείων* στα Λατινικά, οι οποίες προέρχονται από αραβικά χειρόγραφα ή γενικά από αραβικές μεταφράσεις του Ευκλείδη. Οι μεταφράσεις αυτές έχουν τρεις κυρίως πηγές: Τη μετάφραση του al-Hajjaj, όπως την παρουσιάσαμε παραπάνω, τη μετάφραση των Ishaq-Thabit και τις διάφορες εκδόσεις και αναθεωρημένες εκδόσεις του Πέρση al-Tusi.

Δύο είναι οι κύριοι μεταφραστές του Ευκλείδη στα Λατινικά, οι οποίοι χρησιμοποίησαν αραβικά κείμενα. Είναι ο **Gerard της Cremona** (1114-1187), ένας περίφημος μεταφραστής επιστημονικών, φιλοσοφικών και ιατρικών έργων από τα Αραβικά στα Λατινικά και ο Άγγλος μεταφραστής μαθηματικός και φιλόσοφος **Adelard του Bath** (12^{ος} μ.Χ. αιώνας).

Ο Gerard μετέφρασε στα Λατινικά τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη έχοντας ως βασική πηγή την αραβική μετάφραση των Ishaq-Thabit. Όπως προκύπτει από τη λατινική αυτή μετάφραση, ο Gerard είχε χρησιμοποιήσει και άλλα κείμενα και ασφαλώς και την αραβική μετάφραση του al-Hajjaj. Η μετάφραση αυτή του Gerard θεωρείται ότι πλησιάζει περισσότερο τόσο την ελληνική παράδοση όσο και το κείμενο του Ευκλείδη από όλες τις άλλες λατινικές μεταφράσεις που έγιναν από αραβικά κείμενα. Παρόλα αυτά όμως, δε χρησιμοποιήθηκε πάρα πολύ.

Ο Gerard είχε μεταφράσει στα Λατινικά και αρκετά σχόλια που είχαν γίνει πάνω στα *Στοιχεία*. Όπως π.χ. τα σχόλια του al-Nayrizi, τα σχόλια του Muhammad ibn Abdal-Bagi (12^{ος} αιώνας) πάνω στο βιβλίο X των *Στοιχείων* και κομμάτια από τα σχόλια του Πάππου πάνω στο βιβλίο X, από την αραβική μετάφραση του Dimashgi.

¹ M. Gurtze, "Anaritii in decen libros priores Elementorum Euclidis ex interpretatione Cherardi Gremensis", Leipzig 1899. Supplementorum to "Euclidis Opera Omnia" των Heiberg and Menge.

² John Murdoch, "Euclid: Transmission of the Elements". Dictionary of Scientific Biography, New York 1975, σελ. 437.

Η λατινική μετάφραση των *Στοιχείων* από τον Gerard περιέχει και τα 13 βιβλία των *Στοιχείων*, τα βιβλία XIV και XV, καθώς και το έργο "*Δεδομένα*" του Ευκλείδη. Μέχρι σχετικά πρόσφατα, το έργο αυτό θεωρούνταν χαμένο. Όμως το 1901 ο **Axel Anthon Björnbo** βρήκε σε ένα χειρόγραφο στη Ρώμη (κώδικας Reginensis lat. 1268 του 14^{ου} αιώνα) τις μεταφράσεις των βιβλίων X μέχρι XIII, καθώς και τα βιβλία XIV και XV.

Τρία χρόνια αργότερα, το 1904, ο Björnbo ανακάλυψε στο Παρίσι, στο Boulogne-sur-Mer, στο Bruges και στην Οξφόρδη, χειρόγραφα λατινικής μετάφρασης από τα Αραβικά, που περιείχαν ολόκληρο το κείμενο του Gerard¹. (Πρόκειται για τους κώδικες: Codex Paris. 7216 του 15^{ου} αιώνα, Cod. Bononiens. 196 του 14^{ου} αιώνα, Cod. Brugens. 521 του 14^{ου} αιώνα και Cod. Digby 174 του 12^{ου} αιώνα).

Ο Adelard του Bath είχε μεταφράσει στα Λατινικά από αραβικές κυρίως πηγές πολλά μαθηματικά και φιλοσοφικά έργα. Μεταξύ αυτών ήταν και τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Ο ίδιος είχε κάνει τρεις εκδόσεις των *Στοιχείων* και είχε επιμεληθεί αρκετές επανεκδόσεις και αναθεωρημένες εκδόσεις τους. Η πρώτη (I) έκδοση είναι εκείνη που είναι πραγματική μετάφραση από τα Αραβικά. Έχει βασιστεί στην αραβική έκδοση του al-Hajjaj και έχει χρησιμοποιήσει και κάποια άλλα κείμενα διαφορετικά από αυτά του Hajjaj. Π.χ. η μετάφραση του Adelard περιέχει το πόρισμα της πρότασης 4 του βιβλίου II, και το πόρισμα της πρότασης 8 του βιβλίου VI που δεν περιέχονται στη μετάφραση του Hajjaj και δεν περιέχει την πρόταση 12 του βιβλίου VI, που περιέχεται στο κείμενο του Hajjaj. Υπολογίζεται ότι η λατινική αυτή μετάφραση των *Στοιχείων* έγινε γύρω στο 1120 μ.Χ. Χειρόγραφα που περιέχουν το κείμενο αυτής της μετάφρασης υπάρχουν στο Βρετανικό Μουσείο, στην Οξφόρδη και αλλού.

Η δεύτερη έκδοση των *Στοιχείων* που έκαμε ο Aderlard δεν είναι μετάφραση κάποιων αραβικών κειμένων, όπως είναι η έκδοση I, αλλά μια ελεύθερη, κατά κάποιον τρόπο περιληπτική, έκδοση των *Στοιχείων*, η οποία είχε μεγάλη αποδοχή. Το αρχαιότερο κείμενο της έκδοσης αυτής υπάρχει στην Οξφόρδη (Trinity College 47), σε ένα χειρόγραφο που παρουσιάζει το κείμενο των *Στοιχείων* πολύ περιληπτικά. Οι αποδείξεις των προτάσεων, για παράδειγμα, είναι απλές υποδείξεις για την ανακάλυψη της απόδειξης και όχι πλήρεις αναλυτικές αποδείξεις, όπως αυτές που υπάρχουν στο κείμενο του Ευκλείδη. Η έκδοση II περιείχε προσεγμένες μεταφράσεις των ορισμών, των αιτημάτων, των κοινών εννοιών και των προτάσεων που ήταν κατανοητές και αυτό συντέλεσε στην μεγάλη απο-

¹ T. L. Heath, "*Euclid: The Thirteen Books of the Elements*", σελ. 93.

δοχή της. Αυτό οδήγησε στη συνέχεια να γίνουν αρκετές επανεκδόσεις της και αναθεωρημένες εκδόσεις και από άλλους εκδότες. Υπάρχουν σήμερα περισσότερες από 50 τέτοιες επανεκδόσεις.

Ο Roger Bacon αναφέρει¹ και μια τρίτη μετάφραση των *Στοιχείων* από τον Adelard. Αυτή είναι μια ειδική έκδοση (III), που έχει αρκετά κοινά σημεία με την έκδοση II, στην οποία και γίνονται αρκετές αναφορές.

Ένας άλλος, επίσης σημαντικός, μεταφραστής των *Στοιχείων* στα Λατινικά από αραβικά κείμενα είναι ο **Johannes Campanus της Novara** (1214-1294) ένας σημαντικός μαθηματικός της εποχής του. Ο Campanus έκαμε μια έκδοση των *Στοιχείων* στα Λατινικά, η οποία ουσιαστικά ήταν η έκδοση II του Adelard με αρκετές συμπληρώσεις κενών, διορθώσεις λαθών, αναθεωρημένες και αναλυτικές αποδείξεις των προτάσεων και μια εντελώς διαφορετική παρουσίαση του κειμένου από αυτήν του Adelard. Η έκδοση αυτή θεωρείται η περισσότερο πλήρης έκδοση των *Στοιχείων* από όλες της λατινο-αραβικές εκδόσεις. Ένα χειρόγραφο της έκδοσης αυτής υπάρχει στο Μόναχο (κωδικός lat. Mon. 13021). Το αρχαιότερο αντίγραφο που σώζεται σήμερα είναι του 1259.

Η σχέση που υπάρχει μεταξύ της έκδοσης II του Adelard και της έκδοσης του Campanus έχει απασχολήσει για αρκετό καιρό τους ιστορικούς των επιστημών. Αν και έχουν επισημανθεί 364 κοινές εκφράσεις των δύο αυτών εκδόσεων, δεν έχει οριστικά κλείσει αυτό το θέμα. Το σίγουρο είναι ότι οι εκδόσεις του Adelard και η έκδοση του Campanus αποτέλεσαν τις βασικές πηγές για τις επόμενες μεταφράσεις και εκδόσεις των *Στοιχείων*.

Εκτός από την έκδοση του Campanus, υπάρχει και ένα άλλο χειρόγραφο (Παρισινός κώδικας B.N. lat. 16646) μιας ανώνυμης έκδοσης, που συνδέεται πολύ στενά με την έκδοση II του Adelard. Ο κώδικας αυτός είναι, κατά πάσα πιθανότητα όμοιος με ένα χειρόγραφο που περιγράφεται στη "*Biblionomia*" (1246) από τον Richard de Fournival. Ο R. de Fournival όμως ταυτίζει αυτό το χειρόγραφο με το έργο "*Euclidis geometria, arithmetica, et stereometria ex commentario Hermannii suculund*" του Hermann von Carinthia, που άκμασε κατά τη δεκαετία 1140-1150 και ήταν ένας σημαντικός και πολύ γνωστός μεταφραστής αστρονομικών και αστρολογικών κειμένων από τα Αραβικά.

Από την εποχή της ευρωπαϊκής Αναγέννησης και εξής έγιναν πολλές μεταφράσεις και εκδόσεις των *Στοιχείων* στα Λατινικά αλλά και σε όλες σχεδόν τις ευρωπαϊκές γλώσσες. Αρχικές πηγές αυτών των μετα-

¹ John Murdoch, "*Euclid: Trasmission of the Elements*", Dictionary of Scientific Biography, New York 1975, σελ. 437-439.

φράσεων και εκδόσεων ήταν αρχικά το ελληνικό χειρόγραφο του Θέωνα, που ήταν το βασικό κείμενο για όλες σχεδόν τις εκδόσεις των *Στοιχείων* μέχρι τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, καθώς και οι αραβικές και λατινικές εκδόσεις που αναφέραμε σε προηγούμενες παραγράφους.

Από το 15^ο αιώνα (με την ανακάλυψη της τυπογραφίας) και εξής έχουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό τυπωμένων εκδόσεων των *Στοιχείων* είτε στο σύνολό τους είτε αποσπασμάτων τους. Δεν είναι ασφαλώς δυνατόν να αναφερθούμε εδώ σε όλες αυτές τις εκδόσεις. Ο Pietro Riccardi παρουσίασε στη Μπολόνια ένα εκτεταμένο έργο, μέσα στο οποίο περιείχε μια σχεδόν πλήρη βιβλιογραφία των εκδόσεων των *Στοιχείων* στις διάφορες γλώσσες¹.

Επίσης, αρκετοί συγγραφείς αναφέρονται στις πρώιμες εκδόσεις των *Στοιχείων* και κυρίως τις τυπωμένες εκδόσεις από το 1482 μέχρι το 1600. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην αρχή αυτής της παραγράφου, ο T. L. Heath αναφέρει 97 τέτοιες εκδόσεις, ο Charles Thomas Stanford αναφέρει 84, ο Max Steck 60 και ο F. J. Duarte 123.

Ο Stanford² διαιρεί τις εκδόσεις των *Στοιχείων* που κυκλοφόρησαν από το 1482 μέχρι το 1600 σε τέσσερις κατηγορίες: Στην πρώτη τοποθετεί τις εκδόσεις που περιέχουν τα έξι πρώτα βιβλία με αποδείξεις και σχήματα στην ελληνική γλώσσα ή στη λατινική ή στην ελληνική μαζί με λατινική μετάφραση. Στη δεύτερη κατηγορία τοποθετεί τις εκδόσεις που το κείμενό τους είναι μόνο ελληνικό ή μόνο λατινικό και περιέχουν μόνο τις εκφωνήσεις των προτάσεων, χωρίς τις αποδείξεις τους και χωρίς σχήματα. Στην τρίτη κατηγορία τοποθετεί όλες τις εκδόσεις των *Στοιχείων* που είναι πλήρεις και είναι γραμμένες σε μια από τις ευρωπαϊκές γλώσσες, καθώς και τις παλαιότερες αραβικές μεταφράσεις. Τέλος, στην τέταρτη κατηγορία τοποθετεί όλες τις αποσπασματικές εκδόσεις των *Στοιχείων* που είχαν μεταφραστεί σε κάποια ευρωπαϊκή γλώσσα.

Η πρώτη τυπωμένη λατινική έκδοση των *Στοιχείων* έγινε στη Βενετία το 1482 από τον Erhard Ratdolt (1443-1528). Το περιεχόμενο αυτής της έκδοσης είναι το κείμενο του Campanus, όπως το περιγράψαμε παραπάνω. Η έκδοση αυτή ανατυπώθηκε πολλές φορές τα επόμενα 100 χρόνια σε αρκετές ευρωπαϊκές γλώσσες.

Το 1501 ο G. Valla δημοσίευσε στη Βενετία στη μεγάλη εγκυκλοπαίδεια "*De expetendis et fugiendis rebus*" έναν αριθμό προτάσεων με τις αποδείξεις

¹ Pietro Riccardi, "*Saggio di una bibliografia Euclida*", Bologna 1887-1893 σε πέντε μέρη.

² Charles Thomas Stanford, "*Early Editions of Euclid's Elements*".

τους και σχόλια, που είχε μεταφράσει από ένα ελληνικό χειρόγραφο το οποίο είχε στην κατοχή του (Κώδικας Mutin IIIB, 4, του 15^{ου} αιώνα).

Η πρώτη έκδοση όλων των βιβλίων των Στοιχείων στα Λατινικά που βασίστηκε σε ελληνικά χειρόγραφα έγινε στη Βενετία το 1505 από τον Bartolomeo Zamberti (γεννήθηκε το 1473). Το έργο αυτό περιέχει όλα τα βιβλία των Στοιχείων με μετάφραση από ελληνικό κείμενο που ανήκει στο Θέωνα. Περιέχει επίσης και μερικά από τα άλλα έργα του Ευκλείδη, τα οποία είχαν δημοσιευθεί στην εγκυκλοπαίδεια "*De expetendis et fugiendis rebus*" του Valla. Ο Zamberti ισχυρίστηκε ότι οι δικές του μεταφράσεις και εκδόσεις των Στοιχείων προέρχονται από ελληνικά κείμενα, τα οποία θεωρεί πιο αυθεντικά. Αυτό τον οδήγησε να κάμει τις απαραίτητες αναδιατάξεις στην έκδοση του Campanus, να προσθέσει όσα στοιχεία κατά τη γνώμη του είχαν αφαιρεθεί, να κάμει τις απαραίτητες συμπληρώσεις, νέες λύσεις των προτάσεων και γενικά κάθε αλλαγή που θα έφερνε τη μετάφραση του Campanus πιο κοντά στο αρχικό κείμενο του Ευκλείδη.

Η αντίδραση των οπαδών του Campanus ήταν άμεση. Το 1509 προετοίμασαν στη Βενετία ένα νέο κείμενο, βασισμένο στην έκδοση του Campanus, το οποίο δημοσιεύτηκε τον ίδιο χρόνο από τον Luca Pacioli. Η έκδοση αυτή, κατά τον Pacioli, απαλλάσσει την παλαιότερη έκδοση του Campanus από τα διάφορα τυπογραφικά λάθη που είχαν παρεισφρήσει, καθώς και από τα λάθη των σχημάτων και έτσι η έκδοση του Campanus αποτελεί πιστή μετάφραση των Στοιχείων.

Άρχισε έτσι ένας επιστημονικός και εκδοτικός ανταγωνισμός μεταξύ των οπαδών του Campanus από τη μια και του Zamberti από την άλλη. Ξεκίνησε μια σειρά δημοσιεύσεων, εκδόσεων και επανεκδόσεων των Στοιχείων και από τις δύο πλευρές που κράτησε αρκετά χρόνια. Η πρώτη έκδοση αυτής της σειράς έγινε στο Παρίσι το 1516.

Το 1533 εκδίδεται στη Βασιλεία η πρώτη τυπωμένη ελληνική έκδοση των Στοιχείων, (η *Editio Princeps*), από το Γερμανό θεολόγο Simon Grynaeus (πέθανε το 1541), που ήταν τότε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Ο τίτλος της έκδοσης αυτής ήταν:

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ

Εἰς τοῦ αὐτοῦ τό πρώτον,

ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ̄.

Adjecta praefatiuncula in qua de disciplines

Mathematicis nonnihil.

BASILEAE APUD IOAN. HERVAGIUM ANNO

M.D.XXXIII. MENSE SEPTEMBRI

Η έκδοση αυτή περιέχει τα 13 βιβλία των *Στοιχείων*, τα βιβλία XIV και XV και τα σχόλια του Πρόκλου. Είναι η μόνη πλήρης έκδοση των *Στοιχείων* πριν από το 18^ο αιώνα. Αποτελείται από 286 σελίδες για το κείμενο των *Στοιχείων*, και από άλλες 115 σελίδες για τα σχόλια του Πρόκλου. Ο Grynaeus στηρίχθηκε σε δύο ελληνικά χειρόγραφα, χρησιμοποίησε τα σχόλια του Πρόκλου και κάποιες αναφορές από τη λατινική μετάφραση του Zamberti. Τα ελληνικά χειρόγραφα του τα έδωσαν δύο φίλοι του, όπως αναφέρει ο ίδιος. Το πρώτο του το έδωσε στη Βενετία ο Lazarus Bayfios (Lazare de Baïf), πρεσβευτής της Γαλλίας στη Βενετία. Και το δεύτερο του το έδωσε στο Παρίσι ο Ioann. Rvelliuss (Jean Ruel). Ο Heiberg βρήκε αυτά τα δύο χειρόγραφα¹. Το πρώτο είναι ο Κώδικας Venetus Marcianus 301 και το δεύτερο ο κώδικας Paris. gr. 2343 (του 16^{ου} αιώνα).

Το 1536 ο Γάλλος μαθηματικός Orontius Finaeus (Oronce Fine, 1494-1555) δημοσίευσε στο Παρίσι μια έκδοση των *Στοιχείων* στα Ελληνικά με μετάφραση στη λατινική γλώσσα. Η έκδοση αυτή στηριζόταν στη λατινική μετάφραση του Zamberti και περιελάμβανε μόνο τα έξι πρώτα βιβλία των *Στοιχείων*.

Το 1543 ο Niccola Tartaglia δημοσίευσε την πρώτη έκδοση των *Στοιχείων* στα Ιταλικά. Η έκδοση αυτή στηρίχθηκε στις εκδόσεις των Zamberti και Campanus, με περισσότερη προτίμηση στον Zamberti.

Στη Ρώμη ο Angelo Caiani δημοσίευσε το 1545 μια έκδοση των *Στοιχείων* στα Ελληνικά με παράλληλη λατινική μετάφραση.

Ο Joachim Camerarius δημοσίευσε στη Λιψία το 1549 τα έξι πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* στα Ελληνικά με μια λατινική μετάφραση.

Ο Ioan. Scheubel δημοσίευσε στη Βασιλεία το 1550 τα έξι πρώτα βιβλία στα Ελληνικά και τα Λατινικά.

Το 1557 ο Jacques Peletier du Mans δημοσίευσε στη Λυών τα 6 πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* στα Γαλλικά και Λατινικά. Η έκδοση αυτή βασιζόταν στην αραβο-λατινική μετάφραση του Campanus.

Την ίδια χρονιά, ο Stephanus Gracilis δημοσίευσε στο Παρίσι όλα τα βιβλία των *Στοιχείων*, καθώς και τα βιβλία XIV και XV στα Ελληνικά με λατινική μετάφραση. Το έργο αυτό επανεκδόθηκε την επόμενη χρονιά, καθώς και αρκετές φορές αργότερα.

Το 1564 δημοσιεύτηκε στο Στρασβούργο από τον Conrad Dasypodius ένα έργο δίγλωσσο (στα Ελληνικά και Λατινικά), το οποίο αποτελείται από τρία μέρη: Το πρώτο μέρος περιέχει το βιβλίο I με σχόλια. Στην εισα-

¹ T. L. Heath, "Euclid: The Thirteen Books of the Elements", σελ.101.

γωγή του πρώτου βιβλίου αναφέρει ότι για 25 χρόνια υπήρχε κανονισμός του σχολείου, σύμφωνα με τον οποίο για να προαχθούν οι μαθητές έπρεπε να μάθουν το βιβλίο I των *Στοιχείων*. Γι' αυτό και εξέδωσε το έργο αυτό, αφού δεν υπήρχαν πλέον άλλα αντίτυπά του. Το δεύτερο μέρος αποτελείται από το βιβλίο II μαζί με το βιβλίο του Βαρλαάμ του μοναχού, για την αριθμητική πιστοποίηση του βιβλίου II των *Στοιχείων*. Το τρίτο μέρος περιέχει μια αναθεωρημένη παρουσίαση των βιβλίων III μέχρι και XIII. Το έργο αυτό επανεκδόθηκε το 1571 και στην εισαγωγή της έκδοσης αυτής αναφέρει ο Dasypodius ότι το βιβλίο I διδασκόταν σε όλα τα Γυμνάσια και ότι στο δικό του σχολείο διδασκόταν στην πρώτη τάξη.

Το 1566 ο Γάλλος ερευνητής Francois de Foix, Κόμης της Candale (1502-1594), δημοσίευσε στο Παρίσι τα 13 βιβλία των *Στοιχείων*, καθώς και τα βιβλία XIV και XV στα Λατινικά με γαλλική μετάφραση. Η έκδοση αυτή είχε ως βάση τις εκδόσεις των Zamperti και Campanus.

Υπάρχουν επίσης και αρκετές ακόμα εκδόσεις των *Στοιχείων* από το 1551 μέχρι το 1564. Μια έκδοση στα Αγγλικά, αλλά μόνο των έξι πρώτων βιβλίων, υπάρχει στο έργο "*The Pathway to Knowledge*" του Robert Recorder το 1551. Δύο στα Γερμανικά του Johann Scheubel και Wilhelm Holtzmann το 1558 και 1562 αντίστοιχα, μια στα Γαλλικά του Pierre Forcadel στο Παρίσι το 1564 κ.ά.

Η πρώτη σημαντική μετάφραση των *Στοιχείων* στα Αγγλικά έγινε από τον Sir Henry Billingsley, ο οποίος είχε διατελέσει και Δήμαρχος του Λονδίνου. Η έκδοση αυτή έγινε στο Λονδίνο το 1570 και είχε μια εισαγωγή από τον John Dee. Ο τίτλος της έκδοσης αυτής είναι:

THE ELEMENTS OF GEOMETRIE
of the most ancient Philosopher
EUCLIDE
of Megara

Στη βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου του Princeton υπάρχει ένα αντίτυπο της πρώτης ελληνικής έντυπης έκδοσης των *Στοιχείων* συνδεδεμένης με μια έκδοση που έγινε στη Βασιλεία το 1558 και είναι συνδυασμός των μεταφράσεων των Zamberti και Campanus. Στην έκδοση αυτή υπάρχουν αρκετές παρατηρήσεις και σημειώσεις του Henry Billingsley (στο ελληνικό κείμενο υπάρχουν 5 τέτοιες σημειώσεις, ενώ στην έκδοση Campanus–Zamperti υπάρχουν 200). Αυτό σημαίνει ότι πηγή ή μια από τις πηγές του έργου του Billingsley ήταν αυτό το κείμενο της βιβλιοθήκης του Πανεπιστημίου του Princeton.

Η πιο σημαντική λατινική μετάφραση των *Στοιχείων* είναι αυτή που έγινε από το Federico Commandinus, στο Pesano της Ιταλίας το 1572.

Η έκδοση αυτή απετέλεσε τη βάση για όλες τις εκδόσεις των *Στοιχείων* που ακολούθησαν μέχρι το 19^ο αιώνα. Για την έκδοση αυτή ο Commandinus χρησιμοποίησε την ελληνική έκδοση της Βασιλείας του 1533, καθώς και άλλα ελληνικά χειρόγραφα. Ακολούθησε πιστά το κείμενο του ελληνικού χειρογράφου, πρόσθεσε κάποια σχόλια αρχαίων σχολιαστών και πρόσθεσε ακόμα εύστοχες δικές του παρατηρήσεις. Τα σχόλια προέρχονται από ένα ελληνικό χειρόγραφο (Κώδικας Vat. 192). Ο τίτλος του έργου του Commandinus ήταν "*Euclidis elementorum libri XV, uno cum scholiis antiquis*".

Το έργο αυτό επανεκδόθηκε αρκετές φορές ολόκληρο ή μέρος του σε πολλές γλώσσες. Όλες σχεδόν οι εκδόσεις των *Στοιχείων* που έγιναν στα Ελληνικά με λατινική μετάφραση, είχαν ως βάση το έργο του Commandinus και ήταν όλες πολύ κοντά στην έκδοση του Θέωνα. Οι εκδόσεις του Henry Briggs¹ και του David Gregory², για παράδειγμα, που ήταν οι καθιερωμένες πηγές για όλες τις πριν από το 19^ο αιώνα εκδόσεις, είχαν ως βάση την έκδοση του Commandinus. Επίσης οι λατινικές εκδόσεις που ακολούθησαν, όπως π.χ. αυτές του Rober Simson (1756) και του Samuel Horsley (1802) ακολουθούσαν πιστά την έκδοση του Commandinus.

Η έκδοση του Gregory στα Ελληνικά συνοδευόταν από μια λατινική μετάφραση και μέχρι την έκδοση των Heiberg και Menge ήταν η μόνη έκδοση που περιείχε όλα τα έργα του Ευκλείδη. Ο ίδιος αναφέρει ότι ακολουθεί κυρίως το έργο του Commandinus, αλλά έχει κάνει πολλές διορθώσεις σε αρκετές παραγράφους. Η εργασία αυτή φαίνεται να εξαρτάται αρκετά και από την "*Editio Princeps*" του Simon Grynaeus, που έγινε στη Βασιλεία το 1533.

Μια επίσης σημαντική έκδοση των *Στοιχείων* είναι η έκδοση του Γερμανού Christopher Clavius (1537-1612). Η πρώτη έκδοση έγινε το 1574 στα Λατινικά. Ακολούθησαν πολλές επανεκδόσεις μέχρι το θάνατο του συγγραφέα. Ο Clavius λέει ότι το έργο αυτό δεν είναι μια απλή μετάφραση των *Στοιχείων*, αλλά ένα έργο που προέκυψε από στοιχεία που ο ίδιος είχε συγκεντρώσει από προηγούμενα έργα, όπως του Campanus, Zamperti, Commandinus και άλλων. Φαίνεται ότι στην έκδοσή του αυτή ο Clavius ακολουθεί το χειρόγραφο του Θέωνα (λατινική μετάφραση)

¹ Henry Briggs, "*Elementorum Euclidis libri VI Priores*", London 1620.

² David Gregory, "*Euclid's Opera Omnia*", Oxford 1703.

και πιστεύει ότι οι αποδείξεις που υπάρχουν στο χειρόγραφο αυτό εκφράζουν πιστά τις αποδείξεις των προτάσεων των *Στοιχείων*. Ο Clavius αναφέρει επίσης ότι στις 486 προτάσεις που υπήρχαν στο ελληνικό κείμενο αυτός πρόσθεσε και άλλες 671. Η έκδοση του Clavius μνημονεύεται από πολλούς μεταγενέστερους μεταφραστές των *Στοιχείων*, σχολιαστές, συγγραφείς και εκδότες. Χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη μετάφραση των *Στοιχείων* στα Κινέζικα το 1700.

Κατά το 17^ο και 18^ο αιώνα έγιναν πολλές εκδόσεις και επανεκδόσεις των *Στοιχείων* σε διάφορες γλώσσες. Παρουσιάστηκαν εκατοντάδες εκδόσεις στα Λατινικά, στα Ελληνικά, καθώς και στα Ελληνικά και Λατινικά. Επίσης, εμφανίστηκε ένας πολύ μεγάλος αριθμός εκδόσεων σε διάφορες ευρωπαϊκές γλώσσες. Υπήρξαν εκδόσεις που περιείχαν όλα τα βιβλία των *Στοιχείων*, εκδόσεις που περιείχαν μερικά μόνο βιβλία, ειδικές εκδόσεις για ειδική χρήση, εκδόσεις που περιείχαν μόνο αποσπάσματα από τα έργα του Ευκλείδη. Υπήρξαν και αρκετές εκδόσεις που περιείχαν και τα 13 βιβλία των *Στοιχείων* μαζί με τα βιβλία XIV και XV και μερικές από αυτές περιείχαν και άλλα έργα του Ευκλείδη.

Η έκδοση του Gregory το 1703 είναι η μοναδική έκδοση μέχρι και το πρώτο μισό του 19^{ου} αιώνα που περιείχε όλα τα έργα του Ευκλείδη.

Από τις πρώτες εκδόσεις και μεταφράσεις των *Στοιχείων* και των άλλων έργων του Ευκλείδη, οι εκδότες, οι συγγραφείς και οι μεταφραστές προσπαθούσαν και συνεχώς αναζητούσαν να ανακαλύψουν όσο το δυνατόν πιο αυθεντικά κείμενα του Ευκλείδη. Κείμενα όσο το δυνατόν αρχαιότερα, τα οποία θα απέδιδαν πιο πιστά το αρχαίο ελληνικό κείμενο των *Στοιχείων*, όπως και των υπόλοιπων έργων του Ευκλείδη. Με την πάροδο του χρόνου, με την ανακάλυψη όλο και περισσότερων αρχαίων ελληνικών χειρογράφων, την εμφάνιση αρκετών εκδόσεων, μεταφράσεων και σχολίων, σε συνδυασμό με την εξέλιξη των Μαθηματικών και της Τεχνολογίας και την ανάπτυξη και άλλων επιστημονικών μέσων ανάλυσης, παρατήρησης και μελέτης των αρχαίων κειμένων, η προσπάθεια για τον εντοπισμό αυθεντικών κειμένων όχι μόνο του Ευκλείδη αλλά και των άλλων μεγάλων αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων έγινε πιο έντονη.

Μια καλή προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή έγινε από το Γάλλο φιλόλογο F. Peyrard, ο οποίος από το 1814 ως το 1818 δημοσίευσε στο Παρίσι τα *Στοιχεία* μαζί με το έργο "*Δεδομένα*" του Ευκλείδη σε τρεις τόμους. Το έργο αυτό ήταν γραμμένο στα Ελληνικά, στα Λατινικά και τα Γαλλικά

και είχε στηριχθεί στην "*Editio Princeps*" του 1533. Ίσως αυτό ήταν και το λάθος του Peyrard. Θα μπορούσε με τα στοιχεία που είχε στη διάθεσή του, τα ελληνικά χειρόγραφα και τα άλλα μέσα που διέθετε, να δημιουργήσει ένα νέο έργο, που να αποδίδει αυθεντικότερα το αρχαίο ελληνικό κείμενο, όπως έκαμε εβδομήντα χρόνια αργότερα ο Heiberg.

Το 1808, κατά την εκστρατεία του Μ. Ναπολέοντα στη Ιταλία, οι φιλόλογοι και οι άλλοι επιστήμονες που τον συνόδευαν, εντόπισαν σε διάφορες ιταλικές βιβλιοθήκες και ιδιαίτερα στη βιβλιοθήκη του Βατικανού αξιόλογα χειρόγραφα, τα οποία έστελναν στο Παρίσι. Από τα χειρόγραφα αυτά ο Peyrard ξεχώρισε δύο που περιείχαν κείμενα των έργων του Ευκλείδη. Τα χειρόγραφα αυτά αποτελούν τους **Βατικανούς Κώδικες 190 και 1038** (Vat. 190 και Vat. 1038). Ένα ακόμα χειρόγραφο (Vat. 204) με παρόμοιο περιεχόμενο βρισκόταν ήδη στο Παρίσι. Ο Peyrard εξέτασε τους κώδικες αυτούς και παρατήρησε ότι ο Βατικανός κώδικας 190, ο οποίος βρισκόταν σε πολύ καλή κατάσταση, περιείχε ελληνικά χειρόγραφα των *Στοιχείων* πολύ παλαιότερα από το χειρόγραφο του Θέωνα, το οποίο είχαν χρησιμοποιήσει μέχρι τότε όλες οι έγκυρες εκδόσεις των *Στοιχείων*. Ο Peyrard παρατήρησε ότι στο χειρόγραφο του κώδικα Vat. 190 έλλειπε το πόρισμα της πρότασης 33 του βιβλίου VI, το οποίο είχε προσθέσει ο ίδιος ο Θέων, σύμφωνα με δική του δήλωση. Επίσης, από το χειρόγραφο έλειπε ο τίτλος που αναγνώριζε την έκδοση του Θέωνα. Τα στοιχεία αυτά μαζί με άλλες διαφορές που παρουσίαζε ο Βατικανός Κώδικας 190 από το κείμενο του Θέωνα, οδήγησαν τον Peyrard να συμπεράνει ότι το χειρόγραφο Vat. 190 ήταν ένα αντίγραφο του κειμένου του Ευκλείδη και παλαιότερο από το χειρόγραφο του Θέωνα.

Ο Peyrard χρησιμοποιώντας τα κείμενα του Κώδικα Vat.190, του Κώδικα Vat.1037, διάφορα άλλα χειρόγραφα που είχε στη διάθεσή του στο Παρίσι, στοιχεία που βρήκε στην έκδοση του Gregory του 1703, καθώς και άλλα στοιχεία, διόρθωσε το κείμενο του έργου "*Editio Princeps*" του Simon Grynaeus (Βασιλεία, 1533) και δημιούργησε έτσι ένα νέο έργο τριών τόμων, το οποίο περιέχει τα *Στοιχεία* και το έργο "*Δεδομένα*" του Ευκλείδη, όπως το περιγράψαμε παραπάνω.

Άλλα παλαιότερα χειρόγραφα που εμφανίστηκαν και άλλες εκδόσεις που έγιναν, άρχισαν να βελτιώνουν το κείμενο του Peyrard. Κατά την περίοδο 1824-1825 κυκλοφόρησε στο Βερολίνο ένα δίτομο έργο, το οποίο περιείχε τα έξι πρώτα βιβλία των *Στοιχείων*. Το κείμενο του έργου αυτού, που είχε γραφεί από τους J. G. Camerer και C. F. Hauber είχε βασιστεί στην έκδοση του Peyrard και ήταν γραμμένο στα Ελληνικά με ταυτόχρονη λατινική μετάφραση. Περιείχε επίσης και σημαντικά σχόλια.

Ο Heath χαρακτηρίζει το έργο αυτό ως πραγματική εγκυκλοπαίδεια και γράφει ότι είναι το πιο πλήρες σε σχόλια κείμενο με πληροφορίες από τον Πρόκλο, τον Πάππο, τον Tartaglia, τον Commandinus, τον Clavius, τον Peletier, τον Barrow, τον Borelli, το Wallis, τον Tacquer, τον Austin, τον Simson και τον Plarfair.

Ο Martin Klamroth, στο έργο του "*Ueber den arabischen Euclid*", που γράφτηκε το 1881, εκφράζει την άποψη ότι οι μεσαιωνικές μεταφράσεις πιθανόν να αντιπροσωπεύουν πιο πιστά την παλαιότερη μορφή του κειμένου όχι μόνο από το χειρόγραφο του Θέωνα αλλά και από το χειρόγραφο του Βατικανού Ελληνικού Κώδικα 190. Με την έννοια αυτή, οι αραβικές μεταφράσεις των *Στοιχείων* είναι πιο κοντά στο αρχικό κείμενο του Ευκλείδη.

Διαμετρικά αντίθετη άποψη είχε ο Δανός ιστορικός των επιστημών J. L. Heiberg. Ο Heiberg παρατήρησε ότι τα αραβικά κείμενα παρουσιάζουν χάσματα. Από τα κείμενα λείπουν πολλές προτάσεις, πορίσματα, λήμματα και άλλα στοιχεία που υπάρχουν σε μεταγενέστερες εκδόσεις. Επομένως, η αραβική μετάφραση πρέπει να βασίστηκε σε κάποια συντομευμένη έκδοση του αρχαίου ελληνικού κειμένου. Κατά τον Heiberg, λόγω των ακρωτηριασμών που γίνονται στο αραβικό κείμενο και της μη πιστής αραβικής μετάφρασης, δεν είναι δυνατόν τα αραβικά κείμενα να χρησιμοποιηθούν ως βάση για την έκδοση των *Στοιχείων*.

Σχετικά με το κείμενο του Βατικανού Ελληνικού κώδικα Vat.190, ο Heiberg όπως και ο Peyrard, είχε την άποψη ότι είναι αρχαιότερο από το χειρόγραφο του Θέωνα. Την άποψη του αυτή τη στηρίζει σε πολλά στοιχεία. Όπως π.χ. στο ότι το κείμενο του Vat.190 είναι γραμμένο με το πνεύμα και την αυστηρότητα του Ευκλείδη. Ότι δεν περιέχει το πόρισμα της πρότασης 33 του βιβλίου VI, το οποίο ήταν προσθήκη του ίδιου του Θέωνα. Ότι τα αποσπάσματα των *Στοιχείων* που αναφέρουν αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, αλλά και οι μεταγενέστεροι σχολιαστές και συγγραφείς, σχεδόν στο σύνολό τους, είναι πιο κοντά στο χειρόγραφο του κώδικα Vat.190 παρά στο κείμενο του Θέωνα.

Ο Heiberg αναφέρει¹ ότι αποτελεί δόξα για τον F. Peyrard το γεγονός ότι αυτός από τα άδυτα του Βατικανού έφερε στο φως της δημοσιότητας έναν κώδικα "*αρχαίο και υπεραρχαιότατο σε σύγκριση με άλλους*", το Βατικανό Ελληνικό κώδικα 190, και διέγινωσε την αξία του και την υπεροχή του. Όμως ο Heiberg επικρίνει τον Peyrard για το ότι δε χρησιμοποίησε παντού ορθή και σταθερή κρίση, δεν έμεινε σταθερά στο εύρη-

¹ J. L. Heiberg and H. Menge, "*Euclidis Opera Omnia*", Εισαγωγή

μά του και αναθεώρησε την έκδοση "*Editio Princeps*" της Βασιλείας χωρίς να χρησιμοποιήσει καλούς κώδικες για αναθεώρηση της έκδοσης του Θέωνα. Κατά τον Heiberg ο Peyrard δημιούργησε ένα έργο, το οποίο εκτός των άλλων είναι και δύσχηστο.

Ο Heiberg αναφέρεται κριτικά και στην έκδοση της Βασιλείας, την οποία διόρθωσε ο Peyrard. Κατά τη γνώμη του¹, "*τα Στοιχεία του Ευκλείδη για τρεις περίπου αιώνες είχαν ως κριτικό τους θεμέλιο την πρώτη δια του τύπου έκδοση που έγινε στη Βασιλεία το 1533. Ποιας ποιότητας ήταν το θεμέλιο αυτό κατανοείται από το γεγονός ότι η έκδοση αυτή, σύμφωνα με τη συνήθεια της εποχής εκείνης, έγινε ακολουθώντας πιστά ελάχιστους και όχι τους άριστους κώδικες, καιτοι υπήρχαν κώδικες των Στοιχείων αρχαιότατοι και άριστοι και σε αριθμό που δύσκολα ανέρχονται οι κώδικες οποιουδήποτε άλλου συγγραφέα*".

Κατά το τελευταίο πέμπτο του 19^{ου} αιώνα οι **J. L. Heiberg** και **H. Menge** αποφάσισαν να εκδώσουν όλα τα γνωστά έργα του Ευκλείδη. Μελέτησαν το Βατικανό ελληνικό κώδικα 190, το έργο του Peyrard, όλους τους μέχρι τότε γνωστούς κώδικες των έργων του Ευκλείδη, το χειρόγραφο του Θέωνα, τις μεταφράσεις και εκδόσεις που είχαν στηριχθεί στο κείμενο του Θέωνα, αφαίρεσαν ένα μεγάλο αριθμό από προσθήκες που είχαν γίνει στα κείμενα του Ευκλείδη σε προηγούμενες μεταφράσεις και εκδόσεις, στηρίχθηκαν στο χειρόγραφο του Βατικανού ελληνικού κώδικα 190 που το θεωρούσαν ως το αρχαιότερο ελληνικό κείμενο, συνέλεξαν κομμάτια από γνωστούς παπύρους και από αναφορές στο έργο του Ευκλείδη και άλλων αρχαίων μαθηματικών και φιλοσόφων. Μελέτησαν τα σχόλια, τις παραπομπές και τις διάφορες αναφορές που είχαν γίνει πάνω στο έργο γενικά του Ευκλείδη και κατόρθωσαν να δημιουργήσουν μια **κριτική έκδοση**, στην οποία περιέχονται τα *Στοιχεία* και τα άλλα μέχρι τότε γνωστά έργα του Ευκλείδη.

Το έργο αυτό, το οποίο θα αναλύσουμε αμέσως παρακάτω, αποτελείται από οκτώ κύριους τόμους και έναν τόμο συμπληρωματικό. Έγινε κατά την περίοδο 1883-1916 και **περιέχει το πιο αυθεντικό κείμενο** του έργου του Ευκλείδη.

Σε ό,τι αφορά τους κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για την έκδοση αυτή, ο Heiberg στην εισαγωγή του έργου αναφέρει ότι χρησιμοποίησε:

¹ J. L. Heiberg and H. Menge, "*Euclidis Opera Omnia*", Εισαγωγή

- ♦ Το Βατικανό κώδικα 190, που αποτελείται από δύο τόμους του 10^{ου} αιώνα.
- ♦ Το Βοδλειακό, Δορβιλιακό κώδικα 10,1 (Bodleian MS, D' Orville), που είχε γραφεί το 888 πάνω σε περγαμηνή.
- ♦ Το Φλωρεντινό κώδικα 28,3 του 10^{ου} αιώνα.
- ♦ Το Βιενναίο ελληνικό κώδικα 103 του 11^{ου} αιώνα.
- ♦ Τον κώδικα της Δημοτικής Βιβλιοθήκης της Μπολόνια και
- ♦ Τον ελληνικό Παρισινό κώδικα 2466.

Το σπουδαίο αυτό έργο των Heiberg και Menge έχει τίτλο "*Euclidis Opera Omnia*", εκδόθηκε στη Λιψία κατά την περίοδο 1883-1916 από τον οίκο Teubner (*Teubner Classical Library*). Είναι γραμμένο στα Ελληνικά και απέναντι από το ελληνικό κείμενο υπάρχει λατινική μετάφραση. Το έργο αυτό περιέχει τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και από τα υπόλοιπα έργα του, τα "*Δεδομένα*", τα "*Φαινόμενα*", τα "*Στοιχεία Μουσικής*", τα "*Οπτικά*" και τα "*Κατοπτρικά*". Επίσης περιέχει μια πλήρη ανάλυση του ελληνικού χειρογράφου των *Στοιχείων*, όπως αυτό είχε γραφεί από το Θέωνα, καθώς και ανάλυση διάφορων άλλων ελληνικών χειρογράφων που θεωρούνται του Θέωνα. Υπάρχουν επίσης σχόλια, αναφορές και παρατηρήσεις του Heiberg, ο οποίος αιτιολογεί γιατί αυτά τα ελληνικά χειρόγραφα θεωρούνται αρχαιότερα από το κείμενο του Θέωνα. Υπάρχουν τα σχόλια πάνω στα *Στοιχεία* κάποιων ανώνυμων σχολιαστών, τα σχόλια του Μαρίνου πάνω στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη και τα σχόλια του al-Nayrizi πάνω στα βιβλία I μέχρι X των *Στοιχείων* στην έκδοση του Gherard της Cremona. Τέλος στους τόμους VI και VIII υπάρχουν και αρκετά σχόλια αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών για τα μικρότερα έργα του Ευκλείδη.

Αναλυτικά, το περιεχόμενο αυτού του έργου έχει ως εξής:

1. Ο τόμος I, με τίτλο "*Elementa I-IV*" περιέχει τα 4 πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* και εκδόθηκε από τον J. L. Heiberg το 1883.
2. Ο τόμος II, με τίτλο "*Elementa V-IX*" περιέχει τα βιβλία των *Στοιχείων* από το V μέχρι και το IX και έχει εκδοθεί από τον Heiberg το 1884.
3. Ο τόμος III με τίτλο "*Elementa X*" περιέχει μόνο το βιβλίο X των *Στοιχείων* "*περί ασυμμέτρων*" και εκδόθηκε από τον Heiberg το 1886.

4. Ο τόμος IV με τίτλο "*Elementa XI-XIII*" περιέχει τα βιβλία XI μέχρι XIII των *Στοιχείων* και εκδόθηκε από το Heiberg το 1885.
5. Ο τόμος V με τίτλο "*Elementa qui Feruntur XIV-XV, Scholia in Elementa*", περιέχει τα βιβλία XIV του Υψικλή, το βιβλίο XV, καθώς και σχόλια πάνω στα βιβλία αυτά του ίδιου του Heiberg. Έχει εκδοθεί από τον Heiberg το 1888.
6. Ο τόμος VI με τίτλο "*Data cum Commentario Marini et Scholiis antiquis*", περιέχει το έργο "*Δεδομένα*" του Ευκλείδη, τα σχόλια του Μαρίνου και σχόλια ανώνυμων σχολιαστών. Έχει εκδοθεί από τον H. Menge το 1896.
7. Ο τόμος VII με τίτλο "*Optica, opticarum recensio Theonis, catoptrica cum scholiis antiquis*", περιέχει τα έργα "*Οπτικά*" και "*Κατοπτρικά*" του Ευκλείδη, το ελληνικό χειρόγραφο του Θέωνα και σχόλια αρχαίων ανώνυμων σχολιαστών, καθώς και του Heiberg. Έχει εκδοθεί από τον Heiberg το 1895.
8. Ο τόμος VIII, με τίτλο "*Phaenomena et scripta musica*" είναι έργο του H. Menge, περιέχει τα έργα "*Φαινόμενα*" και "*Στοιχεία Μουσικής*", εκδόθηκε στο έργο "*Fragmenta collected and arranged*" από τον Heiberg το 1916 και συμπεριλήφθηκε στο "*Euclidis Opera Omnia*".
9. Υπάρχει και ο συμπληρωματικός τόμος (*Supplimentary*), ο οποίος περιέχει το έργο "*Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*" του M. Curtze και έχει εκδοθεί το 1899.

Το έργο των Heiberg και Menge έχει μεταφραστεί στα Αγγλικά από τον **Sir Thomas L. Heath** με εισαγωγή και σχόλια. Ο τίτλος του είναι "***Euclid's The Thirteen Books of the Elements***" και αποτελείται από τρεις τόμους. Η πρώτη και η δεύτερη έκδοση του έργου έγινε από το Cambridge University Press το 1908 και 1925 αντίστοιχα. Υπήρξε επανέκδοση από τον εκδοτικό οίκο Dover Publications Inc. New York, το 1956. Πρόκειται για ένα πολύ αξιόλογο έργο, που περιέχει πολλές πληροφορίες, όχι μόνο για τα *Στοιχεία*, αλλά και για τα υπόλοιπα έργα του Ευκλείδη.

Το έργο των Heiberg και Menge έχει αναπαραχθεί και από τον **Ευάγγελο Σταμάτη** και εκδόθηκε την περίοδο 1952-1957σε τέσσερις τόμους, οι οποίοι έχουν τους τίτλους: Ο 1^{ος} "*Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχεία, Βιβλία 1,2,3,4*". Ο 2^{ος} "*Ευκλείδου Γεωμετρία. Θεωρία Αριθμών. Στοιχείων Βιβλία V, VI, VII, VIII, IX*". Ο 3^{ος} "*Ευκλείδου Περί Ασυμ-*

μέτρων. *Στοιχεία, Βιβλίον Χ'* και ο 4^{ος} *"Ευκλείδου Στερεομετρία. Στοιχεία, Βιβλία XI, XII, XIII"*.

Ο Σταμάτης διατηρεί το αρχαίο ελληνικό κείμενο του Heiberg και μεταφράζει τα Λατινικά στα Ελληνικά (απλή καθαρεύουσα). Έκανε επίσης διάφορες προσθήκες στο κείμενο του Heiberg και στο τέλος κάθε τόμου δίνει αρκετές επεξηγήσεις.

Σημαντικές εκδόσεις των *Στοιχείων* κατά τον 20^ο αιώνα είναι και οι εξής:

Στα Ιταλικά των Federigo Enriques et al., *"Gli Elementi d' Euclide e la critica antica e moderna"*, (Rome-Bologna 1925-1935) σε τέσσερις τόμους.

Στα Ολλανδικά του E. J. Dijksterhuis *"De Elementen van Euclides"*, (Croningen, 1929-1930) σε δύο τόμους.

Στα Ρωσικά, D. D. Morduchai - Boltovskogo *"Nachala Euklida"*, (Moscow-Leningrad, 1948-1950) σε τρεις τόμους.

Στα Γαλλικά από τον Jean Itard, με τίτλο *"Les livres arithmetiques d' Euclide"*, (Paris, 1961), έργο που περιέχει μόνο τα βιβλία VII έως IX.

* * *

Το έργο που παρουσιάζουμε σήμερα δεν αποτελεί μετάφραση κάποιας προηγούμενης έκδοσης των *Στοιχείων*. Είναι ένα έργο σχεδιασμένο από την αρχή, με στόχο να μπορεί να διαβαστεί και να κατανοηθεί ακόμη και από τον μη ειδικό. Πρόθεσή μας είναι να φέρουμε τον αναγνώστη σε επαφή με τα στοιχεία της Γεωμετρίας και της Θεωρίας Αριθμών των αρχαίων Ελλήνων, που είναι ένας θησαυρός σοφίας και πηγή γνώσης, καθώς και πνευματική κληρονομιά ολόκληρης της ανθρωπότητας.

Το έργο έχει γραφεί με βάση τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, όπως αυτά παρουσιάζονται από διάφορους συγγραφείς. Είναι γραμμένο στη νεοελληνική γλώσσα, με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό. Προσπαθήσαμε να παρουσιάσουμε, να αναλύσουμε, να επεξηγήσουμε και να σχολιάσουμε τους ορισμούς, τα αιτήματα, τις κοινές έννοιες και τις προτάσεις των *Στοιχείων* με τέτοιο τρόπο, ώστε όλα αυτά να γίνονται πλήρως κατανοητά από τον αναγνώστη. Και αυτό γίνεται χωρίς να αλλοιώνεται το ύφος, η αυστηρότητα και το πνεύμα του Ευκλείδη, όπως αυτό διαπερνά το αρχαίο κείμενο.

Διατηρούμε τη σειρά των προτάσεων, όπως αυτές παρουσιάζονται στην έκδοση των Heiberg και Menge. Στις αποδείξεις των προτάσεων

ακολουθούμε τα βήματα, τις μορφές απόδειξης και τη διαδικασία που ακολουθείται στο αρχαίο κείμενο, παραθέτοντας ταυτόχρονα τα σχήματα και τις απαραίτητες διευκρινίσεις και επεξηγήσεις. Σε μερικές από τις προτάσεις δίνουμε και άλλες, πιο σύγχρονες αποδείξεις και επισημαίνουμε την αξία των προτάσεων και τη γενικότερη εφαρμογή τους.

Το έργο αποτελείται από τρεις τόμους. Ο πρώτος τόμος περιέχει την Επιπεδομετρία των *Στοιχείων*, δηλαδή τα βιβλία I-VI. Ο δεύτερος περιέχει τη Θεωρία αριθμών και τη Θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών, δηλαδή τα βιβλία VII-X και ο τρίτος περιέχει τη Στερεομετρία, δηλαδή τα βιβλία XI-XIII.

Σε κάθε κεφάλαιο (βιβλίο), καθώς και σε κάθε παράγραφο των κεφαλαίων έχουμε δώσει συγκεκριμένους τίτλους, που εμείς επιλέξαμε. Πιστεύουμε ότι οι τίτλοι αυτοί είναι αντιπροσωπευτικοί του περιεχομένου που ακολουθεί.

Στο τέλος κάθε τόμου παραθέτουμε κι έναν ικανό αριθμό ασκήσεων, οι οποίες είναι δυνατόν να λυθούν με τη βοήθεια της ύλης που έχει προηγηθεί.

Επίσης, στο τέλος κάθε τόμου αναγράφεται η σχετική με τον τόμο βιβλιογραφία, ενώ στο τέλος του έργου παραθέτουμε μια πιο εκτεταμένη βιβλιογραφία, που αφορά στα έργα του Ευκλείδη γενικότερα.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2001
Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

(ΒΙΒΛΙΑ Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, ΙV, V, VI)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στον τόμο αυτόν περιέχονται τα έξι πρώτα βιβλία, των οποίων το περιεχόμενο αποτελεί την επίπεδη Γεωμετρία των *Στοιχείων*.

Η Γεωμετρία αποτελεί το πιο σημαντικό μέρος των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Με τη βοήθειά της οι αρχαίοι Έλληνες εισήγαγαν τη θεωρία των λόγων, την Αριθμητική, τη γεωμετρική Άλγεβρα και τη θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι ο Ευκλείδης από το δεύτερο βιβλίο εισάγει τη γεωμετρική Άλγεβρα.

Τα έξι πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* είναι πάρα πολύ σημαντικά, γι' αυτό γνώρισαν περισσότερες μεταφράσεις και εκδόσεις από κάθε άλλο βιβλίο των *Στοιχείων*. Μεταφράστηκαν, εκδόθηκαν και επανεκδόθηκαν σε πολλές γλώσσες και χρησιμοποιήθηκαν ως βασικό εγχειρίδιο στα σχολεία διάφορων κρατών. Θα αναφέρουμε μερικές χαρακτηριστικές εκδόσεις των έξι πρώτων βιβλίων:

Στα **Ελληνικά** με παράλληλη μετάφραση στα **Λατινικά** τα βιβλία αυτά εκδόθηκαν στη Βασιλεία το 1550 από τον Ioan Schubel και στο Λονδίνο το 1620 από τον Henry Briggs.

Στα **Ιταλικά** το 1613 από τον Pietro Antonio Cadaldi. Το 1752 από τον Leonardo Ximenes, έργο, το οποίο επανεκδόθηκε αρκετές φορές. Το 1818 από τον Vincenzo Fantis.

Στα **Γερμανικά** το 1562 από τον Wilhelm Holtzmann (Xylander), το 1773 από τον J. F. Lorenz (μεταφράστηκε από τα Ελληνικά και χρησιμοποιήθηκε ως σχολικό βιβλίο στα σχολεία της Γερμανίας) και το 1901 από τον M. Simon.

Στα **Ισπανικά** το 1542 από τον Rodrigo Camarano και το 1637 από τον L. Carduchi.

Στα **Γαλλικά** το 1557 από τον Peletarius (Jacques Peletier, με δεύτερη έκδοση το 1610) και το 1639 από τον Pierre Herigone.

Στα **Ολλανδικά** το 1606 από τον Jan Peterszoon Dou και το 1702 από τον Hendrik Coets στα Ολλανδικά και στα Λατινικά.

Στα **Αγγλικά** το 1651 από τον John Dee, το 1781 από τον William Austin, το 1795 από τον John Playfair's και το 1828 από τον Dionysius Lardner.

Στα **Σουηδικά** το 1744 από τον Marten Stromer και το 1836 από τον H. Falk.

Στα **Δανικά** το 1803 από τον H. C. Linderup.

Ως προς το περιεχόμενό τους, τα έξι πρώτα βιβλία περιέχουν τα βασικότερα θέματα της Γεωμετρίας του Λυκείου, μόνο που η ανάπτυξή τους είναι περισσότερο αυστηρή από ό,τι στα σχολικά βιβλία.

Η ισότητα τριγώνων, για παράδειγμα, η θεωρία των παραλλήλων, τα ευθύγραμμα τμήματα, τα εμβαδά, το Πυθαγόρειο θεώρημα, οι γεωμετρικές κατασκευές, οι λόγοι και οι αναλογίες, τα όμοια σχήματα, είναι μερικά από τα θέματα των *Στοιχείων* που υπάρχουν και στα σχολικά βιβλία.

Εκείνο που εντυπωσιάζει στα *Στοιχεία* και πρέπει να επισημανθεί ιδιαίτερα δεν είναι μόνο το περιεχόμενό τους, είναι η δομή τους, η αυστηρότητα της παρουσίασης της ύλης, η ενιαία γραμμή και φιλοσοφία στην οποία υπακούουν και η διαχρονικότητα της γραφής τους. Είναι γραμμένα με λιτό τρόπο και δεν περιέχουν τίποτε το περιττό. Δεν περιέχουν προτάσεις οι οποίες δεν εξυπηρετούν τους στόχους και είναι έξω από την αυστηρότητα και το πνεύμα του έργου. Πολλές προτάσεις, για παράδειγμα, των "*Δεδομένων*", καθώς και του βιβλίου "*Περί διαιρέσεων*" του Ευκλείδη θα μπορούσαν να ενσωματωθούν στα *Στοιχεία*. Δεν περιέχονται όμως σ' αυτά, γιατί έχουν διαφορετική φιλοσοφία και εξυπηρετούν άλλους σκοπούς.

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι οι αποδείξεις των προτάσεων είναι όλες γεωμετρικές. Με τη βοήθεια της Γεωμετρίας αποδεικνύονται πολλά αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα.

Η προσφορά του Ευκλείδη στη δημιουργία και την ανάπτυξη της Γεωμετρίας είναι καθοριστική. Σ' αυτόν οφείλουμε την καταπληκτική δομή του κειμένου που είναι ακόμα και σήμερα σύγχρονη, καθώς και την καθιέρωση μιας μαθηματικής ορολογίας που άντεξε στο πέρασμα των αιώνων και χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα σχεδόν αναλλοίωτη. Στον Ευκλείδη οφείλουμε τη δημιουργία του πρώτου στην ιστορία των Μαθηματικών αξιωματικού συστήματος, την εισαγωγή της θεωρίας των παραλλήλων, τη γεωμετρική Άλγεβρα, την πρωτότυπη και θαυμάσια θεωρία των εμβαδών και μια διαδικασία απόδειξης που πλησιάζει την τελειότητα.

Η ύλη των έξι πρώτων βιβλίων χωρίζεται συνήθως σε δύο μέρη.

Το **πρώτο μέρος** περιέχει την ύλη των βιβλίων I μέχρι IV. Σε αυτά περιέχονται ορισμοί, τα πέντε αιτήματα του Ευκλείδη, οι εννιά κοινές έννοιες, η θεωρία των παραλλήλων, η θεωρία των εμβαδών, η γεωμετρική Άλγεβρα, ο κύκλος και οι ιδιότητές του, τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε κύκλο ευθύγραμμα σχήματα, καθώς και τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε κύκλο κανονικά πολύγωνα.

Το **δεύτερο μέρος** περιέχει την ύλη των βιβλίων V και VI, που αναφέρεται στη θεωρία των αναλογιών, στην ομοιότητα ευθύγραμμων σχημάτων και στις εφαρμογές τους, καθώς και σε απλές γεωμετρικές κατασκευές. Στο δεύτερο αυτό μέρος κυρίαρχο ρόλο παίζει η έννοια του λόγου, ενώ αντίθετα στο πρώτο μέρος η έννοια αυτή ούτε καν αναφέρεται.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	7

Τόμος 1^{ος}

Πρόλογος.....	85

Κεφάλαιο 1: Τα Θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

1. Εισαγωγή.....	89
2. Ορισμοί	90
3. Αιτήματα	109
4. Κοινές έννοιες	114
5. Η Ουδέτερη (Απόλυτη) Γεωμετρία.....	116
6. Η Γεωμετρία των παραλλήλων	171
7. Η θεωρία των εμβαδών	183

Κεφάλαιο 2: Η Γεωμετρία των ορθογωνίων

1. Εισαγωγή	205
2. Ορισμοί	208
3. Η Γεωμετρική Άλγεβρα	214
4. Τετραγωνισμός ευθύγραμμου σχήματος.....	247

Κεφάλαιο 3: Ο κύκλος και τα στοιχεία του.

1. Εισαγωγή	251
2. Ορισμοί	254
3. Χορδές τεμνόμενων ή εφαπτόμενων κύκλων	260
4. Σχέςσεις με χορδές και εφαπτόμενες	282
5. Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες	292
6. Μετρικές σχέσεις στον κύκλο	315

Κεφάλαιο 4: Εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα

1. Εισαγωγή.....	323
2. Ορισμοί	325
3. Εγγραφή και περιγραφή σε κύκλο ευθύγραμμων σχημάτων	326

4. Εγγραφή και περιγραφή σε κύκλο κανονικών πολυγώνων ...	339

Κεφάλαιο 5: Λόγοι και αναλογίες

1. Εισαγωγή	365
2. Ορισμοί.....	368
3. Σχέσεις ισοπολλαπλασίων.....	378
4. Λόγοι και αναλογίες.....	386

Κεφάλαιο 6: Η ομοιότητα ευθύγραμμων σχημάτων

1. Εισαγωγή	417
2. Ορισμοί.....	419
3. Η βασική πρόταση.....	424
4. Ομοιότητα τριγώνων	426
5. Διαίρεση τμημάτων σε μέρη με δοθέντα λόγο	441
6. Αναλογίες εμβαδών	447
7. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα	453
8. Γεωμετρική Άλγεβρα	471
9. Δύο γενικές προτάσεις.....	481

Ασκήσεις	487

Βιβλιογραφία	503

Ευρετήριο	513

Κεφάλαιο 1

BIBΛΙΟ I

Τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

1. Εισαγωγή

Το πρώτο βιβλίο αποτελεί τη βάση όλου του οικοδομήματος των *Στοιχείων*. Περιέχει τα 5 αιτήματα και τις 9 κοινές έννοιες, που μαζί με τους ορισμούς αποτελούν τα θεμέλια της δημιουργίας του πρώτου στην ιστορία της ανθρωπότητας **αξιοματικού συστήματος**.

Αιτήματα και κοινές έννοιες δεν υπάρχουν στα υπόλοιπα βιβλία των *Στοιχείων* και αυτό σημαίνει ότι ο Ευκλείδης είχε πλήρως συνειδητοποιήσει την αξία και τη σπουδαιότητα αυτών των προτάσεων.

Εκτός από τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες, το βιβλίο αυτό περιέχει 23 ορισμούς και 48 προτάσεις. Σύμφωνα με τον Πρόκλο, οι 48 προτάσεις μπορούν να χωριστούν σε τρεις ομάδες:

Στην **πρώτη ομάδα** ανήκουν οι προτάσεις 1 μέχρι 26, που αναφέρονται σε ισότητες τριγώνων, σε ισότητες και ανισότητες των στοιχείων τριγώνων και σε απλές γεωμετρικές κατασκευές.

Στη **δεύτερη ομάδα** ανήκουν οι προτάσεις 27 μέχρι 34, που αναφέρονται στη θεωρία των παράλληλων ευθειών και γίνεται χρήση του αιτήματος 5 των παραλλήλων.

Τέλος στην **τρίτη ομάδα** ανήκουν οι προτάσεις 35 μέχρι 48, που αναφέρονται στη θεωρία των εμβαδών. Εδώ αποδεικνύεται και η πιο σπουδαία πρόταση της Γεωμετρίας, που είναι η πρόταση 47 (Πυθαγόρειο Θεώρημα).

Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Ευκλείδης, για την απόδειξη των προτάσεων της πρώτης ομάδας δε χρησιμοποιεί το αίτημα 5 των παραλλήλων. Οι προτάσεις αυτές, για την απόδειξη των οποίων δεν απαιτείται το αίτημα 5, λέμε ότι αποτελούν την **Ουδέτερη ή Απόλυτη Γεωμετρία**.

Το βιβλίο I, που ίσως περισσότερο από κάθε άλλο βιβλίο των *Στοιχείων* ανήκει στον Ευκλείδη, αποτελεί την Ευκλείδεια Γεωμετρία των *Στοιχείων*. Το βιβλίο αυτό, καθώς και τα βιβλία III και VI, θεωρείται από πολλούς μαθηματικούς και ιστορικούς των επιστημών και ως **τοπολογικό** έργο, αφού σ’ αυτό μελετώνται οι στοιχειώδεις τοπολογικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, όπως για παράδειγμα του σημείου, της ευθείας, του επιπέδου κλπ.

2. Ορισμοί

Είναι γνωστό ότι το πρώτο συστατικό μιας αξιωματικής μεθόδου είναι οι ορισμοί. Έτσι και όσα βιβλία των *Στοιχείων* περιέχουν ορισμούς αρχίζουν με αυτούς. Ο συνολικός αριθμός των ορισμών σε ολόκληρο το έργο ποικίλλει στις διάφορες εκδόσεις του. Στην έκδοση του Heiberg υπάρχουν συνολικά 121 ορισμοί.

Όπως ήδη αναφέραμε, οι ευκλείδεια ορισμοί δεν εκφράζουν την έννοια των πραγμάτων και δεν ανταποκρίνονται στη σύνθεση των βασικών νοητικών στοιχείων. Ο Brunschvicg ([24] σελ. 80) γράφει: *"στον Ευκλείδη δε βρίσκουμε τον πραγματικό ορισμό, ο οποίος με την κλασική έννοια του Leibniz δείχνει τη δυνατότητα του οριζόμενου"*.

Κατά τη γνώμη μας η άποψη του Brunschvicg είναι υπερβολική. Ο ορισμός 10 που αναφέρει ότι *όταν δύο ευθείες τέμνονται έτσι ώστε οι εφεξής γωνίες να είναι ίσες, τότε αυτές ονομάζονται ορθές και οι ευθείες κάθετες*, είναι ένας σύγχρονος ορισμός, τόσο για την ορθή γωνία, όσο και για τις κάθετες ευθείες, παρόλο που ο Ευκλείδης δεν δίνει τον ορισμό της ισότητας γωνιών και δεν ορίζει τι είναι η τομή δύο ευθειών.

Επίσης, ο ορισμός 15 είναι ένας σύγχρονος ορισμός, που χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα.

Το βιβλίο I περιέχει 23 ορισμούς, τους εξής:

1. *Σημείο είναι κάθε τι που δεν έχει μέρη (διαστάσεις).*
2. *Γραμμή είναι αυτό που έχει μήκος χωρίς πλάτος*
3. *Τα άκρα κάθε γραμμής είναι σημεία.*
4. *Ευθεία γραμμή είναι εκείνη η γραμμή, η οποία κείται εξ ίσου προς τα σημεία της.*
5. *Επιφάνεια είναι κάθε τι που έχει μόνο μήκος και πλάτος.*
6. *Τα πέρατα μιας επιφάνειας είναι γραμμές.*
7. *Επίπεδη επιφάνεια είναι εκείνη η επιφάνεια, η οποία κείται εξ ίσου προς τις ευθείες της.*
8. *Επίπεδη γωνία είναι η κλίση μεταξύ δύο ευθειών γραμμών του επιπέδου που τέμνονται χωρίς να αποτελούν ευθεία.*
9. *Όταν δε οι ευθείες που περιέχουν μια γωνία αποτελούν ευθεία, η γωνία ονομάζεται ευθύγραμμη (ευθεία).*
10. *Όταν μια ευθεία τέμνει άλλη ευθεία και σχηματίζει τις εφεξής γωνίες ίσες, κάθε μια από τις ίσες γωνίες είναι ορθή και η τέμνουσα ονομάζεται κάθετος της ευθείας που τέμνει.*
11. *Αμβλεία γωνία είναι η μεγαλύτερη της ορθής γωνίας.*
12. *Οξεία γωνία είναι η μικρότερη της ορθής γωνίας.*
13. *Σύνορο (όριο) είναι ό,τι είναι πέρας κάποιου (αντικειμένου).*
14. *Σχήμα είναι ό,τι περιέχεται σε ένα ή περισσότερα σύνορα.*
15. *Κύκλος (κυκλικός δίσκος) είναι το επίπεδο σχήμα το οποίο περιέχεται σε μια γραμμή που ονομάζεται περιφέρεια (κύκλος), της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.*
16. *Το σημείο αυτό ονομάζεται κέντρο του κύκλου.*
17. *Διάμετρος κύκλου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τα άκρα του είναι σημεία του κύκλου και διαιρεί τον κύκλο σε δυο ίσα μέρη.*
18. *Ημικύκλιο ονομάζεται το σχήμα που περιέχεται από τη γραμμή που αποτελείται από μια διάμετρο του κύκλου και από το αντίστοιχο στη διάμετρο τόξο. Κέντρο του ημικυκλίου είναι το κέντρο του κύκλου.*

19. *Ευθύγραμμα σχήματα είναι αυτά που περικλείονται από ευθύγραμμα τμήματα, τρίπλευρα (τρίγωνα), αυτά που περικλείονται από τρεις, τετράπλευρα από τέσσερις, πολύπλευρα (πολύγωνα) από περισσότερες των τεσσάρων γραμμές.*
20. *Από τα τρίπλευρα σχήματα αυτό που έχει ίσες τις τρεις πλευρές ονομάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, αυτό που έχει δύο μόνο πλευρές ίσες ισοσκελές και σκαληνό αυτό που έχει τις τρεις πλευρές άνισες.*
21. *Από τα τρίπλευρα σχήματα, ορθογώνιο τρίγωνο είναι αυτό που έχει μία γωνία ορθή, αμβλυγώνιο αυτό που έχει μια γωνία αμβλεία και οξυγώνιο αυτό που έχει τις γωνίες οξείες.*
22. *Από τα τετράπλευρα σχήματα, τετράγωνα είναι εκείνα τα οποία είναι ισόπλευρα και ορθογώνια, ετερομήκη είναι εκείνα που είναι ορθογώνια αλλά όχι ισόπλευρα, ρόμβοι είναι εκείνα που είναι ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια και ρομβοειδή είναι εκείνα που δεν είναι ισόπλευρα ή ορθογώνια. Τα υπόλοιπα τετράπλευρα ονομάζονται τραπέζια.*
23. *Παράλληλες ονομάζονται οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ’ άπειρον εκατέρωθεν δεν τέμνονται.*

Σχόλια

Πριν επιχειρήσουμε επιμέρους σχόλια για τους 23 ορισμούς, θα παραθέσουμε μερικές γενικές διαπιστώσεις γι’ αυτούς.

Όπως αναφέρει ο Brunschvicg ([24] σελ.86) "*Οι ευκλείδειοι ορισμοί είναι ορισμοί ονομαστικοί, και σχηματίζονται με μοναδικό σκοπό να επιτύχουν την μέγιστη γλωσσική σαφήνεια λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχειώδη δεδομένα της εμπειρίας.*"

Πολλοί ιστορικοί πιστεύουν ότι πιθανόν κάποιοι από τους ορισμούς να προστέθηκαν αργότερα από κάποιους σχολιαστές των *Στοιχείων*. Αυτό όμως είναι ελάχιστα πιθανόν, αφού και σε εκδόσεις που ίσως γράφτηκαν πριν από το Θέωνα τον Αλεξανδρινό (4^{ος} μ.Χ. αιώνας), ο αριθμός των ορισμών είναι ίδιος (23) με ελάχιστες διαφορές.

Ένα άλλο εξαιρετικά σημαντικό κατά τη γνώμη μας σημείο είναι ότι στους πρώτους τουλάχιστον ορισμούς, ο Ευκλείδης ορίζει ένα γεωμετρικό αντικείμενο προϋποθέτοντας την ύπαρξή του.

Ενώ αποτελεί ίσως το μεγαλύτερο μειονέκτημα των *Στοιχείων* το γεγονός ότι ο Ευκλείδης προσπαθεί να ορίσει όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα, χωρίς να καθιερώσει τις αρχικές έννοιες.

Πολλοί ιστορικοί επισημαίνουν την αντινομία που παρατηρείται στα *Στοιχεία*, να υπάρχουν τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες (αξιώματα) και να απουσιάζουν οι αρχικές έννοιες. Πιθανότερη (και κατά τη γνώμη μας) εξήγηση είναι ότι πολλοί ορισμοί αποτελούν αρχικές έννοιες γι' αυτό είναι ονομαστικοί. Πολλοί επίσης ορισμοί, όπως και η αξιωματική θεμελίωση, παρουσιάζονται για πρώτη φορά και γι' αυτό ο Ευκλείδης έδωσε και πρόσθετες επεξηγήσεις.

Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός, ότι ο Ευκλείδης δεν αναφέρεται σε κάποιους απαραίτητους κατά τη γνώμη μας ορισμούς. Π.χ. δεν ορίζει το εμβαδόν, ούτε τα μέτρα τμημάτων ή γωνιών. Ο καθηγητής Σ. Π. Ζερβός [164] σε ένα πρωτοποριακό άρθρο του, που δημοσιεύθηκε το 1972 σε ιαπωνικό περιοδικό, επισημαίνει τον **τοπολογικό χαρακτήρα** των περισσοτέρων ορισμών του Ευκλείδη. Σύμφωνα με το Ζερβό, ο Ευκλείδης αναφέρεται αποκλειστικά σε γεωμετρικά αντικείμενα που είναι είτε σημεία είτε "συνεχή μεγέθη". Και με τη βοήθεια της έννοιας "*διάσταση*" η οποία ήταν γνωστή στους μετά τον Αριστοτέλη αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, μπορούμε να δώσουμε σύγχρονη μορφή στους περισσότερους ορισμούς. Ο Ήρων έχει εισαγάγει στους ορισμούς του την έννοια της διάστασης την οποία χρησιμοποιεί πολύ συχνά.

Ο όρος "**σημείον**" του ορισμού 1 είναι ο κλασικός όρος που θα επικρατήσει μέσα από τα έργα των Αυτόλυκου, Ευκλείδη και θα αντικαταστήσει τον αριστοτελικό όρο "*στιγμή*". Στο Βατικανό κώδικα¹ υπάρχει η φράση: "*σημείον ἐστίν, ὃ τινες καλοῦσι στιγμήν*".

Ο Αριστοτέλης έχει δώσει πολλούς ορισμούς της έννοιας *σημείο*. Π.χ. στο βιβλίο "*Μετά τα Φυσικά*" (1035b 32) το σημείο αναφέρεται σαν "*κάθε τι που είναι αδιαίρετο*".

Ο Λατίνος Martianus Capella (5^{ος} αιώνας μ.Χ.) [83] έδωσε μια εντελώς διαφορετική απόδοση: "*Punctum vero est cuius pars nihil est*". Δηλαδή "*σημείο είναι αυτό, του οποίου τα μέρη είναι μηδέν*".

Ο ορισμός του Ευκλείδη είναι διαφορετικός από ορισμούς που δόθηκαν πριν. Όπως αναφέρει ο Πρόκλος [66], οι Πυθαγόρειοι έδωσαν τον εξής ορισμό για το σημείο: "*σημείον ἐστὶ μονάς προσλαβοῦσα θέσιν*", δηλαδή *σημείο είναι μια μονάδα που έχει μια θέση*. Ο Πρόκλος στο εδά-

¹ Στα επόμενα, όταν θα αναφερόμαστε στο Βατικανό κώδικα, θα εννοούμε το **Βατικανό Ελληνικό Κώδικα 190**.

φιο αυτό αναφέρει ότι ασκήθηκε κριτική στους Πυθαγορείους και για τον πρόσθετο λόγο ότι στον ορισμό του σημείου εμπλέκονται δύο επιστήμες (Αριθμητική και Γεωμετρία).

Έχοντας υπόψη τον τον ορισμό αυτό ο Αριστοτέλης (*"Μετά τα Φυσικά"*, 1080b 16-20) αναφέρει ότι οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι οι αριθμοί έχουν μέγεθος *"δοκεῖ δέ τισι τὰ τοῦ σώματος πέρατα, οἷον ἐπιφάνεια καὶ γραμμὴ καὶ στιγμή καὶ μονάς, εἶναι οὐσίαι, . . ."*

Ο Ζήνων ο Ελεάτης ήταν ο πρώτος που δεν αντιστοιχίσε αριθμό στο σημείο. Ο Simplicius [83] αναφέρει σχετικά: *" . . . τὴν δέ στιγμήν μηδὲ ἐν τιθέναι, . . ."*

Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές, το έργο του Ευκλείδη, ειδικότερα το βιβλίο I των *Στοιχείων*, είχε επηρεαστεί αποκλειστικά από τον Πλάτωνα. Άλλωστε ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί κυρίως την πλατωνική και όχι την αριστοτελική ορολογία. Π.χ. χρησιμοποιεί τον πλατωνικό όρο *"σημείον"* αντί του συνήθους Αριστοτελικού όρου *"στιγμή"*.

Ο Πλάτων θεωρούσε ότι το σημείο είναι το άκρο μιας γραμμής, ενώ ο Αριστοτέλης ήταν αντίθετος σ' αυτόν τον ορισμό, γιατί τον χαρακτήριζε ως αντιεπιστημονικό και θεωρούσε το σημείο ως κάτι το αδιαίρετο που έχει θέση. Αυτό προκύπτει π.χ. από την πρόταση του Αριστοτέλη στο βιβλίο του *"Περὶ Ουρανού"*, όπου αναφέρει ότι *"οὐθέν γάρ στιγμή τῶν σωμάτων ἐστίν"*, δηλαδή *"κανένα σώμα δεν είναι σημείο"* (B 296a 17).

Ο Αριστοτέλης είναι απολύτως σαφής σχετικά με τη σχέση ανάμεσα στα σημεία και τις ευθείες και υποστηρίζει ότι τα σημεία είναι αδιαίρετα και δεν είναι σε θέση να σχηματίσουν μια ευθεία. Σχετικά αναφέρει: *"Εὐθεῖα οὐ σύγκειται ἐκ στιγμῶν"*.

Στην έννοια *σημείο* (*"στιγμή"*) ο Αριστοτέλης δίνει και φυσικές ιδιότητες (στερείται βάρους και έχει χρονική υπόσταση) δηλαδή είναι όπως το *"τώρα"*, όταν αναφερόμαστε στο χρόνο. Χαρακτηριστικά, στο βιβλίο *"Περὶ Ουρανού"* γράφει: *"Πρὸς δε τούτοις καὶ εἰ ὁ χρόνος ὁμοίως ἔχει, ἀναιροῖτ' ἂν ποτε ἢ ἐνδέχοιτ' ἂν ἀναιρεθῆναι· τό γάρ νῦν τό ἄτομον οἷον στιγμή γραμμῆς ἐστίν"*. Δηλαδή *" . . . διότι το άτομο εδώ είναι όπως το σημείο για τη γραμμή"* (*"Περὶ Ουρανού"* Γ, 300a 14).

Για τον Αριστοτέλη λοιπόν ένα σημείο είναι μόνο ένα άκρο, μια χρονική αφετηρία, το σημείο διαίρεσης μιας ευθείας, αλλά δεν είναι ούτε μέγεθος ούτε μέρος ενός μεγέθους ή μιας ευθείας: *"ἀκολουθεῖ δέ καὶ τοῦτο πως τῇ στιγμή καὶ γάρ ἡ στιγμή καὶ συνέχει τό μήκος καὶ ὀρίζει· ἐστὶ γάρ τοῦ μὲν ἀρχή τοῦ δέ τελευτή"*. (*"Φυσικῆς ἀκροάσεως"* Δ, 220a 9-11). Μπορεί όμως μετέχοντας σε μια κίνηση να παράγει μια γραμμή και άρα μπορεί να είναι η αφετηρία ενός μεγέθους.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο ορισμός του Ευκλείδη είναι στην ουσία ο ίδιος με αυτόν του Πλάτωνα, αλλά διαφέρει από τον ορισμό του Αριστοτέλη, ο οποίος δε δέχεται πως το σημείο έχει θέση.

Ο σχολιαστής Θέων ο Σμυρναίος [92] γράφει ότι *"μεταξύ των σχημάτων, το πρώτο είναι το σημείο που είναι αδιάστατο"*. Ο Θέων εδώ χρησιμοποιεί τον πυθαγόρειο, τον ευκλείδειο και τον αριστοτέλειο ορισμό.

Ο Ήρων αργότερα δίνει έναν ορισμό στον οποίο προσπαθεί να συνδυάσει (όπως και ο Θέων) τους ορισμούς και τις απόψεις του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη: *"Σημείον ἐστὶν οὗ μέρος οὐθέν ἢ πέρας ἀδιάστατον ἢ πέρας γραμμῶν"*. Όπως μας πληροφορεί ο al-Nayrizi, κάποιος "Ηρόνδης"¹, άγνωστος σε μας, αφού το όνομά του δεν αναφέρεται πουθενά, έδωσε στην έννοια *"σημείο"* τον ορισμό: *Σημείο είναι η αδιαίρετη αρχή όλων των μεγεθών*.

Ο Ποσειδώνιος [103] αναφέρει επίσης το σημείο ως άκρο άνευ διαστάσεως ή ως άκρο ευθείας.

Πολλοί ιστορικοί των Μαθηματικών πιστεύουν ότι ο ορισμός αυτός ανήκει στους Πυθαγορείους (ίσως και στον ίδιο τον Πυθαγόρα) και ο λόγος είναι ο εξής: Αν υποθέσουμε ότι το σημείο είχε διαστάσεις, τότε κάθε ευθύγραμμο τμήμα θα αποτελείτο από άκέραιο αριθμό σημείων, επομένως ο λόγος της διαγωνίου ενός τετραγώνου προς την πλευρά του θα ήταν αριθμός ρητός και όχι ασύμμετρος.

Το γεγονός αυτό ήταν που ανάγκασε τους Πυθαγορείους να δεχθούν ότι το σημείο δεν έχει διαστάσεις, πράγμα που αποτέλεσε μια από τις πρώτες πράξεις προς την κατεύθυνση της καθιέρωσης της Γεωμετρίας ως θεωρητικής και όχι ως πρακτικής επιστήμης. Στο γεγονός αυτό αναφέρεται και ο C. Mugler [115] στο Λεξικό του, σελ. 376, 77, 79.

Τέλος, ο Σέξτος ο Εμπειρικός χρησιμοποιεί ισότιμα και τους δύο όρους (*στιγμή, σημείο*). Π.χ. στο βιβλίο του *"Προς μαθηματικούς"* (βιβλίο ΙΙΙ, εδάφιο 22, 1) γράφει: *"Ἡ τοίνυν στιγμή, ἣν φασι σημείον ἀδιάστατον ὑπάρχειν,"* και παρακάτω (εδάφιο 22, 7) *"οὐ τοίνυν ἐστὶ σημείον ἀδιάστατον ἢ στιγμή, ..."*. Ο Σέξτος αναφέρεται μάλλον στους ορισμούς του Ήρωνα, οι οποίοι αργότερα προστέθηκαν στα *Στοιχεία*.

Σχετικά με τον ορισμό του σημείου, παρατηρούμε ότι ο ορισμός των *Στοιχείων* αποτελεί μόνο ένα μέρος του ορισμού του Ήρωνα, ο οποί-

¹ Ίσως αναφέρεται στον Ήρόνδα (ή Ήρώδα) από την Κω, έναν ποιητή και θεατρικό συγγραφέα του 3^{ου} π.Χ. αιώνα. Το πιθανότερο κατά τη γνώμη μας είναι να αναφέρεται στον Αἴλιο Ηρωδιανό τον τεχνικό, ένα γραμματικό του 2^{ου} μ.Χ. αιώνα, που έγραψε και βιβλία Μαθηματικών, τα οποία έχουν χαθεί.

ος φαίνεται να περιέχει και τους ορισμούς του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη αλλά και των άλλων.

Στις περισσότερες αξιωματικές θεμελιώσεις της σύγχρονης Γεωμετρίας η έννοια "*σημείο*" θεωρείται αρχική και βέβαια δεν ορίζεται άμεσα. Στην Αναλυτική Γεωμετρία το σημείο ορίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είτε ως μια διατεταγμένη τριάδα κλπ. Ακόμα, σε μη ευκλείδειες Γεωμετρίες π.χ. την ελλειπτική που ορίζουμε στην επιφάνεια μιας ευκλείδειας σφαίρας, κάθε "*σημείο*" είναι ένα ζεύγος (A, B) δύο αντιδιαμετρικών ευκλείδειων σημείων της σφαίρας. Αλλά και στις λεγόμενες "*πεπερασμένες*" Γεωμετρίες η φύση του σημείου είναι διαφορετική από αυτή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Ο Πρόκλος [66] σχολιάζοντας τον ορισμό της γραμμής αναφέρει ότι μετά το *σημείο* ο Ευκλείδης εισάγει την *έννοια της γραμμής* ως μέγεθος που δεν έχει πλάτος.

Ο Αριστοτέλης στο βιβλίο του "*Περί Ψυχής*" (Α, 409 α 4-7) γράφει ότι "*το σημείο που θα κινηθεί θα δημιουργήσει γραμμή, οι μονάδες που κινούνται θα δημιουργήσουν γραμμές, διότι το σημείο είναι μονάδα που έχει θέση, ...*"

Από τον ορισμό αυτό του Αριστοτέλη έχει επηρεασθεί ο Ήρων, που δίνει τον ορισμό "*Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος και βάθος και παράγεται αν ένα σημείο κινηθεί συνεχώς πάνω σε επίπεδο επιφάνειας*", συμπεριλαμβάνοντας έτσι και σχόλια που έγιναν πάνω στον ορισμό του Ευκλείδη.

Ο Αριστοτέλης έχει συνδέσει την έννοια της γραμμής με την έννοια του "*διαστήματος*" και της "*διάστασης*", ενώ ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* δε χρησιμοποιεί τον όρο "*διάσταση*", αν και αναφέρεται σε μήκος, πλάτος και βάθος.

Οι σχολιαστές του Ευκλείδη, όπως π.χ. ο Θέων ο Σμυρναίος [92] και ο Πρόκλος χρησιμοποιούν την έννοια της διάστασης. Π.χ. ο Θέων μιλάει για το "*διαστατόν*". Γράφει σχετικά: "...τοῦ δέ μεγέθους τό μὲν ἐφ' ἑν διαστατόν τε καὶ διαιρετόν γραμμῇ, μήκος οὕσα ἀπλατές". Επίσης αναφέρει ότι η γραμμή παράγεται από το σημείο: "...γραμμῇ δέ ἐκ στιγμῆς".

Ο Πρόκλος, αφού αναφέρει ότι η γραμμή είναι "*μέγεθος*" ("*ἐφ' ἑν διάσταση*"), όπως και ο Θέων, ακολούθως αναφέρει ότι υπάρχουν και άλλοι ορισμοί της γραμμής. Π.χ. μερικοί ορίζουν τη γραμμή ως το αντικείμενο που προκύπτει από την κίνηση ενός σημείου, την τροχιά που διαγράφει ένα κινητό σημείο. Ο Πρόκλος εδώ αναφέρεται στον Αριστοτέλη και στον ορισμό που αυτός δίνει στο βιβλίο του "*Περί Ψυχής*". Ακόμα

αναφέρει ότι άλλοι ορίζουν την γραμμή ως μέγεθος που επεκτείνεται κατά τη μια διάσταση.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο τελευταίος ορισμός περιγράφει τέλεια τη φύση της γραμμής, αλλά σημειώνει πως θα πρέπει να προσέξουμε, γιατί ένα σημείο δεν παράγει μια γραμμή γενικά, αλλά μια "υλική" γραμμή και προσθέτει ακόμα ότι αυτά έχουν γίνει πλέον γνωστά σε όλους.

Σχετικά με τα άκρα γραμμής, προφανώς ο Ευκλείδης υπονοεί την ανοιχτή γραμμή (ευθύγραμμο τμήμα), αφού μια κλειστή γραμμή (π.χ. κύκλος) δεν έχει άκρα. Ο Πρόκλος εξάλλου παρατηρεί ότι ο Ευκλείδης θα πρέπει να αναφέρεται σε γραμμές που δεν επεκτείνονται επ' άπειρον, γιατί τότε δε θα έχουν άκρα. Αλλά και πεπερασμένες γραμμές, όπως ο κύκλος και η έλλειψη (την οποία ο Πρόκλος ονομάζει *θυρεό*), δεν έχουν άκρα.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός 3 δεν είναι ορισμός με τη σημερινή έννοια του όρου, αφού δεν ορίζεται κάτι, αλλά μάλλον διευκρινίζεται ότι τα άκρα μιας γραμμής είναι σημεία και όχι κάτι άλλο.

Κατά τον Αριστοτέλη δεν είναι επιστημονικό να ορίζουμε τα σημεία ως τα "άκρα" μιας γραμμής, γιατί έτσι ορίζουμε το "πρότερον" με το "ύστερον".

Ο Ήρων, όπως γράφει ο al-Nayrizi, [39] αναφέρει ότι τα δύο άκρα μιας γραμμής είναι σημεία. Ασφαλώς, ο Ήρων αναφέρεται σε ευθύγραμμο τμήμα και όχι σε μια οποιαδήποτε γραμμή.

Μετά τον ορισμό της γραμμής ο Ευκλείδης εισάγει τον **ορισμό της ευθείας**, για την οποία ο Πρόκλος (σελ. 103-104) μας ενημερώνει ότι ο πλέον αυθεντικός προ-ευκλείδειος ορισμός της ευθείας ήταν αυτός του Πλάτωνα και αναφέρεται στο διάλογο *"Παρμενίδης"* (137 ε). Εκεί ο Παρμενίδης λέει ότι *"ευθεία είναι αυτό που το μέσον του καλύπτει τα άκρα"*, εννοώντας ότι αν μπορούσαμε να τοποθετήσουμε το μάτι μας πάνω στο μέσο της ευθείας, τότε δε θα βλέπαμε άλλα σημεία της. Ακολουθώντας, ο Πρόκλος γράφει: *"ο Πλάτων θεωρούσε ως απλούστερα είδη γραμμών την ευθεία και τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο είδος γραμμής μπορούσε να προκύψει από αυτά"* (σελ. 103).

Ο Heath [83] διερωτάται, γιατί ο Ευκλείδης, που ήταν πλατωνικός, δεν υιοθέτησε τον ορισμό του Πλάτωνα; Η απάντηση κατά τη γνώμη μας είναι φανερή: ο Ευκλείδης δε θα μπορούσε να υιοθετήσει έναν ορισμό αναφερόμενο σε εμπειρικές καταστάσεις.

Ο Αρχιμήδης στο βιβλίο του *"Περί οχουμένων"* όριζε το ευθύγραμμο τμήμα AB γεωδαιτικά και θεωρούσε ως ευθύγραμμο τμήμα AB την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των A, B. Ο Πρόκλος προφανώς γνώριζε

τον ορισμό του Αρχιμήδη και με τη βοήθειά του εξηγεί τον ορισμό του Ευκλείδη ως εξής: *Αν A, B είναι δύο σημεία μιας ευθείας, τότε το τμήμα της ευθείας με άκρα τα A, B είναι ίσο με την απόσταση των σημείων A, B και μόνο η ευθεία έχει αυτή την ιδιότητα.*

Στο βιβλίο του "*Περί σφαίρας και κυλίνδρου*" ο Αρχιμήδης προτάσσει πέντε αξιώματα, το πρώτο από τα οποία είναι:

A1: Από όλες τις γραμμές με άκρα δύο σημεία, η μικρότερη είναι η ευθεία.

Ο Πρόκλος γράφει: "*Μετά το σημείον καί τήν γραμμήν ή επιφάνεια τέταται διχῇ διαστάσα κατά τε μήκος καί πλάτος ἀβαθῆς δέ μείνασα καί ταύτη τοῦ τριχῇ διαστάντος ἀπλουτέραν ἔχουσα φύσιν ...*" (σελ. 114).

Ο όρος *επιφάνεια* έχει χρησιμοποιηθεί πριν από τον Ευκλείδη και από τους Πλάτωνα και Αριστοτέλη, καθώς και από αρχαιότερους μαθηματικούς. Ετυμολογικά η λέξη προέρχεται από το ρήμα *φαίνομαι* (*επιφανής* είναι αυτός που φαίνεται) και σημαίνει το μέρος του σώματος που είναι ορατό στον παρατηρητή. Οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν την επιφάνεια "*χροιά*", λέξη που έχει σχέση με το *χρώμα*, όπως αναφέρει ο Αριστοτέλης. Ο όρος χρησιμοποιείται στην καθημερινή μας ζωή ακόμα και στις μέρες μας.

Με τον όρο αυτό ο Ευκλείδης αναφερόταν σε επιφάνειες κάθε είδους. Τα επίπεδα τα ονόμαζε *επίπεδες επιφάνειες*, χρησιμοποιώντας ουσιαστικά την αριστοτέλική ιεράρχηση του γένους (*επιφάνεια*) σε είδη (*επίπεδο κ.ά.*).

Ο Ευκλείδης δε χρησιμοποιεί τον όρο *επιφάνεια*, παρά μόνο στο βιβλίο XI, όταν δίνει τον ορισμό της *στερεάς γωνίας* (ορισμός 11) και μάλιστα με την έννοια της επίπεδης επιφάνειας. Ο Heath [83] συμπεραίνει ότι ο όρος "*επίπεδος επιφάνεια*" θα πρέπει να είχε ορισθεί προγενέστερα. Ο Πρόκλος μάλιστα αναφέρει ότι στα προ-ευκλείδεια Μαθηματικά ο όρος *επιφάνεια* χρησιμοποιούνταν και με την έννοια του *επιπέδου*.

Όπως παρατηρήσαμε και για τον ορισμό 3, **ο ορισμός 6** είναι μάλλον μια διευκρίνιση. Ο Αριστοτέλης πιστεύει ότι ο ορισμός 6 είναι αντιεπιστημονικός, αφού ορίζουμε το *ὑστερον* (είδος) με το *πρότερον* (γένος).

Ο Ήρων εντάσσει τον ορισμό αυτό στον ορισμό 2, αναφέροντας "*πέρας επιφανείας αὐτῇ γενομένη*".

Ο Πρόκλος εξετάζει την περίπτωση που οι επιφάνειες είναι πεπερασμένες ("*πεπερασταί*"), όπως π.χ. η σφαίρα. Τότε, γράφει, η επιφάνεια της σφαίρας *περατούται*, όχι από γραμμές, αλλά από τον εαυτό της.

Ο ορισμός 7 θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής: "*Επίπεδη είναι μια επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται κάθε ευθεία που ορίζουν δύο σημεία της επιφάνειας*".

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι όλοι οι ορισμοί που αναφέρονται στο χώρο μπορούν να προκύψουν από τους ορισμούς για αντικείμενα του επιπέδου. Αναφέρει ακόμα ότι οι παλαιότεροι δεν έκαναν διάκριση μεταξύ επιπέδου και επιφανείας. Ούτε και ο "θεῖος" (δηλ. ο θεϊκός) Πλάτων διαχώρισε τις έννοιες αυτές. Την ίδια γνώμη είχε και ο Αριστοτέλης.

Ο Ευκλείδης ήταν ο πρώτος που διαχώρισε τις έννοιες αυτές και θεώρησε ως γένος την επιφάνεια και ως είδος την ευθεία, με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο στους ορισμούς γραμμής-ευθείας ορίζει το επίπεδο ξεχωριστά από την επιφάνεια. Την πληροφορία αυτή μας δίνει ο Πρόκλος. Και ακριβώς όπως ως *ευθεία* ορίζει το διάστημα μεταξύ δύο σημείων της, ως *επίπεδο* ορίζει το χώρο που περιλαμβάνεται μεταξύ δύο ευθειών του. Αυτό εννοεί ο Ευκλείδης λέγοντας "*ὅτι κείται ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις*".

Στο σημείο αυτό ο Πρόκλος αναφέρει ότι κάποιοι θεωρούν την επίπεδη επιφάνεια ως την επιφάνεια που είναι "πλήρως τεντωμένη" "*...τό αὐτό δηλοῦντες, ἐπ' ἄκρον τεταμένην εἰρήκασιν*". (σελ. 117). Ο Πρόκλος προφανώς αναφέρεται στον ορισμό του Ἡρώνα [92], σύμφωνα με τον οποίο η επίπεδη επιφάνεια είναι αυτή "*ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κείται ὁρθῇ οὕσα ἀποτεταμένη*". Δηλαδή ο Ἡρων πρόσθεσε στον ορισμό του Ευκλείδη και τη φράση "*εἶναι τεντωμένη στα άκρα της*".

Ο Αρχιμήδης δίνει τον ορισμό του επιπέδου ως την "*ελάχιστη επιφάνεια από όσες έχουν τα ίδια πέρατα*".

Ο Πρόκλος αναφέρει ακόμα τον ορισμό της επίπεδης επιφανείας: Είναι η επιφάνεια επί της οποίας μια ευθεία εφαρμόζει πάντα, ή μια επιφάνεια επί της οποίας, όπως και να τοποθετήσουμε μιαν ευθεία, αυτή εφαρμόζει.

Ο Ἡρων στον ορισμό θ' των "*Μετρικῶν*" του ερωτά: "*Τί ἐστίν ἐπίπεδος ἐπιφάνεια;*" Και απαντά: "*Επίπεδος ἐπιφάνεια ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κείται*". Στη συνέχεια θέτει την ερώτηση: "*Τίς δέ οὐκ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια;*" και απαντά: "*Οὐκ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι εἰσιν αἱ μὴ οὕτως ἔχουσαι, τοὔτέστιν αἱ μὴ πάντα κατ' εὐθείας φερόμεναι γραμμαί, ἔχουσαι δέ τινα ἀνωμαλίαν καί οὐκ ὁρθαί δ' ὅλον*".

Ο Θέων ο Συμρναῖος [92] δίνει έναν ορισμό ισοδύναμο με τους ορισμούς του Πρόκλου: "*ἐπίπεδον δέ ἐστίν ὁρθῇ ἐπιφάνεια ἥς δύο σημείων ἄφηται ευθεία, ὅλη αὐτῷ ἐφαρμόζεται*". Τον ορισμό αυτόν υιοθέτησε και ο μεταφραστής των *Στοιχείων* R. Simson [47].

Όπως παρατηρεί ο Γερμανός μαθηματικός C. F. Gauss σε ένα γράμμα του, ο ορισμός του Πρόκλου περιέχει έναν πλεονασμό, γιατί ένα επίπεδο ορίζεται από μία ευθεία του και ένα σημείο του που δεν ανήκει στην ευθεία. Βέβαια, όπως παρατηρούν ο Heath κ.ά., ο ορισμός αυτός προϋποθέτει την ύπαρξη ενός αξιώματος είτε ενός θεωρήματος (*ευθεία και σημείο εκτός αυτής ορίζουν ένα επίπεδο*).

Με βάση την παρατήρηση του Gauss, ο ορισμός του Πρόκλου μοιάζει να έχει περισσότερα στοιχεία από αυτά που χρειάζονται. Αυτό όμως δεν είναι τόσο σημαντικό, όσο το ότι πουθενά στους μέχρι τώρα ορισμούς των *Στοιχείων* δεν κατοχυρώνεται η ύπαρξη των αντικειμένων που ορίζονται. Αυτό κατά τη γνώμη μας δείχνει τον αφηρημένο χαρακτήρα της αξιωματικής θεμελίωσης των *Στοιχείων*.

Ο Άραβας al-Nayrizi [39] αναφέρει ότι σύμφωνα με το σχολιαστή Σιμπλίκιο, ο ορισμός του Ευκλείδη εννοεί ότι *"επίπεδο είναι μια επιφάνεια, αν είναι δυνατό από ένα σημείο της να φέρουμε ευθεία η οποία βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια και συνδέει το σημείο με έναν άλλο σημείο της."*

Στον ορισμό 8 παρατηρούμε ότι ο Ευκλείδης αναφέρεται σε *επίπεδες γωνίες* με πλευρές όχι μόνο ευθείες, αλλά γενικά γραμμές. Μάλιστα, στον επόμενο **ορισμό 9**, έχουμε σε αντιδιαστολή τον ορισμό της *ευθείας γωνίας*. Στα *Στοιχεία*, αν και όχι πολύ συχνά, (μόνο στο βιβλίο III, στις προτάσεις 16 και 31), συναντούμε και γωνίες με πλευρές τόξα και ημιευθείες. Ο Αριστοτέλης μάλιστα θεωρεί και γωνίες που οι πλευρές τους είναι δυο τόξα, τις οποίες ονομάζει *κερατοειδείς* (*"Αναλυτικά Πρότερα"*, A24, 41 β 13-22).

Η έννοια της γωνίας είναι έννοια των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, αφού ούτε οι Βαβυλώνιοι, ούτε οι Αιγύπτιοι γνώριζαν την έννοια αυτή.

Ο Θ. Εξαρχάκος στο βιβλίο του *"Ιστορία Μαθηματικών"*, τόμος Α' (σελίδα 232) [56], αναφέρει τις απόψεις των ειδικών περί τα Βαβυλωνιακά S. Gandz και F. Thureau-Dangin, οι οποίοι γράφουν: *"Αυτοί (οι Βαβυλώνιοι) δεν είχαν ούτε τον όρο για να εκφράσουν την ιδέα της γωνίας"*. Επίσης (σελ. 623), ο Θ. Εξαρχάκος γράφει: *"Άλλωστε οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δε γνώριζαν την έννοια της γωνίας"*.

Έχει γίνει προσπάθεια να αποδειχθεί ότι η μέτρηση των γωνιών με τη μονάδα της μοίρας, όπου μια πλήρης γωνία έχει 360° , συνδέεται με το εξηνταδικό σύστημα των αρχαίων Βαβυλωνίων. Αυτό βέβαια δεν μπορεί να ισχύει, αφού οι Βαβυλώνιοι δε γνώριζαν την έννοια της γωνίας. Ο ιστορικός Cajori [30] θεωρεί ότι η επιλογή της μοίρας ως μονάδας μέτρη-

σης των γωνιών έχει σχέση με την ευκολία με την οποία ένας κύκλος διαιρείται σε 360° .

Οι αρχαίοι Έλληνες όρισαν ως μονάδα μέτρησης γωνιών τη "μοίρα", δηλαδή το $\frac{1}{180}$ της ευθείας γωνίας. Οι Άραβες μετέφρασαν τον όρο αυτό ως "*dataja*", που θα πει "*βήμα κλίμακας*". Από αυτούς τον πήραν οι Εβραίοι, που τον απέδωσαν ως "*dar'ggah*" και οι Ευρωπαίοι με την απόδοση "*de gradus*". Από την απόδοση αυτή προήλθε ο όρος "*degree*". Οι αρχαίοι Έλληνες υποδιαιρούσαν τη μοίρα σε 60 πρώτα λεπτά και κάθε πρώτο σε 60 δεύτερα λεπτά. Πάντως ο Ευκλείδης δε χρησιμοποιεί μέτρα, ούτε βέβαια μονάδες γωνιών.

Οι συγγραφείς Γεωμετρίας του 17^{ου} αιώνα συστηματικά χρησιμοποιούν την ορολογία αυτή. Αργότερα τον 18^ο αιώνα εισήχθη μια νέα μονάδα που τείνει στις μέρες μας να αντικαταστήσει όλες τις άλλες. Ο Lord Kelvin, ονόμασε την νέα μονάδα **ακτίνιο (rad)**. Ως γνωστό, ακτίνιο είναι το μήκος τόξου ίσου με μian ακτίνα.

Η σχέση που συνδέει το τόξο μιας μοίρας και ενός rad είναι

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \cong 0.0174533 \text{ rad.}$$

Η εισαγωγή της νέας μονάδας είχε ευεργετικές συνέπειες, τόσο για τη Γεωμετρία όσο και την Ανάλυση, όπως προκύπτει από την σχέση

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1,$$

όπου ω γωνία σε ακτίνια.

Φαίνεται λοιπόν ότι η έννοια της γωνίας είναι μια έννοια των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, αφού ήταν π.χ. γνωστή στον Θαλή, όπως τουλάχιστον αναφέρει ο Εύδημος. Μάλιστα, ήταν γνωστή όχι μόνον ως έννοια, αλλά και σαν χρήσιμο εργαλείο σε πρακτικά θέματα (μέτρηση της απόστασης πλοίου από τη στεριά, υπολογισμός του ύψους των πυραμίδων κ.α.), καθώς και ως βασικό μαθηματικό αντικείμενο με εμπλοκή σε αρκετές από τις προτάσεις που ο Εύδημος αποδίδει στον Θαλή.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Εύδημος είχε γράψει βιβλίο "*Περί γωνίας*": "*Εϋδημος μὲν ὁ περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γράψας ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχώρησεν. γένεσιν γὰρ γωνίας ἐπινοῶν οὐκ ἄλλην εἶναι φησιν ἢ τὴν κλάσιν τῶν γραμμῶν - εἰ δέ ἡ εὐθύτης*

ποιότης καὶ ἡ κλάσις ποιότης - ἐν ποιότητι οὖν ἔχουσαν αὐτὴν τὴν γένεσιν πάντως εἶναι ποιότητα" (σελ. 125).

Οι Πυθαγόρειοι όχι μόνο γνώριζαν την έννοια της γωνίας, αλλά και πρώτοι απέδειξαν ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180° . Σύμφωνα με τον Ήρωνα, οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν τις γωνίες "γλαχίνας".

Ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης επίσης αναφέρονται συχνά σε γωνίες.

Όπως επισημαίνει ο Heath [81], εκφράζοντας απόψεις του Πρόκλου, ο ορισμός του Ευκλείδη για τη γωνία ως *κλίση μεταξύ ευθειών*, αποτέλεσε ένα νέο ξεκίνημα (*new departure*), αφού οι παλαιότεροι δεν έδιναν ορισμό με τη βοήθεια της κλίσης. Όμως όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, ο ορισμός αυτός είναι ελάχιστα χρηστικός. Ο ίδιος ο Ευκλείδης μάλιστα δεν τον χρησιμοποιεί στα *Στοιχεία*. Έτσι π.χ. προκειμένου να συγκρίνει δύο γωνίες δε συγκρίνει τις κλίσεις τους, αλλά είτε τις θεωρεί γωνίες τριγώνου ή τριγώνων που με τη βοήθεια κάποιας από τις προτάσεις I. 4 - I. 8 αποδεικνύει, είτε τις θεωρεί στο εσωτερικό ενός κύκλου (επίκεντρες ή εγγεγραμμένες).

Ο Πρόκλος στα πολλά σχόλια που έχει για τον ορισμό, αναφέρεται και στο δάσκαλό του Συριανό τον Αλεξανδρινό, ένα νεοπλατωνικό φιλόσοφο που διετέλεσε διευθυντής της Ακαδημίας, καθώς και στην κριτική που ο Συριανός έκανε στον ορισμό. Ο Συριανός παρατηρεί ότι είναι δυνατόν μια γωνία να δημιουργείται όχι από δύο, αλλά μόνον από μια γραμμή, π.χ. την *πλήρη κισσοειδή ή ιπποπέδη* κ.ά.

Σύμφωνα με τον Απολλώνιο (του οποίου ο ορισμός έχει χαθεί, αλλά γίνεται σχετική αναφορά του από τον Πρόκλο και τον Πλούταρχο τον Αθηναίο, διάδοχο του Συριανού στη διεύθυνση της Ακαδημίας), η γωνία είναι τομή επιπέδων ή στερεών ή γραμμών κλπ.

Σύμφωνα με τον Κάρπο τον Αντιοχέα (αναφέρεται από τον Πάππο) [98], η γωνία είναι μια ποσότητα, δηλαδή ένα "διάστημα" που περιέχεται μεταξύ των πλευρών ή των εδρών της.

Σήμερα το γεωμετρικό σχήμα που αποτελούν δύο διαφορετικές ημιευθείες με κοινή αρχή ονομάζεται *ευθύγραμμη γωνία*. Η κοινή αρχή ονομάζεται κορυφή και οι ημιευθείες πλευρές της γωνίας.

Η ευθύγραμμη γωνία όπως αναφέρεται στον ορισμό 9, αποτελεί ειδική περίπτωση της γωνίας και φαίνεται ότι ο Ευκλείδης δεν είχε την πρόθεση να την ορίσει, γιατί θα μπορούσε να είχε προτάξει τον ορισμό αυτό πριν από τον ορισμό της γωνίας.

Δύο βασικές παρατηρήσεις που κάνουν πολλοί μελετητές είναι οι εξής:

α) Πουθενά ο Ευκλείδης δεν αναφέρει κάτι για ισότητες γωνιών, δηλαδή δεν ορίζει την ισότητα μεταξύ γωνιών. Όμως στο κείμενο των Στοιχείων η σχέση αυτή χρησιμοποιείται αρκετές φορές.

β) Πουθενά ο Ευκλείδης δεν ορίζει μια "Άλγεβρα" γωνιών, δηλαδή η πρόσθεση και η αφαίρεση γωνιών δεν ορίζονται, αν και χρησιμοποιούνται στο κείμενο των Στοιχείων.

Την έννοια της γωνίας ως επίπεδου σχήματος, είτε ως αριθμητικής τιμής, είναι δυνατόν να την ορίσουμε και όταν οι πλευρές της γωνίας είναι καμπύλες. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε ως γωνία την γωνία των εφαπτομένων των καμπύλων στο σημείο της τομής τους.

Επίσης, ως γωνία ευθείας και επιπέδου θεωρούμε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με την προβολή της στο επίπεδο, ενώ ως γωνία δύο επιπέδων θεωρούμε τη γωνία που θα προκύψει από την τομή των επιπέδων με επίπεδο κάθετο στην τομή τους.

Τέλος, ως γωνία δύο ασύμβατων ευθειών ε , ε' θεωρούμε την επίπεδη γωνία που θα προκύψει αν από σημείο O του χώρου φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις ασύμβατες.

Μπορούμε πλέον να ορίζουμε και *στερεές γωνίες*. Μια **στερεά γωνία** είναι το μέρος του χώρου που περικλείεται από επιφάνειες. Ειδική περίπτωση των στερεών γωνιών αποτελούν οι πολυεδρικές γωνίες.

Γωνίες ορίζονται και σε πολυδιάστατους χώρους. Π.χ. έχουμε γωνίες μεταξύ *ευθειών, επιπέδων, υπερεπιπέδων* κλπ.

Τέλος, γωνίες ορίζονται και για μη-ευκλείδειους χώρους.

Σχετικά με τους ορισμούς 10, 11 και 12 έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

Η λέξη "εφεξής" είναι η λόγια έκφραση της έννοιας "επόμενος". Ο όρος είναι συνηθής τόσο στον Πλάτωνα όσο και στον Αριστοτέλη. Π.χ. στο διάλογο "*Παρμενίδης*" τον συναντούμε 3 φορές (148e 5-8, 148e 8-10, 149a 4-6), χωρίς όμως να αναφέρεται κάπου σε γωνία. Ο Αριστοτέλης επίσης δε χρησιμοποιεί τη λέξη μόνο για γωνίες, αλλά γενικά.

Η ισότητα δύο γωνιών ορίζεται από τον Ευκλείδη αξιωματικά (κοινή έννοια 7).

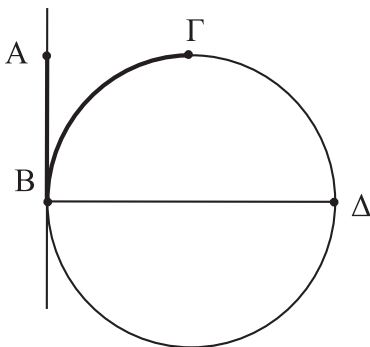
Ο Πρόκλος αναφέρει ότι οι παλαιότεροι γεωμέτρες ονόμαζαν την ορθή γωνία και γωνία "*κατά γνώμονα*", επειδή οι πρώτοι γνώμονες είχαν κάθετα σκέλη (βλέπε βιβλίο II).

Την ύπαρξη ορθής γωνίας ο Ευκλείδης αποδεικνύει στην πρόταση I.11 των Στοιχείων.

Για την οξεία και την αμβλεία γωνία ο Ήρων [102] δίνει τον παρακάτω ορισμό: "Όταν γάρ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ἀνίσους ποιῇ, ἡ μὲν ἐλάττων καλεῖται ὀξεῖα ἡ δὲ μείζων ἀμβλεία", δηλαδή η μικρότερη της ορθῆς γωνίας ονομάζεται οξεία και η μεγαλύτερη αμβλεία.

Στον Παρισινό κώδικα διαβάζουμε μιαν ἄλλη εκδοχή για τις γωνίες και μια εξήγηση για την ορολογία των γωνιών:

"Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶ, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα γραμμὴ κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν ἀμβλεία δὲ ἡ μείζων ὀρθῆς, ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς. Δι' ἣν αἰτίαν τὸ τριπλοῦν τῶν γωνιῶν εἶδος ὑπέστη, γεωμέτραι μὲν οὐκ ἂν φαῖεν, οἱ δὲ Πυθαγόρειοι καὶ τούτων ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀναφέροντες τὰς αἰτίας οὐκ ἀποροῦσι περὶ τῆς ὑποστάσεως αὐτῶν..."



Σχήμα 1

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι οι ορισμοί 11 και 12 δεν είναι σωστοί, αφού μια κερατοειδής γωνία (Σχ. 1) είναι μικρότερη της ορθῆς π.χ.

$\hat{AB}\Gamma < \hat{AB}\Delta = 90^\circ$, αλλά η $\hat{AB}\Gamma$ δεν είναι οξεία, αφού δεν είναι ευθύγραμμη γωνία. Η παρατήρηση αυτή του Πρόκλου ουσιαστικά είναι άμεσο συμπέρασμα της πρότασης III. 16.

Όπως ήδη αναφέραμε, οι λέξεις "ὀρος" και "πέρας" (ορισμός 13) θεωρούνται συνώνυμες και έτσι χρησιμοποιούνται Π.χ. ο Αριστοτέλης στο βιβλίο του "Περὶ ζώων γενέσεως" (745 α 5-) γράφει ότι όλα τα ζώα έχουν ένα ὄριο στο μέγεθός τους και παρακάτω (745α 9) "τοῦ γάρ μεγέθους ἐστὶ ταῦτα τοῖς ζώοις", δηλαδή όλα τα ζώα έχουν ένα ὄριο στην ανάπτυξή τους.

Ο Πρόκλος όμως παρατηρεί ότι αυτές οι λέξεις δεν είναι συνώνυμες. Η λέξη πέρας είναι περισσότερο γενική, για το λόγο αυτό και απο-

τελεί το γένος του ορισμού και επιπλέον, από την αρχή ακόμα της Γεωμετρίας, η λέξη *όρος* αναφερόταν για τα εμβαδά χωρίων, ενώ η λέξη *πέρας* για τις γραμμές.

Η λέξη "**σχήμα**" ή "**σχάμα**" του **ορισμού 14** ήταν γνωστή ήδη από την εποχή του Θαλή. Ο όρος στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά σήμαινε και το θεώρημα, την πρόταση.

Αντί του όρου *σχήμα* στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς συναντάται και ο όρος *καταγραφή*. Π.χ.:

Ευκλείδης (III. 33): "*Ἐστω πρότερον ὀξεῖα καὶ ὥς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς συνεστάτω...*".

Απολλώνιος (IV. 27) [130]: "*ὥς ἐκ τῆς πρώτης καταγραφῆς...*".

Πάππος (IV.47) [98]: "*ὥς ἔχουσιν αἱ καταγραφαί...*".

Πρόκλος (σελ. 400 κ. ε.): "*... ἐν τῇ πρό ταύτης καταγραφῇ...*".

Στον πλατωνικό διάλογο "*Μένων*" (67α 4-7) ο Σωκράτης αναφέρει: "*Μπορεί λοιπόν τώρα πια να καταλάβεις ὅστερα ἀπὸ αὐτά, πὼς ἐννοῶ τὸ σχήμα. Για κάθε σχήμα λέγω: Ὅτι τὸ σχήμα εἶναι ἐκεῖνο στο οποίο τελειώνει τὸ στερεό καὶ συνοψίζοντας θὰ μπορούσα νὰ πω: Σχήμα εἶναι τὸ πέρασ κάθε στερεοῦ*".

Ο Πρόκλος (σελ. 138), αφού δίνει διάφορες κατηγορίες σχημάτων (*κερατοειδή, σφαιροειδή, απλά, σύνθετα* κλπ.) αναφέρεται στον Ποσειδώνιο λέγοντας ότι: "*ὁ δὲ Ποσειδώνιος πέρασ συγκλείον ἀφορίζεται τὸ σχήμα*". Ενώ ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τον όρο "*διάγραμμα*".

Ο Αριστοτέλης, όπως είδαμε (βλέπε ορισμό γωνίας), αναφέρει διάφορα σχήματα, που, σύμφωνα με τον Πρόκλο, είχαν και ποιοτική σημασία.

Στον Παρισινό κώδικα ο **ορισμός 15** έχει ως εξής:

"*Κύκλος ἐστὶ σχήμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾷ γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἂφ' ἐνός σημείου τῶν ἐντός τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται*".

Αντίθετα ο Ήρων [102] δίνει ορισμό στον οποίο ορίζεται και η περιφέρεια. "*Κύκλος ἐστὶ τὸ ὑπὸ μιᾷ γραμμῆς περιεχόμενον ἐπίπεδον· τὸ μὲν οὖν σχήμα καλεῖται κύκλος, ἡ δὲ περιέχουσα γραμμὴ αὐτὸ περιφέρεια, πρὸς ἣν ἂφ' ἐνός σημείου τῶν ἐντός τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν*".

Ο Heath παρατηρεῖ ότι ο ορισμός του Ευκλείδη δεν έχει "γενετικό" χαρακτήρα, δηλαδή δε μας κατοχυρώνει την ύπαρξη ή όχι του κύκλου.

Πάντως, μετά την καθιέρωση του όρου "*περιφέρεια*" από τον Ευκλείδη, τον χρησιμοποίησαν όλοι οι γεωμέτρες των οποίων έχουν διασωθεί γραπτά κείμενα. Τον όρο βρίσκουμε στον Απολλώνιο, τον Αρχιμήδη, τον Ποσειδώνιο ((F 47, 38) "*δύο περιφερειῶν*", (F 47, 46) "*αἱ περιφέρειαί*" (F 47, 49) "*τὴν ἐκτός περιφέρειαν*") κ.ά.

Ο Πρόκλος (143.5) γράφει: "*...Ὁ μὲν οὖν Εὐκλείδης το ἐσχηματισμένον σχῆμα καλῶν καὶ τό ἐνυλον καὶ τῷ ποσῷ συνυπαρχον...*".

Ο Ποσειδώνιος χρησιμοποιεί την έννοια της περιφέρειας για να περιγράψει (όπως ο Αριστοτέλης) φυσικά φαινόμενα: "*...ὥς ἐν κατόπτρῳ φανταζομένην κύκλου περιφέρειαν*".

Ο ορισμός 16 εγγυάται την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του κέντρου του κύκλου και, όπως παρατηρεί ο Mueller [114], ο ορισμός αυτός είναι μια ένδειξη του κατασκευαστικού χαρακτήρα των *Στοιχείων*.

Σχετικά με τον ορισμό 17, όπως παρατηρεί ο Πρόκλος, ο Ευκλείδης δεν αναφέρεται στη διάμετρο οποιουδήποτε σχήματος, αλλά ειδικά του κύκλου. Σε σχόλια του Παρισινού κώδικα διαβάζουμε: "*Και το τετράγωνο έχει διάμετρο και τα παραλληλόγραμμα γενικώς και τα στερεά σώματα όπως η σφαίρα, αλλά των ευθυγράμμων (γεγωνιωμένων) ονομάζεται διαγώνιος, ενώ της σφαίρας άξονας, όπως και της έλλειψης και του κύκλου διάμετρος*".

Είναι πράγματι εκπληκτικό το γεγονός ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν για τη διάμετρο σχήματος την ίδια με εμάς άποψη.

Ο Πρόκλος στηριζόμενος σε πληροφορίες του Εύδημου αναφέρει ότι ο Θαλής ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι η διάμετρος διχοτομεί τον κύκλο: "*τό μὲν οὖν διχοτομείσθαι τοῦ κύκλου ὑπό τῆς διαμέτρου πρῶτον Θαλῆν ἐκείνον ἀποδείξαι φασίν*". Την πληροφορία αυτή μας δίνει και ο Ποσειδώνιος [103]. Είναι γνωστό, ότι ο Ζήνων ο Ελεάτης είχε αμφισβητήσει την αλήθεια της πρότασης του Θαλή. Ο Ευκλείδης φαίνεται ότι δεν είχε πεισθεί από τα επιχειρήματα του Ζήωνα και ίσως για το λόγο αυτό, όπως ισχυρίζεται ο von Fritz [158], πρόσθεσε στον ορισμό 17 την πρόταση του Θαλή, φράση, η οποία απαλείφθηκε από πολλούς σύγχρονους μεταφραστές (π.χ. R. Simson).

Παρατηρώντας διάφορους κώδικες, καθώς και τη μετάφραση του Hermann von Carinthia, [29] διαπιστώνουμε ότι η πρόταση "*κέντρον δέ ... τοῦ κύκλου ἐστίν*" **στον ορισμό 18**, δεν υπάρχει στο αρχικό κείμενο του Ευκλείδη.

Ο Heath πιστεύει ότι η φράση αυτή προστέθηκε από τον Πρόκλο αλλά φαίνεται να μην έχει δίκαιο, αφού ο Πρόκλος δίνει τη φράση "κέντρον δέ... ἐστίν", όπως αναγράφεται στον 19^ο ορισμό.

Ο Πρόκλος θεωρεί ότι το ημικύκλιο είναι το μόνο επίπεδο σχήμα του οποίου το κέντρο βρίσκεται στην περιμέτρου του.

Ο Ήρων δίνει και τον εξής ορισμό: "Ἡμικύκλιον ἐστίν τό ὑπό διαμέτρου κύκλου καί περιφερείας περιεχόμενον σχῆμα."

Σε πολλές εκδόσεις των *Στοιχείων*, π.χ. Βαρλαάμ-Δασυποδίου (Dasypodius), ο **ορισμός 19** είναι χωρισμένος σε 4 ορισμούς.

Ο Heath ([83]) αναφέρει ότι το μέρος του ορισμού το σχετικό με τα τρίπλευρα, τετράπλευρα και πολύπλευρα είναι πιθανόν του ίδιου του Ευκλείδη, αφού οι όροι *τρίπλευρο*, *τετράπλευρο* και *πολύπλευρο* δεν υπάρχουν σε κείμενα του Πλάτωνα, ενώ υπάρχουν μόνο σε δύο κείμενα του Αριστοτέλη, συγκεκριμένα στα "*Μηχανικά*" και τα "*Προβλήματα*".

Πάντως είναι χαρακτηριστικό ότι οι ορισμοί αυτοί δεν επικράτησαν πλήρως τα επόμενα χρόνια και δεν διατηρήθηκαν αυτούσιοι ως τις μέρες μας. Έτσι π.χ. οι όροι "*τρίπλευρο*", "*πολύπλευρο*" δε χρησιμοποιούνται στις μέρες μας, πράγμα που δε συμβαίνει με τον όρο *τετράπλευρο*.

Ο όρος *τετράγωνο* χρησιμοποιήθηκε για το ισόπλευρο και ισογώνιο τετράπλευρο.

Στο κείμενο του Πρόκλου ο ορισμός 19 έχει αριθμό XX-XIII, ωστόσο στις διαφορετικές εκδόσεις του Πρόκλου παρουσιάζονται αρκετές διαφορές στην αρίθμηση. Έτσι π.χ. στην έκδοση που έκανε ο Barocius το 1560 [126], στον ορισμό 19 υπάρχει και η φράση: "Ὡστε κάθε ευθύγραμμο σχῆμα είναι είτε τρίγωνο είτε τετράγωνο ἢ πολύπλευρο διαφόρων βαθμών". Αλλά και στην επόμενη γραμμή, ο Barocius πριν από τη φράση "ἢ πολύπλευρα" βάζει τη φράση "ἢ τετράπλευρα".

Οι έννοιες "*ισόπλευρο τρίγωνο*", "*ισοσκελές τρίγωνο*", "*σκαληνό τρίγωνο*" που βλέπουμε **στον ορισμό 20**, είναι αρκετά παλιές. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι η λέξη "**σκαληνός**" προέρχεται από τη λέξη "σκάζω", ενώ άλλοι από τη λέξη "σκολιός".

Οι όροι "*ισόπλευρον*", "*ισοσκελές*" και "*σκαληνόν*" αναφέρονται σε κείμενα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, π.χ. στον "*Ευθύφωνα*" και στα "*Προβλήματα*" αντίστοιχα. Ειδικά τον όρο "*σκαληνός*" συναντάμε σε πολλούς αρχαίους και Βυζαντινούς συγγραφείς, όπως στους Θεόφραστο, Ιπποκράτη, Δημόκριτο, Πλάτωνα, Ευκλείδη, Απολλώνιο, Νικόμαχο Γερασινό, Στωβαίο, Επιφάνιο κ.ά. Ο Γερασινός χρησιμοποιεί τον όρο *σκαληνός* και για τους περιττούς αριθμούς.

Ο Πρόκλος ταξινομεί τα τρίγωνα ως προς τις πλευρές και τις γωνίες τους σε 7 διαφορετικά είδη.

Τα 7 διαφορετικά είδη των τριγώνων είναι:

- (i) *το ισόπλευρο τρίγωνο*
- (ii) *τα τρία είδη των ισοσκελών τριγώνων (ορθογώνιο, αμβλυγώνιο και οξυγώνιο)*
- (iii) *τα τρία είδη των σκαληνών τριγώνων.*

Και σήμερα υπάρχει ο ίδιος διαχωρισμός σε είδη τριγώνων τόσο ως προς τις πλευρές (ισόπλευρα, ισοσκελή, σκαληνά, όπως στον ορισμό 20) όσο και ως προς τις γωνίες (αμβλυγώνια, ορθογώνια, οξυγώνια όπως στον **ορισμό 21**).

Η έννοια *τετράγωνο (ορισμός 22)* είναι παλιά και γνωστή στους Πυθαγορείους και, αν λάβουμε υπόψη τη σημασία του τετραγώνου για τη μέτρηση των εμβαδών, ίσως να ήταν γνωστή και στον Θαλή ή και ακόμα νωρίτερα. Ο Αριστοτέλης στο βιβλίο του *"Μετά τα Φυσικά"* (Α 985α - 985β) αναλύει διεξοδικά την προσφορά των Πυθαγορείων στα Μαθηματικά. Ακόμα αναφέρει μια σειρά από αντίθετες έννοιες, όπως *"πεπρασμένο και άπειρο, περιττό και άρτιο ... τετράγωνο και ορθογώνιο"*.

Στον Πλάτωνα συναντούμε αρκετές φορές την έννοια *τετράγωνο*. Π.χ. στο διάλογο *"Μένων"* ο Σωκράτης θέτει το πρόβλημα: ***Να κατάσκευασθεί τετράγωνο διπλάσιο από δοσμένο τετράγωνο.***

Αλλά και ο Αριστοτέλης σε πολλά κείμενα του αναφέρει τον όρο *"τετράγωνο"*. Στο βιβλίο του *"Περί Ψυχής"* (414β 29-31) δίνει μια άλλη διάσταση στην έννοια αυτή γράφοντας: *"ἀεί γάρ ἐν τῷ ἐφεξῆς ὑπάρχει δυνάμει τό πρότερον ἐπὶ τε τῶν σχημάτων καὶ ἐπὶ τῶν ἐμψύχων, οἷον ἐν τετραγώνῳ μὲν τρίγωνον ..."*, ενώ στο *"Μετά τα Φυσικά"* (1054β 1-2) αναφέρεται σε *ισογώνια τετράγωνα*, πράγμα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι ο Αριστοτέλης ονομάζει *"τετράγωνα"* τα τετράπλευρα. Προσωπικά πιστεύουμε ότι πρόκειται απλά για μια έκφραση.

Αλλά και μετά τον Ευκλείδη πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν την έκφραση αυτή, όπως π.χ. ο Ήρων, ο οποίος στον ορισμό του κύβου γράφει: *"Κύβος ἐστὶ σχῆμα ὑπὸ ἑξ τετραγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ὀρθογωνίων περιεχόμενον"*. Όμως οι ορισμοί του για τα τετράπλευρα είναι άσπογοι όπως:

Τετράγωνα: *"Τά μὲν οὖν ὀρθογώνια ἰσόπλευρα"*

Ετερομήκη: *"Τά δὲ ὀρθογώνια μὲν, μὴ ἰσόπλευρα δέ, . . ."*

Ρόμβοι: *"Τά δέ ισόπλευρα μέν, μή ὀρθογώνια δέ, . . ."*

Ρομβοειδή: *" Τά μήτε ισόπλευρα μήτε ὀρθογώνια, τάς δέ ἀπέναντι πλευράς τε καί γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχοντα".*

Με τον **ορισμό 23** δεν ορίζουμε ένα ή περισσότερα γεωμετρικά αντικείμενα του επιπέδου, αλλά μια σχέση (ισοδυναμία) μεταξύ των ευθειών.

Η έννοια αυτή είναι παλιά. Θα ήταν οπωσδήποτε γνωστή στο Θαλή, αφού όπως αναφέρουν οι Σιμπλίκιος, Πλούταρχος ο Αθηναίος κ.ά., για να υπολογίσει το ύψος μιας πυραμίδας σχηματίζει δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα με παράλληλες πλευρές.

Ο Εύδημος [129] αναφέρει ότι οι Πυθαγόρειοι, γνώριζαν το θεώρημα *ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ ΒΓ, ΔΕ καί αἱ ἐναλλάξ ἴσαι εἰσὶν ἴση ἄρα ἡ μέν ὑπὸ ΔΑΒ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ ἡ δέ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ*, όπως αναφέρει ο Β. L. van der Waerden.

Στον Αριστοτέλη αναφέρεται συχνότατα ο όρος *παράλληλες ευθείες* (βλέπε π.χ. στα *"Αναλυτικά Πρότερα"*, Β 65α 4-9).

3. Αιτήματα

Μετά τους ορισμούς ακολουθούν τα αιτήματα (postulati), που είναι πέντε, τα εξής:

Αίτημα 1

Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο.

Αίτημα 2

Το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

Αίτημα 3

Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο και ακτίνα κάθε τμήμα, είναι δυνατό να γράψουμε κύκλο.

Αίτημα 4

Και όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Αίτημα 5

Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος "εντός και επί τα αυτά" γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

Σχόλια

Κατά καιρούς έχουν διατυπωθεί πολλές θεωρίες για τη φύση των αιτημάτων, αλλά κανένας ιστορικός δεν θέτει υπό αμφισβήτηση ότι τα αιτήματα και η σειρά με την οποία παρουσιάζονται αποτελεί εκλογή του ίδιου του Ευκλείδη.

Ο Zeuthen [165] πίστευε ότι στην ευκλείδεια και προευκλείδεια εποχή τα αιτήματα ήταν κατασκευές που είχαν σκοπό να αποδείξουν την ύπαρξη των διάφορων γεωμετρικών αντικειμένων.

Πράγματι, τα τρία πρώτα αιτήματα έχουν αυτό τον χαρακτήρα, αλλά δεν ισχύει το ίδιο για τα αιτήματα 4 και 5, για τα οποία πολλοί μαθηματικοί είχαν την άποψη ότι έπρεπε να θεωρηθούν "*κοινές έννοιες*", δηλαδή αξιώματα.

Τις ίδιες απόψεις υιοθετεί και ο Γερμανός ιστορικός Oskar Becker, [12] που γράφει: "*Τα αιτήματα έχουν την αποστολή να αποδείξουν την μαθηματική ύπαρξη κάποιων βασικών γεωμετρικών αντικειμένων*". Το 5^ο αίτημα των παραλλήλων κατά την άποψη του Becker μας καθορίζει την ύπαρξη του κοινού σημείου των ευθειών, άρα είναι πράγματι αίτημα, σύμφωνα με την άποψη και του Zeuthen.

Το αίτημα 1 είναι ισοδύναμο με την πρόταση:

"Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μια ευθεία".

Το αίτημα αυτό έχουν συμπεριλάβει σαν αξίωμα πολλοί νεότεροι γεωμέτρες στα αξιωματικά τους συστήματα π.χ. Hilbert, Birkhoff κ.ά.

Παρατηρούμε ότι στο αίτημα 1 δεν λαμβάνεται υπόψη η περίπτωση που το δεύτερο σημείο ταυτίζεται με το πρώτο.

Ο Πρόκλος στο σημείο αυτό είναι αρκετά διαφωτιστικός. Αναφέρει ότι οι πρώτες αρχές της Γεωμετρίας διαιρούνται σε τρεις ομάδες: ***υποθέσεις, αιτήματα και αξιώματα***.

Ακολουθώντας, αφού περιγράφει τη σημασία κάθε μιας από τις έννοιες αυτές, εξετάζει το αίτημα 1 και παρατηρεί ότι αυτό περιγράφει τη μορφή της ευθείας.

Το αίτημα 1 επιπλέον μας δίνει τη βασική λειτουργία του γεωμετρικού οργάνου που ονομάζεται ***κανόνας***, δηλαδή αν δοθούν δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε μπορούμε να χαράξουμε την ευθεία που τα συνδέει.

Και το αίτημα 2 αποτελεί ουσιαστικά την περιγραφή της λειτουργίας του ***κανόνα***, ενώ επιβεβαιώνει και τη δυνατότητα του τμήματος να προεκτείνεται εκατέρωθεν επ' άπειρον και συνεχώς.

Ακόμα, το αίτημα 2 σε συνδυασμό με το 1 επιβεβαιώνει την πρόταση: *"Αν δύο ευθείες έχουν ένα τμήμα κοινό, τότε ταυτίζονται"*.

Μια σημαντική συνέπεια του αιτήματος 3, που εντοπίστηκε από τους πρώτους κιόλας σχολιαστές των *Στοιχείων*, είναι το γεγονός ότι ο ευκλείδειος χώρος είναι συνεχής και εκτείνεται επ' άπειρον.

Στην έκδοση Βαρλαάμ –Δασυποδίου (Dasypodius) υπάρχουν μόνο τρία αιτήματα, αυτά που αναφέραμε προηγουμένως. Τα αιτήματα 4 και 5 αναφέρονται ως *κοινές έννοιες*.

Πολλά σχόλια έχουν γίνει για το αίτημα 4. Ο Πάππος [98] παρατήρησε ότι το αντίστροφο του αιτήματος 4 δεν ισχύει. *"Ο δέ Πάππος επέστησεν ἡμᾶς ὀρθῶς, ὅτι τό αντίστροφον οὐκέτι ἀληθές, τό τήν ἴσην τῇ ὀρθῇ γωνίαν ἐκ παντός εἶναι ὀρθήν, ἀλλ' εἰ μὲν εὐθύγραμμός εἴη, πάντως ὀρθή εἶναι"* γράφει ο Πρόκλος [66], ο οποίος αναφέρει ακόμα ότι ο Γεμίνος ο Ρόδιος θεωρούσε πως το αίτημα 4 ήταν διαφορετικό από τα τρία πρώτα που αναφέρονταν σε μια γεωμετρική κατάσκευή. Για το λόγο αυτό δε θα πρέπει να το θεωρήσουμε ως αίτημα, αλλά ως αξίωμα (*κοινή έννοια*): *"Αἴτημα μὲν οὐκ ἐστὶ κατὰ τόν Γεμῖνον, ἀξίωμα δέ"*.

Ο Πρόκλος παρατήρησε ακόμα ότι, προκειμένου να αποδειχθεί η πρόταση *"ὅλες οἱ ὀρθές γωνίες εἶναι ἴσες"*, θα πρέπει να δεχτούμε την υπόθεση ότι κάθε σχήμα μένει αμετάβλητο κατά τη μετακίνηση, οπότε η πρόταση θα μπορούσε να αποδειχτεί με τη μέθοδο *"της επίθεσης"*.

Ο Ευκλείδης όμως προτίμησε να θεωρήσει την πρόταση σαν αίτημα που αφορά μια εσωτερική αναλλοίωτη των ορθών γωνιών, ενώ ο Πρόκλος θεωρούσε ότι η πρόταση δεν είναι δυνατό να θεωρηθεί σαν αίτημα με την αριστοτελική έννοια του όρου. Προσπάθησε λοιπόν να αποδείξει την πρόταση 4 ως εξής:



Σχήμα 2

Έστω δύο ορθές γωνίες $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$ (Σχ. 2). Ας υποθέσουμε ότι $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z} < \hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και ας τοποθετήσουμε την $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$ ώστε η $E\hat{Z}$ να συμπίπτει με την $O\hat{B}$, οπότε η $E\hat{\Delta}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και θα συμπίπτει με την $O\hat{\Theta}$. Προεκτείνουμε την $O\hat{A}$ και την $O\hat{\Theta}$. Τότε, επειδή $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{B}\hat{O}\hat{H}$ και $\hat{\Theta}\hat{O}\hat{B} = \hat{B}\hat{O}\hat{I}$, θα είναι $\hat{B}\hat{O}\hat{H} > \hat{B}\hat{O}\hat{I}$, δηλαδή η $O\hat{I}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της $\hat{B}\hat{O}\hat{H}$, που είναι άτοπο.

Βέβαια, εδώ ο Πρόκλος δεν εξηγεί γιατί η $O\hat{I}$ θα βρίσκεται στο εξωτερικό της $\hat{B}\hat{O}\hat{H}$.

Το αίτημα 5 των *Στοιχείων* απασχόλησε τους μαθηματικούς για περισσότερο από δυο χιλιάδες χρόνια και αποτέλεσε το έναυσμα για την αλματώδη ανάπτυξη της Γεωμετρίας στις μέρες μας. Σχεδόν από την εποχή του Ευκλείδη οι μαθηματικοί θεωρούσαν ότι το 5^ο αίτημα αποτελεί θεώρημα που θα μπορούσε να αποδειχθεί.

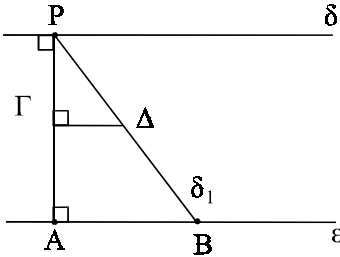
Οι πιο σημαντικές προσπάθειες για την κατανόηση της σημασίας για τη Γεωμετρία του 5^{ου} αιτήματος έγιναν από τους:

α) Πρόκλος (410-485 μ.Χ.). Ο Πρόκλος ήταν ο πρώτος που αντιλήφθηκε λάθος στην προσπάθεια "απόδειξης" του 5^{ου} αιτήματος από τον Πτολεμαίο. Κατανόησε επίσης ότι το 5^ο αίτημα δε χρειάζεται να αποδειχθεί.

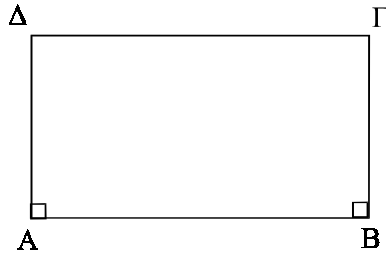
β) Nasir Eddin al-Tusi (1201-1274). Ο Πέρσης αυτός μαθηματικός προσπάθησε να αποδείξει το 5^ο αίτημα χρησιμοποιώντας ανεπιτυχώς την έννοια του *ομοίου σχήματος*.

γ) J. Wallis (1616-1703). Ο Άγγλος Wallis με αφετηρία τις εργασίες του Nasir Eddin al-Tusi απέδειξε ότι, αν ισχύει το 5^ο αίτημα, τότε υπάρχουν όμοια τρίγωνα.

Πράγματι, έστω ότι από σημείο P εκτός ευθείας ε άγεται μία μόνο παράλληλη δ στην ευθεία ε . Δηλαδή κάθε άλλη ευθεία δ_1 τέμνει την ε έστω στο σημείο B (Σχ. 3). Τότε όμως, αν από ένα σημείο Γ της PA φέρουμε ευθεία κάθετη στην PA , η οποία τέμνει την δ_1 στο Δ , τα ορθογώνια τρίγωνα PAB , $P\Gamma\Delta$ θα είναι όμοια.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

δ) G. Saccheri (1667-1733). Ο Άγγλος G. Saccheri προσπάθησε να αποδείξει το 5^ο αίτημα χρησιμοποιώντας την απαγωγή σε άτοπο.

Θεώρησε ένα παραλληλόγραμμο ABΓΔ, στο οποίο $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ και $B\Gamma = A\Delta$ (Σχ. 4). Στη συνέχεια διέκρινε τρεις περιπτώσεις:

α) $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

β) $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} > 90^\circ$

γ) $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} < 90^\circ$

Θέλοντας να αποδείξει ότι ισχύει η περίπτωση (α) απέκλεισε τις περιπτώσεις (β) και (γ). Νόμιζε μάλιστα ότι το κατόρθωσε. Στην πραγματικότητα, χωρίς να το αντιληφθεί, είχε ανακαλύψει τις μη-ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Το έργο του Saccheri γνώριζε ο J. Bolyai (1802-1860) [20], ο οποίος το 1831, ανεξάρτητα από το Ρώσο N. Lobatsevski (1792-1856), απέδειξε τη δυνατότητα ύπαρξης και μη ευκλείδειων Γεωμετριών. Ο Lobatsevski είχε αποδείξει το ίδιο πράγμα το 1829, όμως το άρθρο του, γραμμένο στα Ρωσικά και δημοσιευμένο σε ένα λογοτεχνικό περιοδικό, είχε περάσει απαρατήρητο.

Με τις έρευνες των παραπάνω έγινε δυνατή η απόδειξη της ύπαρξης των μη ευκλείδειων Γεωμετριών, πράγμα πολύ σημαντικό για την όλη εξέλιξη της Γεωμετρίας.

4. Κοινές έννοιες (αξιιώματα)

Τα αιτήματα ακολουθούν εννέα κοινές έννοιες (αξιιώματα), οι εξής:

1. *Τα μεγέθη που είναι ίσα προς τρίτο μέγεθος είναι και μεταξύ τους ίσα.*
2. *Και αν σε ίσα προστεθούν ίσα προκύπτουν ίσα.*
3. *Και αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, μένουν ίσα.*
4. *Και αν σε άνισα προσθέσουμε ίσα, προκύπτουν άνισα.*
5. *Και τα διπλάσια του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.*
6. *Και τα μισά του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.*
7. *Και αυτά που εφαρμόζουν μεταξύ τους, είναι ίσα μεταξύ τους.*
8. *Και ολόκληρο (το μέγεθος) είναι μεγαλύτερο ενός μέρους του.*
9. *Και δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια (χωρίο).*

Σχόλια

Στην έκδοση Βαρλαάμ-Δασυποδίου (Dasypodius) μεταξύ της 4^{ης} και της 5^{ης} κοινής έννοιας παρεμβάλλονται οι εξής: "Καί εάν άνίσοις ἴσα προστεθῇ, τά ὅλα ἐστίν ἄνισα." "Καί εάν ἀπό άνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τά λοιπά ἐστίν ἄνισα." Τέλος μετά την 9^η ακολουθεί η πρόταση: "Καί δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν".

Άλλοι πάλι παρουσιάζουν την 8^η κοινή έννοια ως 9^η.

Με εξαίρεση την 7^η και 9^η κοινή έννοια, που είναι καθαρά γεωμετρικές, οι άλλες είναι αξιώματα για την ισότητα και την ανισότητα, το διπλασιασμό ή τη διαίρεση διά δύο (διχοτόμηση), καθώς και σχέσεις για το άθροισμα και τη διαφορά. Π.χ. οι κοινές έννοιες: αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$,

τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ και $\alpha - \gamma = \beta - \delta$, έχουν αλγεβρική έκφραση, δηλαδή αποτελούν την "Αλγεβρα" των μεγεθών.

Γι' αυτό πολλοί μελετητές των *Στοιχείων* έγραψαν πως υπάρχουν δύο είδη αξιωμάτων, τα "γενικά" και τα "γεωμετρικά". Τα γενικά αναφέρονταν σε μεγέθη κάθε είδους, ενώ τα γεωμετρικά σε γεωμετρικά μεγέθη.

Στα σχόλια του Πρόκλου αναφέρονται ως αξιώματα μόνο οι κοινές έννοιες (α), (β), (γ), (η), (ζ).

Αν μαζί με το κείμενο του Ευκλείδη μελετήσει κάποιος και το κείμενο του Πρόκλου, θα διαπιστώσει ότι ο Πρόκλος ακολουθεί πιστά την ορολογία του Ευκλείδη, όπως άλλωστε είναι υποχρεωμένος να κάνει κάθε σοβαρός σχολιαστής. Το μοναδικό σημείο όπου ο Πρόκλος διαφοροποιείται από τον Ευκλείδη είναι ο όρος "αξίωμα" αντί του όρου "κοινές έννοιες" του Ευκλείδη. Γράφει ο Πρόκλος: *"Οι πρώτες αρχές της Γεωμετρίας είναι διαιρεμένες σε τρεις ομάδες: τις υποθέσεις, τα αιτήματα και τα αξιώματα. Έχουμε εξηγήσει τη διαφορά μεταξύ αυτών (πράγματι ο Πρόκλος στην § 76 αναφέρει ότι οι έννοιες αυτές είναι διαφορετικές από τις αριστοτελικές) αλλά τώρα θα εξετάσουμε ειδικά και περισσότερο λεπτομερειακά τη διαφορά μεταξύ αιτήματος και αξιώματος..."*.

Η έννοια του *αιτήματος* διαφέρει από αυτήν του *αξιώματος* στο γεγονός ότι τα μεν αιτήματα αναφέρονται σε καθαρά γεωμετρικές έννοιες, τα δε αξιώματα είναι γενικότερες προτάσεις που δεν αφορούν μόνο τη Γεωμετρία.

Από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα (1884) ο P. Tannery [138] είχε εκφράσει την άποψη ότι ο όρος "έννοια" δεν ανήκει στη φιλοσοφική γλώσσα της εποχής του Ευκλείδη, αλλά ούτε υπάρχει και στα γραπτά του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη με τη σημασία που του δίνει ο Ευκλείδης. Αντίθετα, τη βρίσκουμε στους Στωικούς, που ήταν σύγχρονοι του Ευκλείδη. Το γεγονός αυτό μαζί με άλλα που ήδη αναφέραμε έρχεται να ενισχύσει την άποψη ότι ο Ευκλείδης θέλησε να ανεξαρτητοποιηθεί από την υπάρχουσα μαθηματική ορολογία, όπου αυτό ήταν δυνατό.

Στα σχόλιά του ο Πρόκλος γράφει για τον Απολλώνιο: *"Πολλοὺ ἄρα δεήσομεν ἡμεῖς τὸν Γεωμέτην Απολλώνιον ἐπαινείν, ὅς καὶ τῶν ἀξιωμάτων ὡς οἶεται γέγραφεν ἀποδείξεις ἀπεναντίας Εὐκλείδης φερόμενος"*. Όπως είναι γνωστό, ο Απολλώνιος προσπάθησε να αποδείξει την πρώτη έννοια.

Πάντα σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Πάππος πρότεινε και άλλα συμπληρωματικά αξιώματα, τα οποία δεν έχουν μεγάλη πρακτική γεωμετρική σημασία, παρά μόνο αν τα δει κανείς ως αξιώματα των πράξεων του συνόλου R των πραγματικών αριθμών.

Επίσης ο Ήρων, όπως αναφέρει ο al-Nayrizi, [39] διατυπώνει την 4^η κοινή έννοια ως εξής: ***"Και αν από άνισα αφαιρεθούν ίσα, τότε αυτά που μένουν θα είναι ομοίως άνισα"***.

Οι τρεις πρώτες κοινές έννοιες είναι ευκλείδειες, όπως υποστηρίζει ο Ήρων, όχι όμως και οι έννοιες 7 και 8.

Ο πιο αναγνωρισμένος μελετητής και μεταφραστής του Ευκλείδη, ο Heiberg [86], θεωρεί ότι οι τρεις πρώτες κοινές έννοιες δημιουργήθηκαν από τον Ευκλείδη, ενώ η τέταρτη πιθανόν από κάποιο σχολιαστή, που κατά τη γνώμη του είναι ο ίδιος ο Πάππος.

Η 7^η κοινή έννοια είναι αυτή στην οποία στηρίζεται η μέθοδος *"της επίθεσης"*, με την οποία ο Ευκλείδης αποδεικνύει την πρόταση I.4. Σύμφωνα με αυτή την κοινή έννοια, δύο ευθύγραμμα τμήματα που συμπίπτουν είναι ίσα, όπως και δύο γωνίες που συμπίπτουν είναι ίσες.

Την κοινή έννοια 8 εκτός από τους μαθηματικούς την έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιήσει και διάφοροι φιλόσοφοι, π.χ. ο Πλωτίνος, ο Clanvill κ.ά. Ο τελευταίος την παραθέτει αυτούσια στο βιβλίο του *"The agreement of reason"*, που κυκλοφόρησε το 1675 [140]. Στο ίδιο βιβλίο περιέχονται και αρκετά αξιώματα του Αριστοτέλη.

Οι H. Hasse και H. Scholz [77] θεωρούν ότι στην κοινή έννοια 8 *"συνυπάρχει διαίσθησις"*.

Τέλος, παρατηρούμε ότι η κοινή έννοια 4 δε χρησιμοποιείται από τον Ευκλείδη στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων*. Ο P. Tannery [138] πιστεύει ότι η σύνδεση αυτής της κοινής έννοιας με τις υπόλοιπες θα πρέπει να είναι πρόσφατη, επειδή, όπως παρατηρεί, δεν αναφέρεται τίποτε σχετικό από τους αρχαιότερους συγγραφείς.

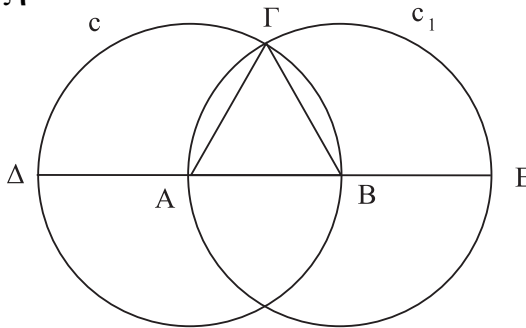
5. Η Ουδέτερη (Απόλυτη) Γεωμετρία

Όπως ήδη αναφέραμε οι προτάσεις 1 μέχρι 28 λέμε ότι αποτελούν την ***Ουδέτερη (Απόλυτη) Γεωμετρία***, δηλαδή τη Γεωμετρία που ορίζουν οι ομάδες αξιωμάτων I, II, II, IV (συμπτωτικά, διάταξης, ισότητας, συνέχειας).

Για λειτουργικούς λόγους οι προτάσεις 27 και 28 περιέχονται στην επόμενη παράγραφο (Η Γεωμετρία των παραλλήλων).

Πρόταση 1 (Ι. 1)

Με πλευρά δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο.

Απόδειξη

Σχήμα 5

Έστω AB το δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα (Σχ. 5). Μας ζητείται να κατασκευάσουμε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά το AB .

Με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AB γράφουμε κύκλο c και με κέντρο το B και ακτίνα BA γράφουμε κύκλο c_1 . Από το σημείο Γ που τέμνονται οι κύκλοι φέρνουμε τα $\Gamma A, \Gamma B$. Επειδή το A είναι το κέντρο του κύκλου και τα B, Γ σημεία του, τότε $AG = AB$ και ομοίως $B\Gamma = BA$, ώστε $\Gamma A = AB = B\Gamma$. Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και έχει πλευρά το τμήμα AB .

ὁ.ἔ.π.

Σημείωση

Όταν σε μια πρόταση απαιτείται να αποδειχθεί κάτι, τότε η διαπραγμάτευση τελειώνει με τη φράση "ὅπερ ἔδει δεῖξαι" (ὁ.ἔ.δ.), ενώ όταν απαιτείται κατασκευή, χρησιμοποιείται η φράση "ὅπερ ἔδει ποιῆσαι" (ὁ.ἔ.π.).

Σχόλια

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο Ευκλείδης διατυπώνει τις αποδείξεις με ομοιομορφία ανεξάρτητα από τη μέθοδο που χρησιμοποιεί. Σε κάθε

πρόταση και την απόδειξή της διακρίνουμε τα έξι μέρη από τα οποία αποτελείται: Την **πρόταση**, την **έκθεση**, το **διορισμό**, την **κατασκευή**, την **απόδειξη** και το **συμπέρασμα**. Π.χ. για την πρόταση I.1 έχουμε :

1. **Πρόταση:** Με πλευρά δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο.
2. **Έκθεση:** Έστω AB το δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα.
3. **Διορισμός:** Ζητάμε να κατασκευάσουμε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά το AB.
4. **Κατασκευή:** Με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AB γράφουμε κύκλο BΓΔ και με κέντρο το B και ακτίνα BA γράφουμε κύκλο AΓΕ. Από το σημείο Γ που τέμνονται οι κύκλοι φέρνουμε τα ΓΑ, ΓΒ.
5. **Απόδειξη:** Επειδή το A είναι το κέντρο του κύκλου και τα B, Γ σημεία του, τότε $ΑΓ=ΑΒ$ και όμοια $ΒΓ = ΒΑ$, ώστε $ΓΑ=ΑΒ=ΒΓ$.
6. **Συμπέρασμα:** Άρα το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο και έχει πλευρά το τμήμα AB. Ώστε . . . ὁ.ἔ.π.

Αυτή τη διάταξη ακολουθούν οι περισσότεροι μεταφραστές των *Στοιχείων* μέχρι τον 18^ο αιώνα, αρχής γενομένης από τον Dasyrodus (το 1564) [10].

Στην περίπτωση κατά την οποία αντί για κατασκευή έχουμε θεώρημα, στο συμπέρασμα απλά επαναλαμβάνεται η πρόταση.

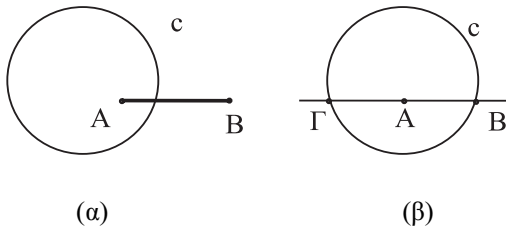
Όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, στα αρχαία κείμενα η απόδειξη ήταν μόνο ένα από τα πέντε (5) μέρη της αποδεικτικής διαδικασίας. Ενώ σήμερα, όταν μιλάμε για απόδειξη, εννοούμε "αποδεικτική διαδικασία".

Στο κείμενο του Heiberg [87] υπάρχει μέσα σε αγκύλες η φράση: [Συνεπώς από ένα δοσμένο τμήμα μπορεί να κατασκευασθεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο]. Αυτή η φράση δεν υπάρχει στα χειρόγραφα ούτε χρησιμεύει κάπου. Αναφέρεται βέβαια σε κάποια σχόλια γι' αυτό τη συμπεριέλαβε ο Heiberg στο κείμενο.

Με τη βοήθεια της πρότασης I.1 είναι δυνατό να αποδείξουμε ότι:

- α) *Αν τα σημεία A, B βρίσκονται στο εσωτερικό και εξωτερικό κύκλου c, τότε το τμήμα AB τέμνει τον κύκλο (Σχ. 6α).*
- β) *Αν μια ευθεία διέρχεται από εσωτερικό σημείο του κύκλου c, τέμνει τον κύκλο c ακριβώς σε δύο σημεία (Σχ. 6β).*

- γ) Τα τμήματα α, β, γ αποτελούν πλευρές τριγώνου, αν και μόνο αν καθένα είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων.
 δ) Αν οι κύκλοι $c_1(A, \alpha)$ και $c_2(B, \beta)$ έχουν $AB = \gamma$ και καθένα τμήμα από τα α, β, γ είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων, τότε οι κύκλοι έχουν ακριβώς δύο σημεία κοινά.

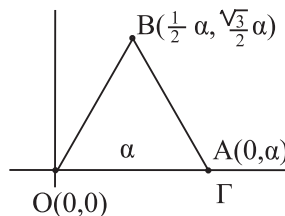


Σχήμα 6

Ο Ευκλείδης υπέθεσε σιωπηρά ότι οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία A, B και ακτίνα AB τέμνονται στο σημείο Γ , δηλαδή υπέθεσε ότι ο κύκλος είναι μια **συνεχής** γραμμή, αλλά, δυστυχώς, αυτό δεν το αναφέρει κάπου.

Στα σύγχρονα αξιωματικά συστήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας την τομή των δύο αυτών κύκλων επιβεβαιώνουν τα αξιώματα της **συνέχειας** και τα αξιώματα του μεταξύ.

Για να κατανοήσουμε τη σημασία της συνέχειας, ας θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy στο επίπεδο με σημεία που έχουν συντεταγμένες ρητούς αριθμούς και το σημείο $A(0, \alpha)$ (Σχ. 7).



Σχήμα 7

Οι κύκλοι $c_1(O, \alpha)$ και $c_2(A, \alpha)$ δεν τέμνονται, αφού το σημείο $B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)$ δεν ανήκει στο επίπεδο.

Το *θεώρημα των δύο κύκλων*, όπως συνήθως ονομάζεται η πρόταση I.1, είναι δυνατόν να αποδειχθεί είτε με τη βοήθεια της "αρχής της συνέχειας" του Dedekind (μάλιστα ισχύει ότι σε κάθε επίπεδο Hilbert η πρόταση I.1 συνεπάγεται το αξίωμα 5) είτε από το λεγόμενο "θεώρημα του τριγώνου", το οποίο αναφέρει ότι:

Αν α, β, γ είναι τρία ευθύγραμμα τμήματα, για τα οποία ισχύει $|\beta - \gamma| \leq \alpha < \beta + \gamma$, τότε υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ .

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του θεωρήματος της *ενδιάμεσης τιμής* είτε με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος. (Βλέπε Θ. Εξαρχάκου, "Εισαγωγή στα Μαθηματικά", τ. I, σελ. 78-79) [55].

Η κατασκευή αυτή παρόλο που δε μνημονεύεται από τον Πρόκλο, βρίσκεται στα σχόλια του Ήρωνα, τα οποία υπάρχουν στο βιβλίο του al-Nayrizi [39].

Φαίνεται ότι ο Ευκλείδης είχε κατανοήσει πως η πρόταση I.1 των *Στοιχείων* είναι πολύ σημαντική, γι' αυτό άλλωστε την τοποθέτησε στη θέση αυτή.

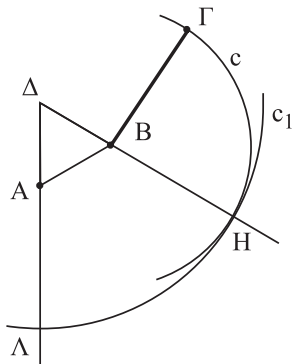
Πρόταση 2 (I. 2)

Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα ίσο με δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα και με το ένα άκρο του επίσης δεδομένο.

Έκθεση: Έστω A το δοσμένο σημείο και $B\Gamma$ το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα (Σχ. 8).

Διορισμός: Ζητάμε να φέρουμε από το A τμήμα ίσο με το $B\Gamma$.

Κατασκευή: Φέρουμε το AB (αίτημα 1) και κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΔAB με πλευρά AB (πρόταση 1). Προεκτείνουμε τις ΔA , ΔB (αίτημα 2) και γράφουμε κύκλο c με κέντρο B και ακτίνα $B\Gamma$ (αίτημα 3), που τέμνει την ΔB στο H . Με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔH γρά-



Σχήμα 8

φουμε κύκλο c_1 που τέμνει την ΔA στο Λ .

Απόδειξη: Επειδή το Δ είναι κέντρο του κύκλου c_1 , τότε $\Delta H = \Delta \Lambda$ και αφού $\Delta A = \Delta B$, θα είναι $\Delta \Lambda - \Delta A = \Delta H - \Delta B$ ή $A\Lambda = BH = B\Gamma$.

Συμπέρασμα: ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Η σημασία της πρότασης είναι ότι **δεν είναι δυνατό να μεταφέρουμε με τον διαβήτη ένα τμήμα από ένα μέρος του επιπέδου στο άλλο χωρίς να κάνουμε κατασκευή.**

Ο Πρόκλος επισημαίνει ότι η λύση που δίνουν κάποιοι γράφοντας κύκλο με κέντρο A και ακτίνα $B\Gamma$ είναι ένα *petitio principii* (=αίτημα αρχής, αρχή ζητούμενου), δηλαδή *κάνουμε χρήση αυτού που ζητούμε να κατασκευάσουμε.*

Στον Βατικανό ελληνικό κώδικα διαβάζουμε για την πρόταση 2:

"Αλλα προβλήματα είναι προβλήματα μιας περίπτωσης και άλλα πολλών περιπτώσεων, όπως το 2".

Εύκολα μπορούμε να διακρίνουμε 8 περιπτώσεις, τις περισσότερες από τις οποίες είχαν αντιμετωπίσει διάφοροι αρχαίοι σχολιαστές.

Π.χ. το σημείο A θα μπορούσε να βρίσκεται

- (i) εκτός του $B\Gamma$,
- (ii) επί του $B\Gamma$.

Αν το A βρίσκεται εκτός του $B\Gamma$, θα μπορούσε να βρίσκεται σε ένα από τα ημιεπίπεδα που ορίζει η $B\Gamma$ είτε σε μια από τις προεκτάσεις του $B\Gamma$.

Αν το A βρίσκεται επί του $B\Gamma$, θα μπορούσε να βρίσκεται στο μέσο του $B\Gamma$, σε ένα από τα άκρα του $B\Gamma$, σε ένα σημείο του $B\Gamma$.

Ο τρόπος αυτός διαίρεσης μιας πρότασης δεν μοιάζει με τον κλασικό τρόπο, όπου η καταγραφή των περιπτώσεων είχε έννοια καθοριστική και δεν ήταν άνευ περιεχομένου.

Ο Ευκλείδης και άλλοι αρχαίοι γεωμέτρεις αποδείκνυναν μόνο μια περίπτωση, τη δυσκολότερη, και άφηναν τις άλλες στους αναγνώστες.

Στα σχόλια του Ήρωνα [102] για τα *Στοιχεία* υπάρχουν αποδείξεις διαφορετικές από αυτές που αναφέρονται στον Πρόκλο ή τον Ευκλείδη. Μια προσεκτική μελέτη των αποδείξεων και των κατασκευών των προτάσεων των *Στοιχείων* μας πείθει ότι ο συγγραφέας των *Στοιχείων* ακο-

λουθεί μια σύγχρονη λιτή αποδεικτική διαδικασία με όσο το δυνατό λιγότερα βήματα, που μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για τις άλλες περιπτώσεις. Δημιουργεί έτσι μια αποδεικτική διαδικασία κατά την οποία τα βήματα που ακολουθούνται θυμίζουν τα διάφορα στάδια ενός αλγορίθμου, όπως χρησιμοποιούνται με τον H/Y .

Το πιο σημαντικό όμως δεν είναι ότι ο Ευκλείδης δημιουργεί αλγορίθμους, αλλά ότι κατόπιν δικαιολογεί την λειτουργία των αλγορίθμων αυτών, διαδικασία που δε γίνεται από πολλούς σημερινούς κατασκευαστές αλγορίθμων. Μερικές φορές ο Ευκλείδης τοποθετεί στον αλγόριθμο που κατασκευάζει επιπλέον βήματα, προφανώς για διδακτικούς σκοπούς.

Παρακάτω θα δώσουμε την απόδειξη μερικών άλλων περιπτώσεων της πρότασης 2.

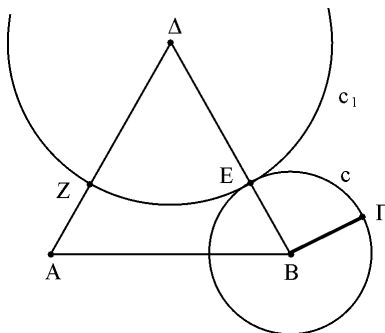
1. Δεδομένα. Έστω σημείο A και $B\Gamma$ το δοσμένο τμήμα (Σχ. 9)

Βήμα 1. Συνδέουμε τα A, B .

Βήμα 2. Με πλευρά AB κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΔAB (πρόταση 1)

Βήμα 3. Γράφουμε κύκλο $c(B, B\Gamma)$, που τέμνει την ΔB στο E .

Βήμα 4. Γράφουμε κύκλο $c_1(\Delta, \Delta E)$, που τέμνει την ΔA στο Z .



Σχήμα 9

Το τμήμα AZ είναι το ζητούμενο.

ὅ.ξ.π.

2. Δεδομένα τα ίδια (Σχ. 10).

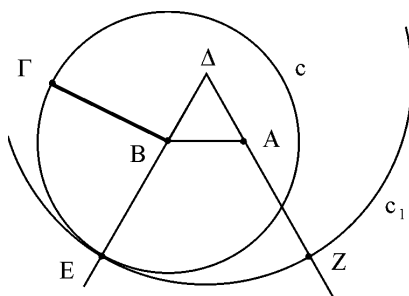
Βήμα 1. Συνδέουμε τα A, B .

Βήμα 2. Με πλευρά AB κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΔAB (πρόταση 1)

Βήμα 3. Γράφουμε κύκλο $c(B, B\Gamma)$, που τέμνει τη ΔB στο E .

Βήμα 4. Γράφουμε κύκλο $c_1(\Delta, \Delta E)$, που τέμνει τη ΔA στο Z . Το AZ είναι το ζητούμενο.

ὅ.ξ.π.



Σχήμα 10

Έστω δύο άνισα τμήματα AB, γ με $AB > \gamma$ (Σχ. 12).

Ζητάμε να αφαιρέσουμε από το τμήμα AB το γ .

Με άκρο το A κατασκευάζουμε τμήμα $AD = \gamma$ (πρόταση 2). Με κέντρο A και ακτίνα AD γράφουμε κύκλο c (αίτημα 3).

Αφού το A είναι το κέντρο του κύκλου c , τότε $AE = AD$ (ορισμός 15).

Αλλά $\gamma = AD$, $AD = AE$, οπότε $AE = \gamma$ (κοινή έννοια 1).

Ωστε το τμήμα EB είναι η διαφορά των τμημάτων AB, γ .

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι οι διαφορετικές περιπτώσεις της κατασκευής προκύπτουν από τις διαφορετικές θέσεις των δεδομένων.

Διακρίνει τις περιπτώσεις:

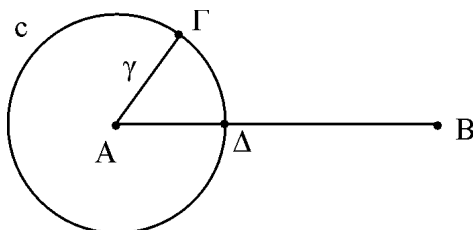
(i) Το ένα άκρο των τμημάτων είναι κοινό (Σχ. 13).

Έστω $AB > AG = \gamma$.

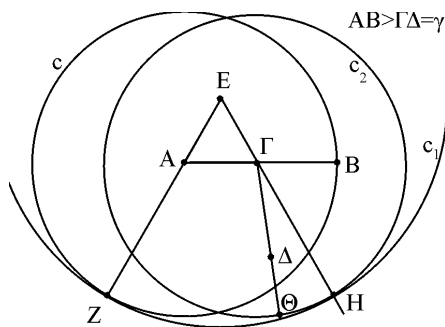
Τότε γράφουμε κύκλο $c(A, \gamma)$, που τέμνει την AB στο Δ , αφού το A βρίσκεται στο εσωτερικό και το B στο εξωτερικό του κύκλου c , επειδή $AB > \gamma$. Άρα υπάρχει σημείο Δ του AB που ανήκει στον c .

Τότε $AD = \gamma$.

(ii) Είναι $AB > \Gamma\Delta$ και το Γ είναι σημείο του AB (Σχ. 14). Με κέντρο A γράφουμε κύκλο $c(A, AB)$ και ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma E$ με πλευρά AG . Προεκτείνουμε τις πλευρές του EA, EG . Έστω Z η τομή του κύκλου c με την EA . Ακολουθώντας, με κέντρο E γράφουμε κύκλο $c_1(E, EZ)$, που τέμνει την προέκταση της



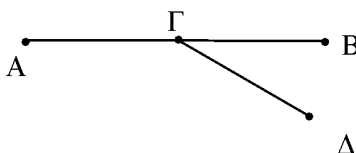
Σχήμα 13



Σχήμα 14

ΕΓ στο Η. Τότε $EZ = EH$, οπότε και $AB = AZ = ΓΗ$. Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στο (1) και με κέντρο $Γ$ και ακτίνα $ΓΗ$ γράφουμε κύκλο $c_2(Γ, ΓΗ)$, που τέμνει την $ΓΔ$ στο $Θ$. Το $ΔΘ$ είναι η ζητούμενη διαφορά $AB - ΓΔ$.

(iii) Έστω $AB = 2ΓΔ$ και το $Γ$ είναι το μέσο του AB (Σχ. 15). Τότε το $Γ$ είναι το ζητούμενο σημείο, αφού $ΑΓ = ΓΔ$.



Σχήμα 15

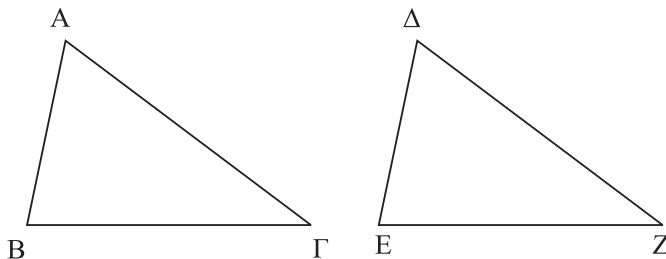
Παρατηρούμε ότι ουσιαστικά η πρόταση 3 μαζί με τις προτάσεις 1 και 2 αποδεικνύονται με τη συνήθη χρήση του διαβήτη.

Η πρόταση 3 είναι από τις προτάσεις που χρησιμοποιούνται συχνότατα στα *Στοιχεία* και συγκεκριμένα στις προτάσεις 5, 6, 9, 11, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 46, 48 του πρώτου βιβλίου, στις προτάσεις 1, 8, 9, 10 του δεύτερου βιβλίου, καθώς και σε αρκετές προτάσεις άλλων βιβλίων.

Πρόταση 4 (I. 4)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες, μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ίσες και θα είναι ίσα, δηλαδή θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες γωνίες τους.

Απόδειξη



Σχήμα 16

Έστω $AB\Gamma$, ΔEZ δυο τρίγωνα που έχουν $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Θα αποδείξουμε ότι $B\Gamma = EZ$ (Σχ. 16).

Εφαρμόζουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με το ΔEZ , ώστε η κορυφή A να τοποθετηθεί στο Δ και η πλευρά AB στη ΔE . Επειδή $AB = \Delta E$ το Δ θα ταυτισθεί με το E . Επίσης, η $A\Gamma$ θα ταυτισθεί με τη ΔZ , αφού $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Ωστε το σημείο Γ θα συμπίπτει με το Z , αφού $A\Gamma = \Delta Z$. Άρα $B\Gamma = EZ$ και αφού τα τρίγωνα θα εφαρμόσουν είναι ίσα και έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Στο αρχαίο κείμενο ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη φράση "*εκατέρα-εκατέρα*", που παλαιότερα μεταφράζαμε "*μία προς μία*" και σήμερα με τον όρο "*αντίστοιχες*".

Όπως παρατηρεί και ο Πρόκλος, η πρόταση I.4 είναι το πρώτο θεώρημα των *Στοιχείων*. Είναι η πρώτη πρόταση (και μια από τις δυο) που αποδεικνύει ο Ευκλείδης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της "*υπέρθεσης*" (*επίθεσης*). Υπάρχουν ενδείξεις ότι τη μέθοδο αυτή πρώτος χρησιμοποίησε ο Θαλής, είτε κάποιοι άλλοι πριν από το Θαλή. Ο Πρόκλος αναφερόμενος στον Εύδημο γράφει: "*Ο Εύδημος στις γεωμετρικές ιστορίες αποδίδει το θεώρημα τούτο στον Θαλή. Και ότι με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού λένε ότι μετρούσε την απόσταση πλοίων στη θάλασσα*".

Την έννοια της ισότητας ο Ευκλείδης την έχει ορίσει αξιωματικά, (όπως άλλωστε συμβαίνει και στις σημερινές αξιωματικές θεωρίες για την ισότητα τμημάτων και γωνιών).

Φαίνεται ότι ο Ευκλείδης γενικά δεν αποδέχεται τη μέθοδο της *επίθεσης* (*υπέρθεσης*), γιατί τη χρησιμοποιεί δύο μόνο φορές στα *Στοιχεία*, στην απόδειξη των προτάσεων 4 και 8. Αν ο Ευκλείδης αποδεχόταν την μέθοδο αυτή, θα μπορούσε εύκολα να αποδείξει το 4^ο αίτημα περί της ισότητας των ορθών γωνιών με υπέρθεση.

Ο Ευκλείδης υποθέτει ότι κατά τη μετακίνησή τους τα γεωμετρικά αντικείμενα παραμένουν αμετάβλητα, πράγμα όμως που δεν το αναφέρει πριν. Σύμφωνα με τις νεότερες απόψεις της Φυσικής, η καμπυλότητα του χώρου **εξαρτάται** από την παρουσία *βαρυτικών μαζών*, επομένως δεν είναι καθόλου προφανής η αρχή του *αναλλοιώτου* των σωμάτων κατά την μετακίνηση.

Οι κριτικές για την πρόταση 4 άρχισαν από τα τέλη του 15^{ου} αιώνα. Το 1547 ο μεταφραστής των *Στοιχείων* J. Peletarius (J. Peletier) [32] γράφει ένα μακροσκελές σχόλιο για την πρόταση 4, όπου επισημαίνει το γεγονός ότι αν η *μέθοδος της υπέρθεσης* μπορούσε να θεωρηθεί γενική, τότε τα *Στοιχεία* θα ήταν γεμάτα από την μέθοδο αυτή. Π.χ. θα μπορούσε να εφαρμοσθεί στις προτάσεις 2 και 3, πράγμα που δεν γίνεται. Στην τελευταία παράγραφο της σελίδας του βιβλίου του Peletier μπορούμε να διαβάσουμε ότι η *μέθοδος της υπέρθεσης* είναι **μηχανική** και όχι **μαθηματική**.

Την άποψη αυτή είχε υιοθετήσει και ο Γερμανός φυσικός, φυσιολόγος και μαθηματικός Helmholtz. Αντιθέτως, ο Ιταλός γεωμέτρης Veronese πίστευε ότι μπορεί να υπάρξει κίνηση σώματος χωρίς μεταβολή του σώματος [94].

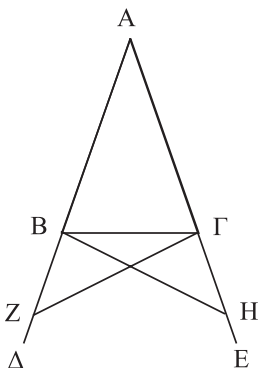
Στη σημερινή Γεωμετρία η πρόταση 4 έχει μια σημαντική θέση, αφού αποτελεί μια βασική ιδιότητα για τη δομή των επιπέδων στα οποία ισχύει. Και όπως είναι γνωστό, η πρόταση ισχύει όχι μόνο στο ευκλείδειο, αλλά και στο επίπεδο Moulton, στην ουδέτερη Γεωμετρία, στη Γεωμετρία με τη μετρική Minkowski και σε άλλα επίπεδα [71].

Στα περισσότερα σύγχρονα αξιωματικά συστήματα η πρόταση 4 αποτελεί αξίωμα. Π.χ. στο αξιωματικό σύστημα Hilbert είναι το αξίωμα III.5. Ο ίδιος ο Hilbert απέδειξε ότι το αξίωμα αυτό είναι **ανεξάρτητο** από τα άλλα.

Πρόταση 5 (I. 5)

Στα ισοσκελή τρίγωνα οι παρά τη βάση γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και αν προεκταθούν οι ίσες πλευρές σχηματίζουν κάτω από τη βάση (με τη βάση) γωνίες ίσες.

Απόδειξη



Σχήμα 17

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ , E επί των προεκτάσεων των πλευρών AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα (Σχ. 17). Θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta B\Gamma} = \hat{E\Gamma B}$.

Έστω σημεία Z , H των $B\Delta$, ΓE , ώστε $BZ = \Gamma H$. Φέρουμε τις BH , ΓZ . Είναι $AZ = AH$. Τότε τα τρίγωνα $A\Gamma Z$, ABH έχουν $A\Gamma = AB$, $AH = AZ$ και $\hat{\Gamma AZ} = \hat{BAH}$, άρα είναι ίσα (I.4).

Οπότε, $BH = \Gamma Z$ και $\hat{Z} = \hat{H}$, $\hat{A\Gamma Z} = \hat{ABH}$.

Επειδή $BZ = \Gamma H$, $B\Gamma = \Gamma B$ και $\hat{BZ\Gamma} = \hat{BH\Gamma}$, τα τρίγωνα $BZ\Gamma$, ΓHB είναι ίσα και άρα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Επομένως $\hat{ZB\Gamma} = \hat{H\Gamma B}$ και $\hat{B\Gamma Z} = \hat{\Gamma B H}$. Αλλά δείξαμε ότι $\hat{ABH} = \hat{A\Gamma Z}$, οπότε $\hat{ABH} - \hat{\Gamma B H} = \hat{A\Gamma Z} - \hat{B\Gamma Z}$ ή $\hat{AB\Gamma} = \hat{A\Gamma B}$.
 ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η απόδειξη που αναφέραμε, και είναι μάλλον του Ευκλείδη, για τους φοιτητές των πανεπιστημίων του Μεσαίωνα εθεωρείτο σαν το όριο το οποίο έπρεπε να περάσει κάποιος που ήθελε να ασχοληθεί με τα Μαθηματικά.

Επειδή το σχήμα στην απόδειξη του Ευκλείδη μοιάζει αρκετά με τα γεφύρια της εποχής, οι τότε φοιτητές ονόμασαν την πρόταση 5 "*pons asinorum*", δηλαδή "*γέφυρα των γαϊδάρων*", αφού η κατανόησή του απαιτούσε "*γαϊδουρινή υπομονή*". (Οι φοιτητές της Σορβόνης ονόμαζαν "*Pons asinorum*" και το Πυθαγόρειο θεώρημα).

Ο Πρόκλος γράφει ότι με τη πρόταση αυτή είχε ασχοληθεί ο Θαλής.

Σε ένα πολύ ενδιαφέρον εδάφιο στο βιβλίο του Αριστοτέλη "*Αναλυτικά πρότερα*" (Α, 41β, 13-22) αναφέρεται:

"*Προκειμένον επί παραδείγματι να αποδείξουμε ότι οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, θεωρούμε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνες ΟΑ, ΟΒ. Αν φέρουμε κάθετες ΑΓ, ΒΔ στην ΑΒ, οι γωνίες που είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε ημικύκλιο είναι ίσες. Αν πάλι σχηματίσουμε γωνίες $\hat{ΟΑΓ}$, $\hat{ΟΒΔ}$ αυτές είναι ίσες, αφού όλες οι γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Αν τέλος εφαρμόσουμε το αξίωμα ότι αν από ίσες γωνίες αφαιρέσουμε ίσες, οι γωνίες που μένουν είναι ίσες, τότε οι γωνίες $\hat{ΟΑΒ}$, $\hat{ΟΒΑ}$ είναι ίσες ως διαφορά ίσων γωνιών $\hat{ΓΑΒ} - \hat{ΓΑΟ}$ και $\hat{ΔΒΑ} - \hat{ΔΒΟ}$, δηλαδή οι παρά την βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσες".*

Στο εδάφιο αυτό ο Αριστοτέλης μας προτείνει και άλλους τρόπους απόδειξης της πρότασης 5, πάντα όμως με τη βοήθεια αρχών (αιτημάτων, αξιωμάτων), τα οποία αν δε δεχθούμε, θα πρέπει η ίδια η 5 να θεωρηθεί αξίωμα.

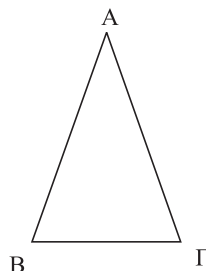
Ο Πάππος, σύμφωνα με τον Πρόκλο, έδωσε μια άλλη, εξαιρετικά απλή απόδειξη χωρίς προέκταση. Η διατύπωση και απόδειξη του Πάππου έχει ως εξής:

Αν $ΑΒ = ΑΓ$, τότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

Απόδειξη:

Τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΓΑΒ (Σχ. 18) είναι ίσα αφού $ΑΒ = ΑΓ$, $ΑΓ = ΑΒ$ και $\hat{ΒΑΓ} = \hat{ΓΑΒ}$.

Συνεπώς (πρόταση 4), τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΓΑΒ είναι ίσα, οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$.



Σχήμα 18

Θα παρατηρήσουμε ότι η απόδειξη του Πάππου, (που πολλοί απόδιδουν στον Θαλή), αν και ιδιαίτερα ευφυής, δεν ήταν εύκολα αποδεκτή, αφού αντί για δύο τρίγωνα είχαν να "συγκρίνουν" ένα. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν έρχεται σε αντίθεση με την πρόταση 4, που δεν αναφέρεται σε διαφορετικά τρίγωνα. Όμως οι φοιτητές της Οξφόρδης τη δεκαετία του 1870, όπως αναφέρει ο G. Martin, δεν ήταν σε θέση να κατανοήσουν την απόδειξη του Πάππου.

Ο μαθηματικός C. L. Dodgson (1832-1898), περισσότερο γνωστός σαν L. Carroll, (ο συγγραφέας του βιβλίου "*Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων*"), που δίδασκε στην Οξφόρδη την εποχή αυτή, δικαιολογούσε τους φοιτητές λέγοντας, με κάποια δόση ειρωνείας, ότι "*αφού υπάρχει ένα μόνο τρίγωνο, όταν το μετακινείς για να το ξανατοποθετήσεις εκεί που ήταν, αυτό δεν θα υπάρχει στην αρχική του θέση*". Στο βιβλίο του "*Ο Ευκλείδης και οι μοντέρνοι αντίπαλοί του*" υπάρχει ο παρακάτω διάλογος:

Μίνως: Προτείνεται να αποδειχθεί η πρόταση 5 παίρνοντας το ισοσκελές τρίγωνο, στρέφοντάς το και τοποθετώντας το ξανά πάνω στον εαυτό του.

Ευκλείδης: Σίγουρα, αυτό έχει κάτι από ιρλανδέζικη αποκοτιά, και μου θυμίζει έντονα τον άνθρωπο που περπατούσε πάνω στον λαιμό του, του αξίζει να αναφερθεί σε μια καθαρά φιλοσοφική πραγματεία;

Μίνως: Υποθέτω ότι οι υπερασπιστές του θα έλεγαν ότι αφήνει ένα ίχνος από τον εαυτό του πίσω του και ότι το ανεστραμμένο τρίγωνο το τοποθετούμε πάνω στο ίχνος που άφησε.

Ανεξάρτητα από το τι πίστευαν οι φοιτητές της Οξφόρδης, λίγο αργότερα η απόδειξη του Πάππου στην πρόταση 5 των *Στοιχείων* ενσωματώθηκε στα *Στοιχεία* ως εναλλακτική απόδειξη. Π.χ. στη μετάφραση των Stevens- Hall [133], Heath κ.ά.

Ο Heath παρατηρεί ότι η απόδειξη του Πάππου δεν αφορά την ισότητα των γωνιών $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$.

Οπωσδήποτε, το βαθύτερο νόημα της απόδειξης του Πάππου είναι ότι για πρώτη φορά αναδεικνύει τις τοπολογικές ιδιότητες του ευκλείδειου επιπέδου, π.χ. την έννοια της διεύθυνσης.

Εκτός από τις αποδείξεις που αναφέραμε, υπάρχουν και άλλες. Πχ. αν φέρουμε τη διάμεσο ΑΔ (Σχ.19), τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι ίσα αφού $AB = AG$, $AD = AD$, $\angle B = \angle G$ (Π,Π,Π). Επομένως και $\hat{B} = \hat{G}$.

Και η απόδειξη αυτή αναδεικνύει τις ιδιότητες της διαμέσου ως άξονα συμμετρίας του ΑΒΓ.

Ο Μ. Simon [123] αναφέρει ότι η απόδειξη του Πάππου αποδιδόταν στον Bolzano (*zehr berühmten beweis Bolzano*) είτε στο Leibnitz.

Η πρόταση 5 ισχύει και για την Ουδέτερη Γεωμετρία, αλλά όχι π.χ. για τη Γεωμετρία Minkowski. Στην Ουδέτερη Γεωμετρία ισχύει ανάλογη πρόταση για τα τετράπλευρα.

Η πρόταση 5 έχει πολλές εφαρμογές, όπως αυτές που αναφέρονται στις προτάσεις: ΙΙΙ. 3, ΙΙΙ. 20, ΙΙΙ. 21, ΙΙΙ. 22, ΙΙΙ. 35, ΙΙΙ. 36, ΙV. 19, VI. 2, VI. 4 κ.ά.

Πόρισμα

Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισογώνιο.

Πρόταση 6 (Ι. 6)

Αν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους και οι απέναντι των ίσων γωνιών πλευρές θα είναι ίσες μεταξύ τους.

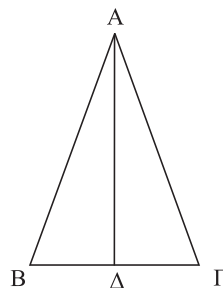
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{G}$ (Σχ. 20).

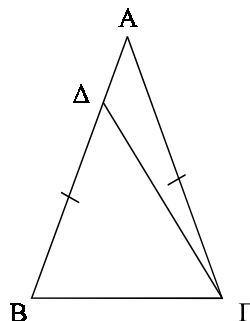
Θα αποδείξουμε ότι $AB = AG$.

Αν η ΑΒ και η ΑΓ είναι άνισες, κάποια από αυτές θα είναι μεγαλύτερη από την άλλη.

Έστω $AB > AG$. Επί της ΑΒ παίρνουμε



Σχήμα 19



Σχήμα 20

$ΒΔ = ΓΑ$ (πρόταση 3). Τα τρίγωνα $ΓΒΔ$, $ΒΓΑ$ είναι ίσα, γιατί $ΓΒ = ΒΓ$, $ΒΔ = ΓΑ$ και $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το $ΒΔΓ$ είναι μικρότερο από το τρίγωνο $ΑΒΓ$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Ο Πρόκλος αναφερόμενος στην πρόταση 6 γράφει: "...πως είναι η πρώτη από τις προτάσεις των Στοιχείων στην οποία εφαρμόζεται η μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής", την οποία ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί αρκετά συχνά.

Σχετικές αναφορές διαβάζουμε και στον κώδικα της Βενετίας, όπου αναφέρεται, ότι η πρόταση 5 είναι αντίστροφη της 6. Πράγματι, ένα μέρος της 5 είναι αντίστροφη της πρότασης 6.

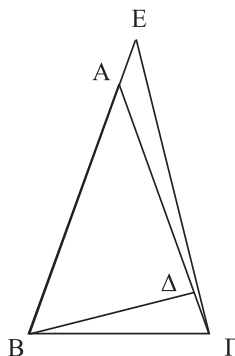
Ως γνωστόν, δύο προτάσεις είναι αντίστροφες, όταν η υπόθεση (είτε με μέρος της υπόθεσης) της μιας είναι συμπέρασμα της άλλης. Η αλήθεια μιας πρότασης, προφανώς, δεν συνεπάγεται και την αλήθεια της αντίστροφής της.

Και για την πρόταση 6 υπάρχουν και άλλες αποδείξεις εκτός από αυτή που αναφέραμε προηγουμένως. Ο Πρόκλος αναφέρει και τρεις άλλες αποδείξεις, μια από τις οποίες είναι η παρακάτω:

Επί της πλευράς $ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ παίρνουμε σημείο $Δ$ ώστε $ΑΔ = ΑΒ$ και προεκτείνουμε την $ΑΒ$ κατά $ΑΕ = ΓΔ$ (Σχ. 21)

Τότε $ΒΕ = ΑΓ$ και τα τρίγωνα $ΕΒΓ$, $ΑΒΓ$ είναι ίσα, αφού $ΒΕ = ΑΓ$, $ΒΓ = ΒΓ$, $\hat{Β} = \hat{Γ}$ πράγμα άτοπο, γιατί το $ΑΒΓ$ αποτελεί μέρος του $ΕΒΓ$.

Οι άλλες αποδείξεις του Πρόκλου μοιάζουν πολύ με την απόδειξη των Στοιχείων και για το λόγο αυτό δεν θα τις αναφέρουμε.



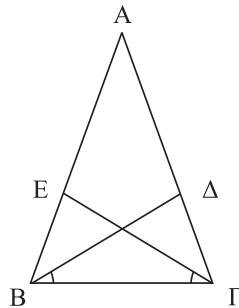
Σχήμα 21

Ακολουθώντας, ο Πρόκλος σχολιάζοντας τις αποδείξεις αναφέρεται εκτενώς και στις αντίστροφες προτάσεις, λέγοντας ότι η αντίστροφη πρόταση μιας προτάσεως δεν είναι πάντα αληθής.

Στο σχολιαστή Πορφύριο ή στον Ήρωνα αποδίδεται η παρακάτω απόδειξη της πρότασης 6, η οποία όμως στηρίζεται στην πρόταση 13:

Επί των πλευρών BA , GA παίρνουμε τμήματα $BE = GA$ και φέρνουμε τις BD , GE (Σχ. 22). Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$, $B\Gamma E$ έχουν $B\Gamma = B\Gamma$, $BE = GA$ και $\hat{B} = \hat{G}$. Άρα είναι ίσα, οπότε και $B\Delta = GE$ και $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{B\Gamma E}$.

Τα τρίγωνα $A\Delta B$, $A\Gamma E$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}$, $B\Delta = GE$ και $\hat{B\Delta A} = \hat{G\Gamma E}$ (I.13). Άρα είναι ίσα και επομένως $AB = AG$.

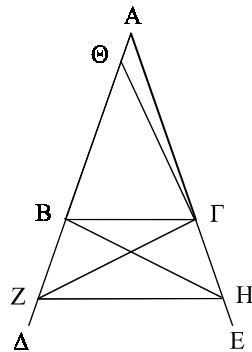


Σχήμα 22

Ο al-Nayrizi [39] αναφέρει επίσης και το αντίστροφο του δεύτερου μέρους της πρότασης 5, δηλαδή την πρόταση:

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου προεκτείνουμε τις πλευρές AB , AG κατά BA , GE . Αν $\hat{H\Gamma B} = \hat{ZB\Gamma}$ τότε $AB = AG$.

Ο al-Nayrizi χρησιμοποιεί την ίδια στρατηγική με αυτήν του Ευκλείδη. Θεωρεί σημεία Z , H πάνω στις AB , AG (Σχ. 23), ώστε $BZ = \Gamma H$ και αποδεικνύει ότι τα τρίγωνα $B\Gamma Z$, ΓBH είναι ίσα, αφού $B\Gamma = \Gamma B$, $BZ = \Gamma H$ και $\hat{ZB\Gamma} = \hat{H\Gamma B}$. Οπότε $BH = \Gamma Z$ και $\hat{B\Gamma Z} = \hat{\Gamma HB}$. Θα αποδείξουμε ότι $AZ = AH$. Αν αυτό δεν συμβαίνει, αλλά είναι $AZ > AH$, τότε παίρνουμε πάνω στη



Σχήμα 23

ΖΑ τμήμα $Z\Theta = AH$ και φέρνουμε τη $\Theta\Gamma$. Τα τρίγωνα $\Theta\Gamma Z$ και ABH έχουν $\Theta\Gamma = AB$, $\Gamma Z = BH$ και $\hat{\Theta\Gamma Z} = \hat{ABH}$ (πρόταση 4).

Ωστε τα τρίγωνα $\Theta\Gamma Z$, ABH είναι ίσα. Αλλά (για τον ίδιο λόγο) και τα τρίγωνα $BZ\Gamma$, ΓHB είναι ίσα.

Τότε τα τρίγωνα $\Theta B\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι ίσα ως διαφορές ίσων τριγώνων. Αλλά αυτό είναι άτοπο.

Αναφέρουμε τέλος, ότι η πρόταση I.6 χρησιμοποιείται μόνο στη πρόταση III.25 των *Στοιχείων*.

Πόρισμα

Κάθε ισογώνιο τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Σχόλια

Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο όρος “πόρισμα” είναι γεωμετρικός. Ονομάζει το πόρισμα “*ἔρμαιον*”, δηλαδή δώρο του Ερμή.

Εδώ ο όρος “πόρισμα” έχει τη σημασία της πρότασης που προκύπτει ως προφανής από την απόδειξη ενός θεωρήματος, τη λύση (κατασκευή) ή τη διερεύνηση ενός προβλήματος.

Ο Ευκλείδης έγραψε βιβλίο, με τίτλο “*Πορίσματα*” που έχει χαθεί. Εκεί η λέξη *πόρισμα* έχει και τη σημασία του προβλήματος, του οποίου η λύση απαιτεί διερεύνηση.

Πρόταση 7 (I. 7)

Από σημείο Γ εκτός ευθυγράμμου τμήματος AB φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΓA και ΓB . Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει σημείο στο ίδιο ημιεπίπεδο του τμήματος με το Γ , το οποίο αν συνδεθεί με τα άκρα του τμήματος, να ορίζει τμήματα ίσα με τα ΓA και ΓB αντίστοιχα.

Απόδειξη

Έστω AB τμήμα και σημείο Γ εκτός αυτού και έστω ότι υπάρχει στο ίδιο ημιεπίπεδο με το Γ σημείο Δ , ώστε $\Gamma A = \Delta A$ και $\Gamma B = \Delta B$ (Σχ. 24).

Φέρνουμε τη $\Gamma\Delta$ και
τότε, αφού $A\Gamma = A\Delta$ είναι

$$\hat{A}\Gamma\Delta = \hat{A}\Delta\Gamma \text{ (πρόταση 5).}$$

Άρα

$$\hat{A}\Gamma\Delta = \hat{A}\Delta\Gamma < \hat{B}\Delta\Gamma,$$

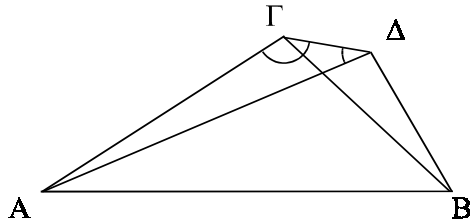
οπότε και

$$\hat{B}\Gamma\Delta < \hat{A}\Gamma\Delta < \hat{B}\Delta\Gamma.$$

Αφού όμως $B\Gamma = B\Delta$,

θα είναι $\hat{B}\Gamma\Delta = \hat{B}\Delta\Gamma$, πράγμα άτοπο.

Ὁ.ἔ.δ.



Σχήμα 24

Σχόλια

Ο Πρόκλος σχολιάζοντας την πρόταση 7 παρατηρεί ότι το θεώρημα έχει ένα χαρακτήρα που είναι σπάνιος και δεν απαντάται συχνά σε επιστημονικά έργα, αφού πρέπει μια πρόταση να εκφράζεται θετικά και όχι αρνητικά, όπως άλλωστε λέει και ο Αριστοτέλης στο βιβλίο "*Αναλυτικά Ὑστερα*" (79α 17-32).

Ο Heath χαρακτηρίζει την εκφώνηση του θεωρήματος "*very elliptical*" (πολύ ελλειπτική) και αναφέρει πως, όσο παράξενη και αν φαίνεται σε μας η εκφώνηση της πρότασης 7, φαίνεται ότι στους γεωμέτρους της εποχής ήταν οικεία. Αναφέρει μάλιστα ένα γνωστό χωρίο από τα "*Μετεωρολογικά*" του Αριστοτέλη (Γ 376α κ.ε.) με όμοια διατύπωση. Για το λόγο αυτό πολλοί μεταφραστές των *Στοιχείων* διατυπώνουν την πρόταση με σύγχρονη ορολογία.

Ο Heath αναφέρει την απόδοση του R. Simson σαν υπόδειγμα "παράφρασης", που όμως είναι πολύ κοντά στο νόημα του προτύπου:

Δεν υπάρχουν δύο τρίγωνα με την ίδια βάση που να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της βάσης που οι πλευρές τους με την ίδια κορυφή να είναι ίσες.

Την ίδια εκφώνηση βρίσκουμε και στο βιβλίο των Stevens-Hall [133], ενώ στο βιβλίο του M. Simon [126] έχουμε μια άλλη εκφώνηση:

"Αν πάνω από ένα τμήμα AB βρίσκουμε τα τρίγωνα $ΑΓΒ$, $ΑΔΒ$ τότε δεν είναι ταυτόχρονα ίσες οι πλευρές $ΑΓ$, $ΑΔ$ ούτε οι $ΒΓ$, $ΒΔ$ ".

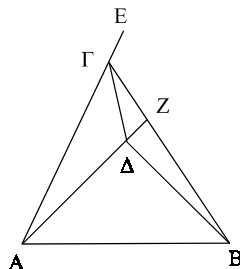
Η εκφώνηση αυτή δεν είναι σύμφωνη με το πνεύμα των *Στοιχείων*, γιατί, όπως είναι γνωστό, στις εκφωνήσεις των θεωρημάτων στα *Στοιχεία* δεν υπάρχουν συμβολισμοί, ούτε γράμματα.

Ο γνωστός Άγγλος μαθηματικός και μεταφραστής του Ευκλείδη De Morgan [42] πίστευε ότι η απόδειξη της πρότασης αυτής θα απλουστευόταν σημαντικά αν χρησιμοποιούσαμε ως αξίωμα την πρόταση:

Αν δύο μεγέθη είναι ίσα, τότε κάθε μέγεθος μεγαλύτερο από το ένα είναι μεγαλύτερο από κάθε μέγεθος μικρότερο από το άλλο. Δηλαδή, αν $\alpha = \beta$ και $\delta > \beta$, τότε $\delta > \gamma$, για κάθε $\gamma < \alpha$.

Ο Heath όμως αμφιβάλει για τον ισχυρισμό του De Morgan.

Ο Πρόκλος, προκειμένου να εξασφαλίσει ότι η πρόταση 7 ισχύει και στην περίπτωση που το σημείο Δ βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου $ΑΒΓ$, δίνει την παρακάτω απόδειξη:



Σχήμα 25

Έστω $ΑΓ = ΑΔ$ και $ΒΓ = ΒΔ$ (Σχ 25). Επειδή $ΑΓ = ΑΔ$, θα είναι και $\hat{ΕΓΔ} = \hat{ΖΔΓ} < \hat{ΒΔΓ}$. Αλλά και $ΒΓ = ΒΔ$, άρα $\hat{ΒΔΓ} = \hat{ΒΓΔ}$ που είναι άτοπο, αφού τότε $\hat{ΒΓΔ} > \hat{ΕΓΔ}$.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η απόδειξη του Ευκλείδη ουσιαστικά εξαρτάται από τη θέση του Δ . Αν π.χ. το σημείο Δ βρίσκεται στο εξωτερικό ή στις πλευρές του $ΑΒΓ$, η πρόταση είναι προφανής.

Η πρόταση 7 όπως την θεώρησε ο Πρόκλος έχει άμεση εφαρμογή στην πρόταση 21.

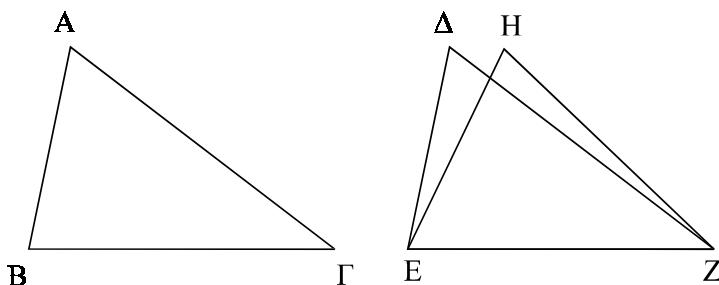
Πρόταση 8 (I. 8)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες αντίστοιχα και τις βάσεις τους ίσες, τότε η γωνία η περιεχόμενη από τις ίσες πλευρές είναι ίση.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ έχουν $B\Gamma = EZ$, $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$

(Σχ. 26). Θα αποδείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



Σχήμα 26

Εφαρμόζουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ στο ΔEZ ώστε το B να συμπίπτει με το E και η $B\Gamma$ με την EZ , οπότε το Γ θα εφαρμόσει με το Z , γιατί $B\Gamma = EZ$.

Τότε όμως θα εφαρμόσουν και οι AB , $A\Gamma$ με τις ΔE , ΔZ αντίστοιχα. Γιατί, αν η μεν βάση $B\Gamma$ συμπίπτει με την EZ , ενώ οι πλευρές AB , $A\Gamma$ δεν συμπίπτουν με τις ΔE , ΔZ αλλά πάρουν άλλες θέσεις, έστω τις HE , HZ , τότε τα τμήματα ΔE , ΔZ θα είναι αντίστοιχα ίσα με τα HE , HZ , που είναι άτοπο (πρόταση 7).

Άρα, αν η $B\Gamma$ συμπίπτει με την EZ , τότε θα συμπίπτουν και οι πλευρές BA , $A\Gamma$ με τις $E\Delta$, ΔZ . Συνεπώς θα συμπίπτουν και οι γωνίες $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

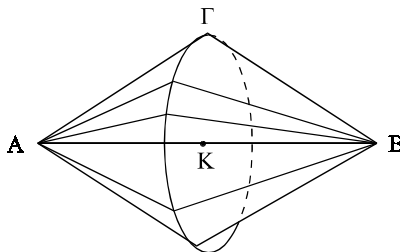
ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

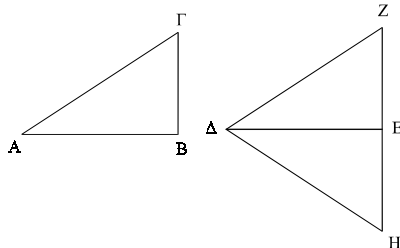
Η πρόταση 8 όπως έχει διατυπωθεί, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως "μερικός αντίστροφη" της πρότασης 4.

Ο Αριστοτέλης στα "*Μετεωρολογικά*" (Γ 373α κ.ε.), όταν περιγράφει τη δημιουργία του "Ουράνιου τόξου" υπαινίσσεται το περιεχόμενο της πρότασης 8, γράφοντας ότι: "*Αν από δύο σημεία Α, Β φέρουμε ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΓ, τότε το Γ κινείται σε κύκλο με κέντρο Κ σημείο του τμήματος ΑΒ, του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στην ΑΒ*". (Σχ. 27)

Πράγματι, από την πρόταση αυτή προκύπτει άμεσα η πρόταση 8.



Σχήμα 27



Σχήμα 28

Ο Πρόκλος αναφέρει τη Σχολή του Φίλωνα του Βυζαντινού, ενός φιλόσοφου και μαθηματικού του 2^{ου} αιώνα, ο οποίος απέδειξε την πρόταση 8 χωρίς τη χρήση της πρότασης 7.

Η απόδειξη του Φίλωνα είναι η παρακάτω:

Τοποθετούμε το τρίγωνο ΑΒΓ στο τρίγωνο ΔΕΖ, ώστε η ΑΒ να εφαρμόσει με την ΔΕ και το Γ να πάρει τη θέση Η, ώστε τα Ζ, Η να βρίσκονται εκατέρωθεν της ΔΕ.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) Οι ΖΕ, ΗΕ είναι τμήματα της ίδιας ευθείας (Σχ. 28).

Επειδή $\Delta Z = AB = \Delta H$, το τρίγωνο ΔZH είναι ισοσκελές και

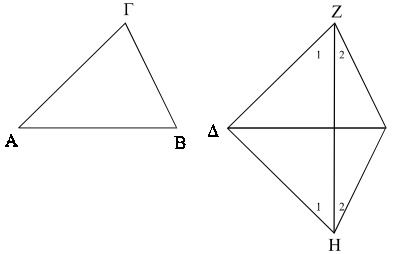
$$\hat{Z} = \hat{H} = \hat{\Gamma}.$$

(ii) Η ΖΗ τέμνει το τμήμα ΔΕ, (Σχ. 29).

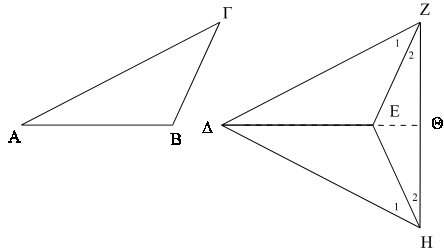
$$\text{Τότε } \hat{Z}_1 = \hat{H}_1, \hat{Z}_2 = \hat{H}_2, \text{ οπότε } \hat{Z} = \hat{H} = \hat{\Gamma}.$$

(iii) Η ΖΗ τέμνει την προέκταση του τμήματος ΔΕ (Σχ. 30).

(iv) Ομοίως $\hat{Z}_1 = \hat{H}_1, \hat{Z}_2 = \hat{H}_2$, οπότε και $\hat{Z} = \hat{H} = \hat{\Gamma}$.



Σχήμα 29



Σχήμα 30

Πόρισμα.

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα και έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Πρόταση 9 (I. 9)

Να διχοτομηθεί δοθείσα γωνία.

Απόδειξη

Έστω η δοθείσα γωνία $\angle BAC$ που πρέπει να διχοτομήσουμε. Επί της πλευράς AB θεωρούμε τυχαίο σημείο D και επί της AC σημείο E , ώστε $AD = AE$.

Φέρνουμε την DE και κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο DEZ (Σχ.31). Φέρνουμε την AZ . Θα αποδείξουμε ότι η AZ είναι η

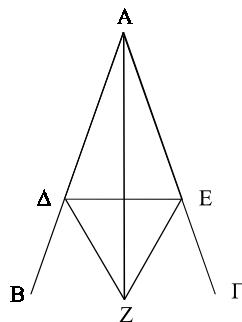
διχοτόμος της γωνίας $\angle BAC$.

Τα τρίγωνα $\triangle AZD$, $\triangle AZE$ έχουν $DZ = EZ$ και $AD = AE$, $AZ = AZ$. Άρα (I. 8) θα έχουν και

$$\angle ZAD = \angle ZAE.$$

Ωστε η AZ είναι η διχοτόμος.

ὁ.ἔ.π.



Σχήμα 31

Σχόλια

Στο κείμενο του Ευκλείδη (εκδ. Heiberg) αναφέρεται: "*Τήν δοθείσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν*".

Ο Πρόκλος δίνει έμφαση στο ότι η γωνία είναι ευθύγραμμη, ενώ στα σχόλιά του αναφέρει ότι είναι αδύνατο να διχοτομήσει κάποιος "*κερατοειδή*" γωνία: (*ἀδυνατίσει ἄν τις κερατοειδή γωνίαν τεμεῖν*). Την ίδια παρατήρηση βρίσκουμε και στον Παρισινό κώδικα.

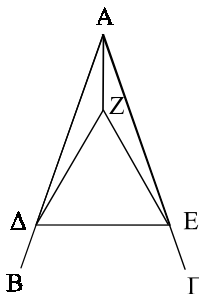
Ακολουθώς, σχολιάζοντας τα περί της τριχοτόμησης γωνίας μας δίνει πολύτιμες πληροφορίες για τις γωνίες που ο Γεμίνος [129] αποκαλούσε "*μεικτές*", δηλαδή εκείνες των οποίων η μια πλευρά ήταν καμπύλη και η άλλη ημιευθεία, καθώς και για τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν ο Ιππίας ο Ηλείος, ο Νικομήδης και ο Αρχιμήδης για την τριχοτόμηση των γωνιών.

Από τον Πρόκλο αντλούμε πολύτιμες πληροφορίες για τις κριτικές που άσκησαν οι γεωμέτρες στην απόδειξη των *Στοιχείων*.

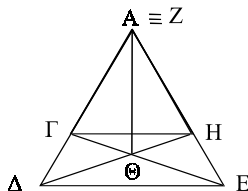
Ο Πρόκλος (είτε κάποιοι γεωμέτρες των οποίων την άποψη εκφράζει) προτιμούσε να εργάζεται μόνο σε ένα από τα ημιεπίπεδα της ΔΕ, αυτό στο οποίο βρίσκεται η γωνία.

Κατασκευάζει λοιπόν το ισόπλευρο τρίγωνο με την κορυφή του Ζ στο ημιεπίπεδο αυτό (Σχ. 32).

Κάνει και σχετική διερεύνηση του προβλήματος, θεωρώντας π.χ. την περίπτωση που το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, οπότε το Ζ εφαρμόζει στο Α (Σχ.33). Στην περίπτωση αυτή θεωρεί επί των ΑΔ, ΑΕ σημεία Γ, Η ώστε ΑΓ = ΑΗ και φέρνει τις ΕΓ, ΔΗ που τέμνονται στο Θ. Η διχοτόμος της γωνίας είναι η ΑΘ, όπως εύκολα μπορεί να αποδείξει κάποιος.

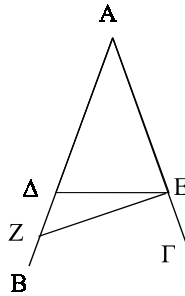


Σχήμα 32

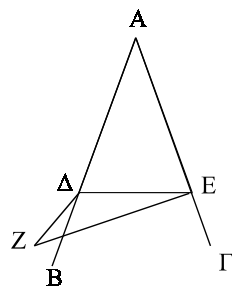


Σχήμα 33

Τέλος, ο Πρόκλος εξετάζει και την περίπτωση που, στην κατασκευή του ισόπλευρου τριγώνου ΔΕΖ από τον Ευκλείδη, η κορυφή Ζ δε βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{G}$, αλλά είτε πάνω σε μια πλευρά της (π.χ. στην ΑΒ) (Σχ.34), είτε στο εξωτερικό της $\hat{B}\hat{A}\hat{G}$ (Σχ.35).



Σχήμα 34



Σχήμα 35

Ο Πρόκλος απέδειξε ότι δεν είναι δυνατόν να συμβαίνουν οι περιπτώσεις αυτές.

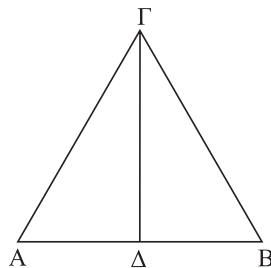
Πάντως, αν θελήσουμε να αξιολογήσουμε την κατασκευή που υπάρχει στα "Στοιχεία", οφείλουμε να παραδεχθούμε ότι είναι μια ευφυής αλλά και λιτή απόδειξη, που χρησιμοποιεί λίγες μόνο προηγούμενες προτάσεις.

Πρόταση 10 (Ι. 10)

Να διχοτομηθεί δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου θα προσδιορίσουμε το μέσον (Σχ.36). Κατασκευάζουμε (πρόταση 1) το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε τη διχοτόμο ΓΔ της $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ (πρόταση 9). Θα δείξουμε ότι το Δ είναι το μέσο του ΒΑ.



Σχήμα 36

Πράγματι, τα τρίγωνα ΓΑΔ, ΓΒΔ έχουν $GA = GB$, $GD = GD$ και $\hat{A}\hat{G}\hat{D} = \hat{B}\hat{G}\hat{D}$ (Π.Γ.Π., και η πρόταση 4).

Άρα είναι ίσα και $AD = DB$.

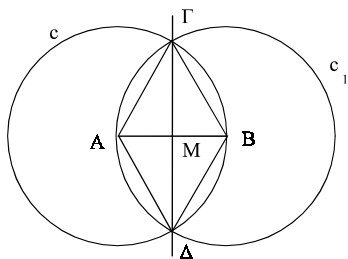
ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Στον κώδικα της Φλωρεντίας διαβάζουμε: “Υποθέτουμε ότι το τμήμα είναι περιορισμένο, επειδή στο άπειρο τμήμα δεν ορίζεται μέσο”.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Απολλώνιος ο Περγαίος έλυσε το πρόβλημα ως εξής:

Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ έγραψε κύκλο c . Με κέντρο Β και ακτίνα ΒΑ έγραψε κύκλο c_1 (Σχ. 37). Οι κύκλοι c, c_1 τέμνονται στα Γ, Δ. Η ΓΔ διαιρεί το ΑΒ σε δύο ίσα μέρη $AM = MB$. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, άρα



Σχήμα 37

$\hat{A}\hat{G}\hat{M} = \hat{B}\hat{G}\hat{M}$. Τα τρίγωνα ΑΓΜ, ΒΓΜ είναι ίσα, αφού $AG = BG$, $GM = GM$ και $\hat{A}\hat{G}\hat{M} = \hat{B}\hat{G}\hat{M}$. Άρα $AM = BM$.

Εφαρμογή

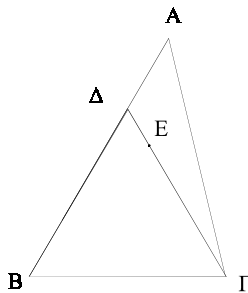
Ύπαρξη ισοσκελούς τριγώνου.

Αν δοθεί τμήμα ΒΓ, να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ.

Κατασκευή:

Έστω ΒΓ το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα και Α ένα σημείο που δεν ανήκει στη ΒΓ (Σχ. 38). Αν $\hat{A}\hat{B}\hat{G} = \hat{A}\hat{G}\hat{B}$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ (πρόταση 6).

Αν όμως π.χ. $\hat{A}\hat{B}\hat{G} < \hat{A}\hat{G}\hat{B}$, τότε στο εσωτερικό της $\hat{A}\hat{G}\hat{B}$ υπάρχει ημιευθεία ΓΕ τέτοια ώστε $\hat{E}\hat{G}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{G}$, όπου Δ η τομή της ΓΕ με την ΑΒ. Τότε όμως και $\Delta B = \Delta G$, δηλαδή το τρίγωνο ΔΒΓ με βάση ΒΓ είναι ισοσκελές.



Σχήμα 38

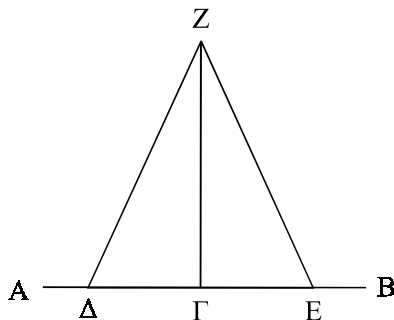
Πρόταση 11 (Ι. 11)

Από δοθέν σημείο δοθείσης ευθείας να αχθεί ευθεία η οποία να σχηματίζει ορθές γωνίες με την δοθείσα.

Απόδειξη

Έστω AB η ευθεία και Γ το σημείο της. Θα φέρουμε από το Γ ευθεία που να σχηματίζει ίσες γωνίες με την AB (Σχ.39), (δηλαδή την κάθετο στην ευθεία στο σημείο Γ).

Επί της ημιευθείας GA παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ και επί της GB σημείο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Με πλευρά ΔE σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $\Delta E Z$ και φέρνουμε τις $Z\Delta$, ZE , $Z\Gamma$. Τα τρίγωνα $Z\Gamma\Delta$, $Z\Gamma E$ έχουν $Z\Delta = ZE$, $Z\Gamma = Z\Gamma$ και $\Delta\Gamma = \Gamma E$.



Σχήμα 39

Άρα (πρόταση 8) $\hat{Z}\Gamma\Delta = \hat{Z}\Gamma E$. Επειδή όμως οι γωνίες αυτές είναι και εφεξής, τότε θα είναι ορθές.

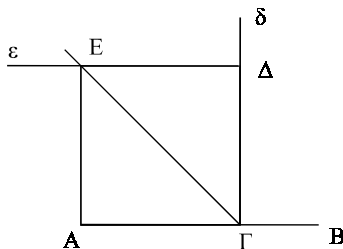
ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Ο De Morgan [42] παρατήρησε πως η πρόταση 11 είναι μερική περίπτωση της πρότασης 9, της κατασκευής της διχοτόμου γωνίας, όταν η γωνία είναι ευθεία και επομένως η κατασκευή θα είναι η ίδια.

Στον κώδικα του Βατικανού αναφέρεται ότι: "Στην περίπτωση που το Γ είναι το άκρο μιας ημιευθείας (είτε ενός ευθύγραμμου τμήματος) προεκτείνουμε την ημιευθεία και συνεχίζουμε όπως προηγούμενα, κάνοντας χρήση του αιτήματος 2."

Ο Πρόκλος έδωσε κατασκευή της καθέτου σε ημιευθεία ή σε ευθύγραμμο τμήμα AB από το άκρο του A χωρίς να προεκτείνει την ημιευθεία είτε το ευθύγραμμο τμήμα με τον εξής τρόπο:



Σχήμα 40

Έστω Γ σημείο του τμήματος AB (Σχ. 40).

Φέρνουμε κάθετο $\Gamma\Delta$ της AB στο Γ . Παίρνουμε $\Gamma\Delta = \Gamma A$ και φέρνουμε την κάθετη $\Delta\epsilon$ στην $\Gamma\delta$ στο Δ . Φέρνουμε τη διχοτόμο της ορθής γωνίας $\hat{\Delta}\Gamma A$ που τέμνει την κάθετο $\Delta\epsilon$ στο E . Τότε, όπως εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε, η AE είναι κάθετος στην AB στο A .

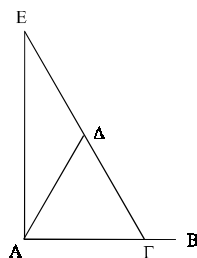
Η πρόταση 11 αποδίδεται από τον al-Nayrizi στον Ήρωνα τον Αλεξανδρινό.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Απολλώνιος ο Περγαιός έδωσε μιαν άλλη κατασκευή, όμοια μ' αυτή που χρησιμοποίησε για να διχοτομήσει μια γωνία.

Ο Άραβας al-Farabis στο βιβλίο του *"Περί εκείνων των μερών της Γεωμετρίας που είναι απαραίτητα στους Τεχνικούς"*, το οποίο κυκλοφόρησε μετά το θάνατό του (950 μ.Χ.), περιλαμβάνει και μίαν άλλη λύση του προβλήματος του Ήρωνα:

Έστω AB τμήμα στο οποίο θέλουμε να φέρουμε κάθετο στο άκρο του A . Θεωρούμε σημείο Γ του τμήματος AB και κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ (Σχ.41). Ακολουθώς προεκτείνουμε την $\Gamma\Delta$ κατά $\Delta E = \Gamma\Delta$.

Η EA είναι η ζητούμενη κάθετος.



Σχήμα 41

Παρατήρηση:

Μια άλλη εκδοχή της κατασκευής αυτής είναι η παρακάτω:

Αφού κατασκευάσουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$, γράφουμε τον κύκλο $(\Delta, \Delta\Gamma)$ και προεκτείνουμε την $\Gamma\Delta$ μέχρις ότου τμήσει τον κύκλο στο E (Σχ. 41). Η EA είναι η ζητούμενη κάθετος, γιατί $\hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$, αφού βαίνει σε ημικύκλιο.

Πρόταση 12 (I. 12)

Να αχθεί ευθεία κάθετη σε δεδομένη ευθεία από δοθέν σημείο εκτός αυτής.

Απόδειξη

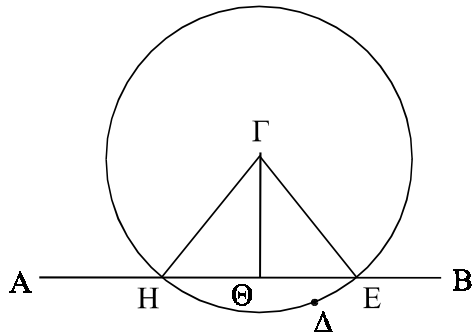
Έστω AB η ευθεία και Γ το σημείο (Σχ.42). Θα φέρουμε ευθεία $\Gamma\epsilon$ κάθετο στην AB . Επί του ημιεπίπεδου στο οποίο δεν ανήκει το Γ

θεωρούμε σημείο Δ και γράφουμε κύκλο (Γ , $\Gamma\Delta$), που τέμνει την AB στα σημεία E , H . Αν Θ το μέσο του EH , η $\Gamma\Theta$ θα είναι η ζητούμενη κάθετος.

Πράγματι, τα τρίγωνα $\Gamma\Theta H$, $\Gamma\Theta E$ έχουν $\Gamma H = \Gamma E$, $\Gamma\Theta = \Gamma\Theta$ και $H\Theta = E\Theta$. Άρα (πρόταση 8)

$\hat{\Gamma\Theta H} = \hat{\Gamma\Theta E}$. Αλλά οι γωνίες αυτές είναι εφεξής, οπότε $\Gamma\Theta \perp AB$.

ὁ.ἔ.π.



Σχήμα 42

Σχόλια

Σε διάφορα σχόλια κωδίκων αναφέρεται ότι με αυτό το πρόβλημα ασχολήθηκε ο Οινοπίδης (5^{ος} π.Χ. αιώνας), επειδή πίστευε ότι θα του ήταν χρήσιμο στην Αστρολογία. Δε γνωρίζουμε όμως αν ο Οινοπίδης ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με αυτό.

Ο Πρόκλος επίσης αναφέρει ότι ο Οινοπίδης ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με το πρόβλημα αυτό και ότι η πρόταση είναι χρήσιμη στην Αστρονομία. Ακόμα αναφέρει ότι η κάθετος κατά τον αρχαϊκό τρόπο αποδιδόταν με την έκφραση "*κατά γνώμονα*", αφού και ο γνώμονας σχηματίζει ορθή γωνία με τον ορίζοντα (Βλέπε βιβλίο II).

Αναφέρει επιπλέον ότι την κάθετο θα πρέπει να την διαχωρίζουμε σε "*επίπεδη*", δηλαδή αυτή που φέρουμε από σημείο σε ευθεία και "*στερεά*", αυτή που φέρουμε από σημείο σε επίπεδο.

Η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος που δίνεται εδώ είναι απλή και ευφυής. Ο Ευκλείδης σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma H E$ και απόδεικνύει ότι η διάμεσος $\Gamma\Theta$ είναι η ζητούμενη κάθετος (από την πρόταση 8).

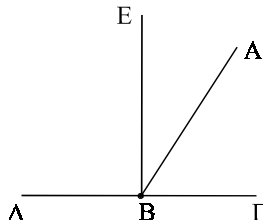
Πρόταση 13 (I. 13)

Αν ημιευθεία συναντήσει ευθεία και σχηματισθούν γωνίες, τότε είτε αυτές είναι δύο ορθές είτε το άθροισμά τους είναι δύο ορθές.

Απόδειξη

Έστω ότι η ημιευθεία AB συναντά την ευθεία $\Gamma\Delta$ και σχηματίζει με αυτήν γωνίες $\hat{\Gamma}BA$, $\hat{\Delta}BA$ (Σχ.43).

Τότε είτε $\hat{\Gamma}BA = \hat{\Delta}BA = 1$ ορθή είτε $\hat{\Gamma}BA + \hat{\Delta}BA = 2$ ορθές.



Σχήμα 43

Πράγματι, αν $\hat{\Gamma}BA = \hat{\Delta}BA$, τότε από τον ορισμό 10 προκύπτει ότι οι $\hat{\Gamma}BA$, $\hat{\Delta}BA$ είναι ορθές.

Αν όμως οι γωνίες δεν είναι ίσες και φέρουμε την κάθετο BE στην $\Delta\Gamma$, τότε $\hat{\Gamma}BE = \hat{E}B\Delta = 1$ ορθή.

Αλλά επειδή $\hat{\Gamma}BE = \hat{\Gamma}BA + \hat{A}BE$ και $\hat{\Gamma}BE + \hat{E}B\Delta = 2$ ορθές, θα είναι $\hat{\Gamma}BA + \hat{A}BE + \hat{E}B\Delta = \hat{\Gamma}BA + \hat{\Delta}BA = 2$ ορθές.

ό.έ.δ.

Σχόλια

Η απόδειξη που παρουσιάσαμε εδώ είναι μια σύγχρονη άποψη της απόδειξης που δίνεται στα *Στοιχεία*. Η απόδειξη των *Στοιχείων* φαντάζει περισσότερο δύσκολη, αφενός μεν γιατί, ως γνωστόν, οι αρχαίοι Έλληνες δε χρησιμοποιούσαν αλγεβρικό συμβολισμό που απλοποιεί την ανάπτυξη της απόδειξης και αφετέρου θεωρήσαμε πολλές ιδιότητες του αθροίσματος γνωστές και τις παραλείγαμε κατά την απόδειξη.

Η πρόταση 13 έχει ένα πολύ βασικό ρόλο στην απόδειξη της 15. Στο αρχαίο κείμενο υπάρχει η έκφραση "γωνίας ποιεί", την οποία ο Πρόκλος εξηγεί ότι καλύπτει την περίπτωση που η ημιευθεία ταυτίζεται με μια από τις ημιευθείες της ευθείας.

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}BA$ και $\hat{A}BE$ ονομάζονται συμπληρωματικές. Επίσης μια γωνία $\hat{\omega}$ είναι συμπληρωματική της γωνίας $\hat{\varphi}$, αν και μόνο αν $\hat{\omega} = 90^\circ - \hat{\varphi}$ οπότε $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^\circ$. Οι γωνίες $\hat{AB}\Gamma$, $\hat{\Delta}BA$ ονομάζονται

παραπληρωματικές. Μια γωνία $\hat{\omega}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\varphi}$, αν και μόνο αν $\hat{\omega} = 180^\circ - \hat{\varphi}$ οπότε $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^\circ$.

Σημείωση

Αν δύο γωνίες είναι ίσες και οι συμπληρωματικές τους (παραπληρωματικές τους) είναι ίσες.

Με τη βοήθεια των εφεξής γωνιών είναι δυνατό να ορίσουμε το άθροισμα δύο γωνιών, καθιστώντας τις εφεξής.

Το άθροισμα δύο γωνιών δεν ορίζεται πάντα, αφού κατά τον Ευκλείδη μια γωνία δεν πρέπει να υπερβαίνει τις 180° . Αν το άθροισμα ορίζεται, τότε το μέτρο του αθροίσματος είναι ίσο με το άθροισμα γωνιών.

Η ανισότητα δύο γωνιών ορίζεται ως εξής: *Θα λέμε ότι η γωνία $\hat{\omega}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\hat{\varphi}$, αν υπάρχει στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{\varphi}$ ημιευθεία, ώστε μια από τις γωνίες που ορίζει με τις πλευρές της $\hat{\varphi}$ να είναι ίση με την $\hat{\omega}$.*

Πρόταση 14 (I. 14)

Αν από ευθεία φέρουμε δύο ημιευθείες που δε βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας και σχηματίζουν τις εφεξής γωνίες με άθροισμα δύο ορθές, τότε οι ημιευθείες κείνται επ' ευθείας.

Απόδειξη

Έστω Γ σημείο της ευθείας ΑΒ και ΓΔ, ΓΕ δύο ημιευθείες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ΑΒ και

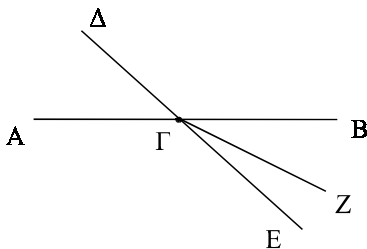
$$\hat{B\Gamma\Delta} + \hat{B\Gamma E} = 2 \text{ ορθές (Σχ.44).}$$

Θα αποδείξουμε ότι οι ΓΔ, ΓΕ κείνται επ' ευθείας.

Ας υποθέσουμε ότι οι ΓΔ, ΓΕ δεν κείνται επ' ευθείας και ότι ΓΖ είναι η προέκταση της ΓΔ.

Τότε (πρόταση 13), θα είναι

$$\hat{B\Gamma\Delta} + \hat{B\Gamma Z} = 2 \text{ ορθές, άρα}$$



Σχήμα 44

$$\hat{B\Gamma\Delta} + \hat{B\Gamma E} = \hat{B\Gamma\Delta} + \hat{B\Gamma Z} \text{ ή } \hat{B\Gamma E} = \hat{B\Gamma Z}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού οι ΓΕ, ΓΖ δεν ταυτίζονται.

Επομένως η υπόθεση ότι οι ΓΕ, ΓΔ δεν κείνται επ' ευθείας δεν ισχύει.

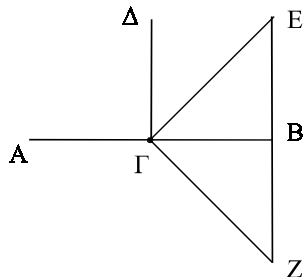
ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Σε διάφορους κώδικες (π.χ. Βατικανός) αναφέρεται ότι η πρόταση 14 είναι αντίστροφη της 13.

Ο Πρόκλος, αφού επισημαίνει ότι "τοῦτο τό θεώρημα τοῦ ἀποδειχθέντος ἐστίν ἀντίστροφον", ακολουθώντας αναφέρει ότι είναι δυνατόν από το ίδιο σημείο μιας ευθείας να φέρουμε δύο ημιευθείες οι οποίες δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία, έτσι ώστε να σχηματίζουν με την ευθεία δύο εφεξής γωνίες με άθροισμα δύο ορθές.

Σαν παράδειγμα δίνει μια κατασκευή (Σχ.45), όπου από σημείο Γ της ευθείας ΑΒ φέρουμε κάθετη ΓΔ στην ΑΒ, ενώ από το Β φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΒ.



Σχήμα 45

Φέρουμε ακόμα τη διχοτόμο της $\hat{B\Gamma\Delta}$ που τέμνει την κάθετη στο Ε και παίρνουμε $BZ = BE$. Φέρνουμε την ΓΖ. Τότε $\hat{\Delta\Gamma Z} + \hat{\Delta\Gamma E} = 2$ ορθές, αφού $\hat{\Delta\Gamma Z} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)$ ορθές, $\hat{\Delta\Gamma E} = \frac{1}{2}$ ορθής.

Ο Πρόκλος αποδίδει την παρατήρηση, καθώς και την απόδειξη αυτή στο σχολιαστή Πορφύριο.

Πρόταση 15 (I. 15)

Αν δύο ευθείες τέμνονται, σχηματίζουν τις κατακορυφήν γωνίες ίσες μεταξύ τους.

Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες AB, ΓΔ τέμνονται στο E (Σχ. 46). Θα αποδεί-

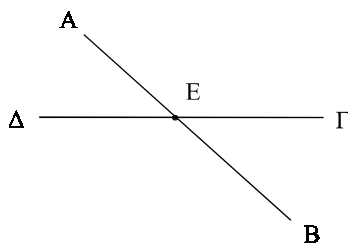
ξουμε ότι $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$

και $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$.

Από την πρόταση 13 έχουμε

$$\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} + \hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = 2 \text{ ορθές} =$$

$$= \hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{E}\hat{B}. \text{ Άρα } \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{E}\hat{B}.$$



Σχήμα 46

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Στα σχόλιά του ο Πρόκλος επισημαίνει το γεγονός ότι οι κατακορυφήν γωνίες διαφέρουν από τις εφεξής: "Τὰς ἐφεξῆς γωνίας τῶν κατὰ κορυφήν διαφέρει φαμέν τῶν μὲν γάρ ἡ γένεσις κατὰ τὴν τομὴν γίγνεται τῶν δύο εὐθειῶν, τῶν δὲ τῆς ἐτέρας μόνον περὶ τὴν ἐτέραν διαιρουμένης". Ακολουθῶς αναφέρει ότι ο ιστορικός Εὐδήμος ο Ρόδιος αποδίδει την πρόταση 15 στο Θαλή. Ὅμως, η αυστηρή απόδειξη σύμφωνα με τον Πρόκλο, οφείλεται στον Ευκλείδη: "ὥς φησὶν Εὐδήμος ὑπὸ Θαλοῦ πρῶτον, τῆς δὲ ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως ἡξιωμένον παρὰ τῷ στοιχειωτῇ." Σε αρκετούς κώδικες (Βατικανού, Βιέννης, Μπολόνιας) υπάρχει η παρακάτω πρόταση, που ο Πρόκλος αναφέρει ως πόρισμα και η οποία προκύπτει άμεσα από τα προηγούμενα:

Πόρισμα

Αν δύο ευθείες τέμνονται, τότε σχηματίζουν τέσσερις γωνίες¹ που έχουν άθροισμα τέσσερις ορθές γωνίες.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο, το προηγούμενο πόρισμα αποτελεί τη βάση ενός "παράδοξου" θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο, μόνο τα επόμενα κανονικά πολύγωνα μπορούν να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο: Το ισοσκελές τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο.

¹ Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη φράση "προς την τομήν" για να περιγράψει τις τέσσερις γωνίες που σχηματίζονται (βέβαια εννοούσε τις κυρτές γωνίες).

Ο Πρόκλος μας δίνει ακόμα τη σημαντική πληροφορία ότι η πρόταση αυτή ανήκει στους Πυθαγορείους. Αναφέρει: "...καί ἔστι τό θεώρημα τοῦτο Πυθαγόρειον".

Θα παρατηρήσουμε ακόμα ότι το προηγούμενο πόρισμα προφανώς ισχύει και για οσοσδήποτε ευθείες του επίπεδου διέρχονται από το ίδιο σημείο, δηλαδή:

Πόρισμα

Αν ν ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το άθροισμα όλων των 2ν γωνιών που σχηματίζουν οι διαδοχικές ευθείες είναι τέσσερις ορθές γωνίες.

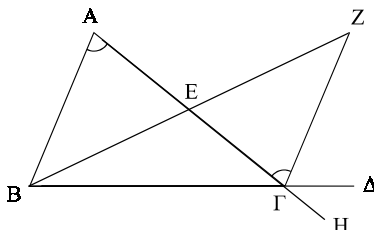
Πρόταση 16 (I. 16)

Σε κάθε τρίγωνο, κάθε εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε εντός και απέναντι γωνία του.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο προεκτείνουμε την πλευρά του ΒΓ μέχρι το σημείο Δ (Σχ. 47). Θα αποδείξουμε ότι $\hat{A}\hat{G}\Delta > \hat{A}, \hat{B}$.

Αν Ε το μέσο της ΑΓ (πρόταση 10) φέρουμε την ΒΕ και την προεκτείνουμε μέχρι το σημείο Ζ, ώστε ΒΕ = ΕΖ. Φέρουμε την ΖΓ και προεκτείνουμε¹ το ΑΓ μέχρι το σημείο Η.



Σχήμα 47

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΖ έχουν ΑΕ = ΕΓ, ΒΕ =

= ΕΖ και $\hat{AEB} = \hat{GEZ}$ (πρόταση 15) ως κατακορυφήν. Άρα είναι ίσα και $\hat{A} = \hat{EGZ} < \hat{EG\Delta}$. Ομοίως αποδεικνύουμε² και ότι $\hat{A}\hat{G}\Delta > \hat{B}$.

ὁ.ἔ.δ.

¹ Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί πολλές εκφράσεις για να περιγράψει την προέκταση ενός τμήματος. Π.χ. για την προέκταση των τμημάτων ΒΓ, ΒΕ χρησιμοποιεί το απαρέμφοτο "προεκβάλλειν", ενώ για το ΑΓ το περισσότερο λόγιο ρήμα "διάγω".

² Εδώ γίνεται χρήση της κοινής έννοιας (9).

Σχόλια

Για να αποδείξουμε την πρόταση 16 δεχθήκαμε σιωπηρά ότι η ημιευθεία ΓΖ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}\Gamma\Delta$ (Σχ. 47). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Το Δ βρίσκεται επί της ημιευθείας ΒΓ (ΒΓ πλευρά του ΑΒΓ) και τα Β, Δ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΑΓ.

Επίσης τα Β, Ζ εκ κατασκευής βρίσκονται εκατέρωθεν της ΑΓ, άρα τα σημεία Δ, Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΑΓ.

Ακόμα, επειδή τα Β, Ε, Ζ είναι συνευθειακά, τα Ε, Ζ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ημιεπίπεδο της ΒΓ. Αλλά και τα Γ, Ε, Α είναι συνευθειακά, άρα τα Ε, Α βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΒΓ.

Επομένως τα Α, Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΒΓΔ. Δηλαδή το Ζ, βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}\Gamma\Delta$, άρα και η ΓΖ.

Θα παρατηρήσουμε βέβαια ότι στο ευκλείδειο σύστημα, όπου κάθε γωνία έχει νόημα μόνον αν είναι μικρότερη από 2 ορθές, η πρόταση 16 θα ήταν πιο σωστό να διατυπωθεί ως εξής:

Κάθε γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από την παραπληρωματική μιας άλλης γωνίας του.

Η πρόταση 16 έχει πολλές εφαρμογές.

Ο Legendre [21] τη χρησιμοποίησε για να "αποδείξει" το αίτημα 5 των παραλλήλων "αποδεικνύοντας" την πρόταση:

"Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών δεν ξεπερνά τις δύο ορθές."

Ο Ευκλείδης υποθέτει ότι το σημείο Ζ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}\Gamma\Delta$, αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο για την πορεία της απόδειξης.

Σύμφωνα με πολλούς ιστορικούς (π.χ. τον Ιταλό Α. Frajese) [60], η πρόταση 16 είναι δημιούργημα του ίδιου του Ευκλείδη.

Πρόταση 17 (I. 17)

Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε γωνιών του είναι μικρότερο των 2 ορθών.

Απόδειξη

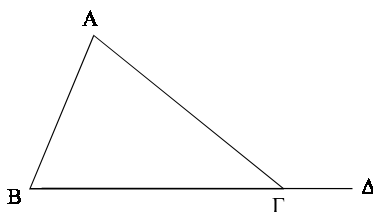
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι γωνίες του $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ (Σχ.48). Θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} + \hat{\Gamma} < \text{ορθές}$.

Προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ μέχρι το σημείο Δ . Επειδή (πρόταση 16)

η $A\Gamma\Delta$ είναι εξωτερική, θα είναι $\hat{A\Gamma\Delta} > \hat{B}$ και $\hat{A\Gamma\Delta} + \hat{\Gamma} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$.

Αλλά $\hat{A\Gamma\Delta} + \hat{\Gamma} = 180^\circ > \hat{B} + \hat{\Gamma}$.

ὅ.ἔ.δ.



Σχήμα 48

Σχόλια

Η γνώμη πολλών φιλολόγων είναι ότι η έκφραση "οποιοδήποτε" (έν πάντη μεταλαμβανομένη) αποτελεί λόγια έκφραση αυτού που εμείς λέμε σήμερα, "για όλο το σύνολο των τιμών τους".

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι η πρόταση ισχύει για οποιεσδήποτε δύο γωνίες του τριγώνου και εξηγεί

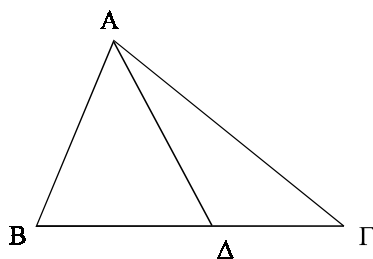
ότι αν το άθροισμα $\hat{A} + \hat{B}$ δύο γωνιών ήταν δύο ορθές, οι ευθείες θα είναι παράλληλες. Ακολουθώντας, αποδεικνύει την πρόταση 17 χωρίς να προεκτείνει την $B\Gamma$:

Θεωρεί σημείο Δ του $B\Gamma$ και συνδέει το Δ με την κορυφή A

(Σχ.49). Τότε η $\hat{A\Delta\Gamma}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $AB\Delta$ και άρα (πρόταση 16) $\hat{A\Delta\Gamma} > \hat{B}$. Ομοίως $\hat{A\Delta B} > \hat{\Gamma}$, επομένως

$$2 \text{ ορθές} = \hat{A\Delta B} + \hat{A\Delta\Gamma} > \hat{B} + \hat{\Gamma}.$$

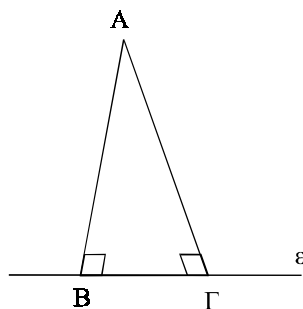
Με τη βοήθεια της απόδειξης αυτής ο Πρόκλος αποδεικνύει ότι δεν είναι δυνατό να φέρουμε από σημείο εκτός ευθείας δύο κάθετες στην ευθεία.



Σχήμα 49

Πράγματι, έστω AB , AG δύο κάθετες στην ευθεία ε από το σημείο A (Σχ. 50). Τότε $\hat{B} + \hat{G} = 2$ ορθές, αλλά λόγω της πρότασης 17, $\hat{B} + \hat{G} < 2$ ορθές, που είναι άτοπο.

Στα σχόλια του Θέωνα του Αλεξανδρινού [92] υπάρχει η απόδειξη του Πρόκλου, η οποία φαίνεται να ανήκει στον Θέωνα ή κάποιον αρχαιότερο.



Σχήμα 50

Σε σχόλια διάφορων κωδίκων, π.χ. του Βατικανού, υπάρχει η παρατήρηση ότι δεν είναι δυνατό ένα τρίγωνο να έχει περισσότερες από μια ορθές ή αμβλείες γωνίες, ούτε είναι δυνατό ένα τρίγωνο να έχει μια μόνο οξεία γωνία.

Η πρόταση 17 όπως και η 16 αποδίδεται από τον A. Frajese [60] προσωπικά στον Ευκλείδη. Πιθανόν το ίδιο ισχύει και για την πρόταση 13, από την οποία προκύπτει η 17. Η πρόταση 17 χρησιμοποιείται στην πρόταση III.18 χωρίς να γίνεται αναφορά καθώς και στην IV.14, ενώ σε άλλες προτάσεις χρησιμοποιείται μια παρόμοια διατύπωση με την πρόταση της IV.17.

Τόσο η πρόταση 16 όσο και η 17 είναι προτάσεις της Ουδέτερης Γεωμετρίας, αφού για την απόδειξή τους δεν γίνεται χρήση του 5^{ου} αιτήματος, ενώ θεωρούνται βασικές για κάποιες μη ευκλείδειες Γεωμετρίες. Ισχύουν και για την Υπερβολική Γεωμετρία και μάλιστα θεωρούνται βασικές προτάσεις της.

Πόρισμα

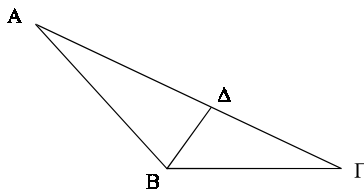
Κάθε τρίγωνο έχει δύο τουλάχιστον οξείες γωνίες.

Πρόταση 18 (I. 18)

Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και AG η μεγαλύτερη πλευρά (Σχ.51). Θα αποδείξουμε ότι η $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία. Επί της AG παίρνουμε τμήμα $AD = AB$ και φέρνουμε τη $B\Delta$.



Σχήμα 51

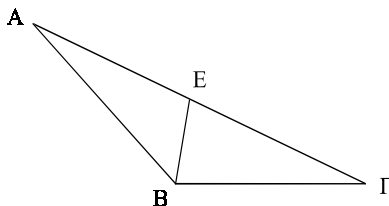
Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ η $\hat{A\Delta B}$ είναι εξωτερική, άρα $\hat{A\Delta B} > \hat{\Gamma}$ και επειδή $\hat{B} > \hat{AB\Delta} = \hat{A\Delta B}$, θα έχουμε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.
 ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

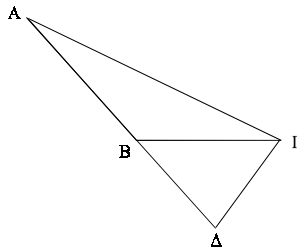
Αν πάρουμε επί της GA τμήμα $GE = GB$ (Σχ.52) αποδεικνύουμε ότι $\hat{B} > \hat{A}$.

Ο Πρόκλος αναφέρει και μια διαφορετική απόδειξη, που ανήκει στον Πορφύριο. "Δείξομεν το προκείμενον ὡς Πορφύριος", γράφει. Η απόδειξη αυτή έχει ως εξής:

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AG > AB$ (Σχ. 53). Προεκτείνουμε την AB ώστε $AD = AG$. Τότε $\hat{\Delta} = \hat{AG\Delta}$ ή $\hat{\Delta} > \hat{\Gamma}$. Αλλά αφού η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $B\Delta\Gamma$, θα είναι $\hat{B} > \hat{\Delta} > \hat{\Gamma}$.



Σχήμα 52



Σχήμα 53

Παρατηρούμε ότι τόσο η απόδειξη του Ευκλείδη όσο και αυτή του Πορφύριου είναι ευθείες αποδείξεις.

Πρόταση 19 (I. 19)

Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία.

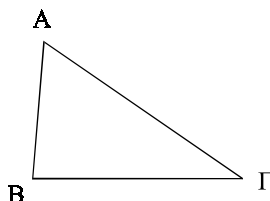
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία $\hat{B}$ μεγαλύτερη της $\hat{\Gamma}$ (Σχ.54). Θα αποδείξουμε ότι $ΑΓ > ΑΒ$.

Αν αυτό δε συνέβαινε και $ΑΓ \leq ΑΒ$, τότε:

Αν $ΑΓ = ΑΒ$, θα είναι και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (πρόταση 5), που είναι άτοπο.

Αν πάλι $ΑΓ < ΑΒ$, θα είναι και $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ (πρόταση 18), που είναι άτοπο. ὁ.ἔ.δ.



Σχήμα 54

Σχόλια

Παρατηρούμε ότι οι προτάσεις 18 και 19 είναι αντίστροφες, πράγμα που διαπιστώνουν πολλοί σχολιαστές. Η πρόταση 19 ήταν γνωστή στον Αριστοτέλη (ίσως και σε παλαιότερους) γιατί στα *"Μετεωρολογικά"* (ΓΕ 376 α 12) υπάρχει η φράση *"ὑπὸ γάρ τὴν μείζω γωνίαν ὑποτείνει"*.

Ο Πρόκλος, αφού επισημάνει ότι η πρόταση 19 είναι αντίστροφη της 18, παρατηρεί ότι για την απόδειξη της 19 χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στα Στοιχεία η *"μέθοδος της εξάντλησης"*. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στο διαχωρισμό της προς απόδειξη πρότασης σε διακριτές περιπτώσεις και αντιμετώπιση της καθεμιάς περίπτωσης συνήθως με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Ο Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος G. Frege [65], σχετικά με την απόδειξη της πρότασης 19 παρατηρεί ότι ο Ευκλείδης κάνει χρήση προτάσεων οι οποίες δεν προκύπτουν ούτε από κοινές έννοιες, ούτε από τα αιτήματα, ούτε από θεωρήματα, π.χ. *αν ένα τμήμα δεν είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο, τότε είναι είτε μικρότερο είτε ίσο του άλλου* κ.ά.

Η προσωπική μας άποψη είναι ότι μια πρόταση σαν και αυτή ίσως να παρουσιάζει ενδιαφέρον για τους λογικιστές, αλλά όχι για τους μαθηματικούς, άρα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί χωρίς ιδιαίτερη μνεία.

Ο Πρόκλος αναφέρει και μια ευθεία απόδειξη, που σύμφωνα με τον al-Nayrizi [39] οφείλεται στον Ήρωνα.

Ο Ήρωνας, σύμφωνα με τον Πρόκλο, για την απόδειξη της πρότασης χρησιμοποιεί το **λήμμα**:

Λήμμα

"Αν η διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου τέμνει την απέναντι βάση και τη διαιρεί σε δύο άνισα μέρη, τότε οι πλευρές του τριγώνου που περιέχουν τη γωνία είναι άνισες και μεγαλύτερη είναι αυτή που βρίσκεται προς το μέρος του μεγαλύτερου τμήματος, ενώ μικρότερη αυτή που βρίσκεται προς το μέρος του μικρότερου."

Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma$ το τρίγωνο, AD η διχοτόμος της γωνίας A και $BD < \Gamma D$ (Σχ.55). Προεκτείνουμε την AD και παίρνουμε $AD = DE$. Επί της $B\Gamma$ παίρνουμε $DZ = BD$ και φέρνουμε την EZ , που τέμνει την $A\Gamma$ στο H .

Επειδή $AD = DE$, $BD = DZ$ και

$\hat{A}\hat{D}B = \hat{Z}\hat{D}E$, τα τρίγωνα $A\Delta B$, $Z\Delta E$ είναι

ίσα. Άρα $AB = EZ$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{H}$.

Οπότε $AH = HE$, άρα $A\Gamma > AH = HE$. Άρα $A\Gamma > HE > EZ = AB$.

Η απόδειξη του Ήωνα, όπως την αναφέρει ο Πρόκλος, είναι η παρακάτω:

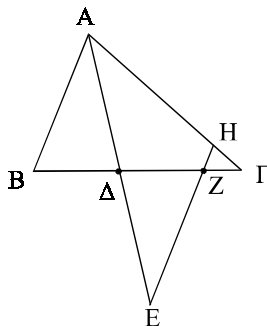
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Φέρνουμε τη διάμεσο AD και την προεκτείνουμε κατά $DE = AD$. Φέρνουμε τη BE και αποδεικνύουμε ότι $BE = A\Gamma$ και $\hat{\Delta}BE = \hat{\Gamma} < \hat{B}$ (Σχ. 56).

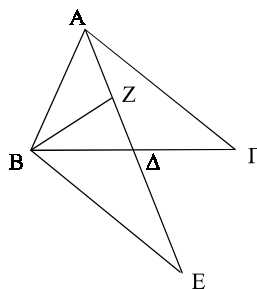
Αν BZ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, τότε, επειδή το Z βρίσκεται μεταξύ των A , Δ , θα είναι $EZ > AZ$. Άρα, από το λήμμα, προκύπτει ότι $BE > BA$.

Επομένως $A\Gamma = BE > AB$.

Η πρόταση 19 θα μπορούσε να αποδειχθεί ευθέως με τη βοήθεια της πρότασης VI.3 (θεώρημα της διχοτόμου).



Σχήμα 55



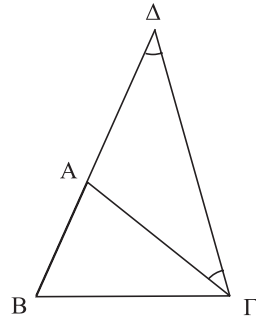
Σχήμα 56

Πρόταση 20 (Ι. 20)

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο πλευρών του είναι μεγαλύτερο της τρίτης.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Θα αποδείξουμε ότι $AB + A\Gamma > B\Gamma$ (Σχ. 57). Προεκτείνουμε την AB κατά $A\Delta = A\Gamma$ και φέρνουμε την $\Delta\Gamma$. Επειδή $A\Gamma = A\Delta$, θα είναι $\Delta B = AB + A\Delta = AB + A\Gamma$ και $\hat{A}\Delta\Gamma = \hat{A}\Gamma\Delta$.



Σχήμα 57

Οπότε $\hat{A}\Delta\Gamma = \hat{A}\Gamma\Delta < \hat{\Delta}\Gamma B$ άρα $B\Gamma < \Delta B = A\Gamma + AB$.
 ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Στα σχόλια διάφορων κωδίκων (π.χ. του Βατικανού) αναφέρεται ότι: "Για να διασύρουν τη πρόταση 20 οι Επικούρειοι συνήθιζαν να λένε ότι αυτή είναι προφανής και για ένα γάιδαρο και ότι δε χρειάζεται κάποιο σχήμα".

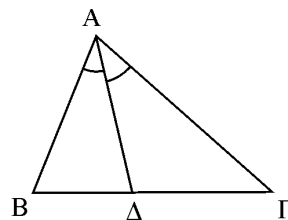
Σχετικά με την άποψη αυτή των Επικουρείων έχουμε να παρατηρήσουμε ότι αυτοί μάλλον δεν είχαν σαφή γνώμη αυτού που ονομάζουμε μαθηματική απόδειξη.

Ο Πρόκλος μας πληροφορεί ότι ο Ήρων και ο Πορφύριος έδωσαν διαφορετικές αποδείξεις από αυτήν που ήδη αναφέραμε χωρίς να προεκτείνουν την AB . Οι αποδείξεις αυτές είναι:

1. Απόδειξη Ήρωνα

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Θα αποδείξουμε ότι $AB + A\Gamma > B\Gamma$ (Σχ. 58).

Φέρνουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ της $\hat{A}$. Τότε στο τρίγωνο $AB\Delta$ η γωνία $\hat{A}\Delta\Gamma$ είναι εξωτερική, οπότε $\hat{A}\Delta\Gamma > \hat{\Delta}AB = \hat{\Delta}A\Gamma$.



Σχήμα 58

Άρα (πρόταση 19) $A\Gamma > \Delta\Gamma$.

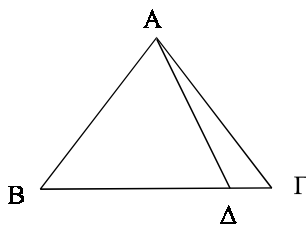
Ομοίως $AB > B\Delta$, οπότε $AB + A\Gamma > B\Delta + \Delta\Gamma = B\Gamma$.

2. Απόδειξη Πορφύριου

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, η πρόταση είναι προφανής.

(ii) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές και $AB = A\Gamma > B\Gamma$, η πρόταση είναι προφανής.



Σχήμα 59

Έστω λοιπόν $AB = A\Gamma < B\Gamma$. Επί της $B\Gamma$ παίρνουμε $BA = B\Delta$ και φέρουμε την $A\Delta$ (Σχ.59).

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η $\hat{A}\Delta\Gamma$ είναι εξωτερική, άρα

$\hat{A}\Delta\Gamma > \hat{\Delta}AB = \hat{A}\Delta B$. Άρα $\hat{A}\Delta\Gamma > \hat{A}\Delta B$ ορθή, δηλαδή στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι η μεγαλύτερη γωνία, άρα $A\Gamma > \Delta\Gamma$.

Επομένως $AB + A\Gamma > B\Delta + \Delta\Gamma = B\Gamma$.

(iii) Η περίπτωση του σκαληνού αντιμετωπίζεται με την βοήθεια της (ii).

Στα σύγχρονα Μαθηματικά η πρόταση 20 ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα**.

Πρόταση 21 (I. 21)

Αν από τα άκρα της πλευράς ενός τριγώνου αχθούν μέσα στο τρίγωνο δύο ημιευθείες ώστε να τέμνονται, τα τμήματα που ορίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου, ενώ η γωνία τους θα είναι μεγαλύτερη της γωνίας των δύο πλευρών.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τα B, Γ φέρνουμε ημιευθείες που τέμνονται στο Δ . Θα αποδείξουμε ότι $AB + A\Gamma > \Delta B + \Delta\Gamma$, ενώ $\hat{B}\Delta\Gamma > \hat{B}A\Gamma$ (Σχ. 60).

Έστω E η τομή της $ΑΓ$ με την $ΒΔ$.

Τότε $AB + AE > BE = BD + DE$

ή $AB + AE + EG > BD + DE + EG$

ή $AB + AG > BD + DG$.

Επειδή η $\hat{B}\Delta\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $\Delta ΕΓ$, θα είναι $\hat{B}\Delta\Gamma > \hat{\Delta ΕΓ} > \hat{A}$,

αφού η $\hat{\Delta ΕΓ}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου BAE .

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η συνθήκη "ώστε να τέμνονται" δεν είναι απαραίτητη, αφού οι ημιευθείες **πάν** τέμνονται, επειδή $\hat{\Delta B\Gamma} + \hat{\Delta \Gamma B} < 2$ ορθές (5° αίτημα των παραλλήλων).

Η πρόταση 21 μπορεί να θεωρηθεί άμεση εφαρμογή της πρότασης 7 όπως την παρουσίασε ο Πρόκλος, πράγμα που δεν παρατήρησε ο Ευκλείδης.

Σε πολλούς κώδικες τονίζεται το γεγονός ότι οι ημιευθείες *άγονται* από τα άκρα B, Γ της $B\Gamma$. Γιατί, αν αυτό δε συμβαίνει, η πρόταση 21 δεν ισχύει γενικά. Ο Πρόκλος δίνει το επόμενο παράδειγμα:

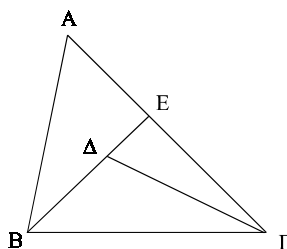
Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ (Σχ. 61) φέρουμε την ΔA και παίρνουμε σε αυτή τμήμα $\Delta E = A\Gamma$. Αν Z είναι το μέσο της AE και φέρουμε την BZ , τότε $\Delta Z + BZ = \Delta E + EZ + BZ = \Delta E + ZA + BZ = A\Gamma + ZA + ZB > A\Gamma + AB$.

Ο Πρόκλος αναφέρει και την περίπτωση για το "τρίγωνον τετράπλευρον" του Ζηνόδωρου.

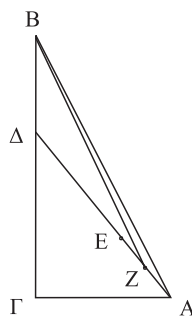
Έστω $ABE\Gamma$ ένα τέτοιο σχήμα (Σχ. 62).

Τότε $\hat{A} < \hat{BEG}$ και $AB + A\Gamma > BE + E\Gamma$.

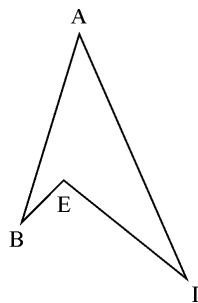
Η πρόταση 21 χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην απόδειξη της πρότασης III. 8.



Σχήμα 60



Σχήμα 61



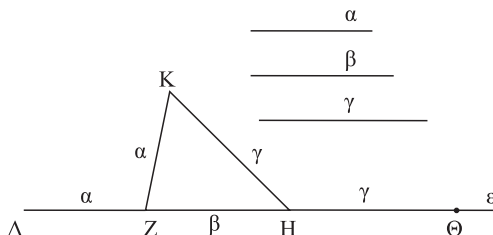
Σχήμα 62

Πρόταση 22 (Ι. 22)

Αν από τρία δεδομένα τμήματα κατασκευασθεί τρίγωνο, τότε είναι αναγκαίο δύο οποιαδήποτε από τα τμήματα να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από το τρίτο τμήμα.

Απόδειξη

Έστω τρία δοθέντα τμήματα α, β, γ από τα οποία με όποιον τρόπο και αν πάρουμε δύο π.χ. τα α, β τότε $\alpha + \beta > \gamma$. Έστω ημιευθεία Δε και τμήματα της Δε, $\Delta Z = \alpha$, $ZH = \beta$, $H\Theta = \gamma$ (Σχ. 63).



Σχήμα 63

Με κέντρο το σημείο Z γράφουμε κύκλο $c_1(Z, \alpha)$, με κέντρο H κύκλο $c_2(H, \gamma)$ και φέρνουμε τις KZ, KH, όπου K το σημείο τομής των c_1, c_2 . Τότε κατασκευάσθηκε το τρίγωνο με πλευρές τα α, β, γ και είναι το KZH. Γιατί το Z είναι κέντρο του c_1 , οπότε $Z\Delta = ZK = \alpha$ και το H είναι το κέντρο του c_2 , οπότε $H\Theta = HK = \gamma$, ενώ $ZH = \beta$.

ὅ.ξ.π.

Σχόλια

Ο Πρόκλος θεωρεί ότι η απόδειξη του Ευκλείδη δεν είναι πλήρης. Παρατηρεί ότι οι κύκλοι δε βρίσκονται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, ούτε εφάπτονται εξωτερικά. Θα πρέπει όμως να διαγράψουμε και την περίπτωση που οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

Ο Heath επισημαίνει ότι αυτή είναι η πρώτη φορά στο κείμενο των *Στοιχείων* όπου ο διορισμός είναι μια συνθήκη για τη δυνατότητα μιας κατασκευής.

Ο R. Simson [126], ένας από τους πρώτους μεταφραστές (και σχολιαστές) των *Στοιχείων*, το 1756 γράφει:

"Μερικοί συγγραφείς κατηγορούν τον Ευκλείδη ότι δεν απέδειξε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται. Αλλά αυτό είναι προφανές από την συνθήκη ..."

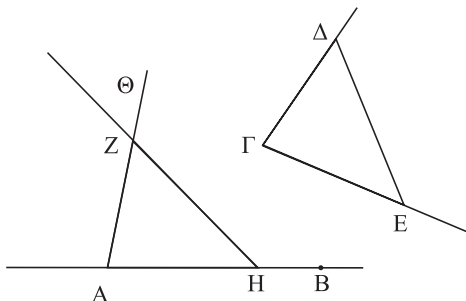
Εδώ ο Simson δείχνει να μην έχει κατανοήσει το γεγονός ότι όταν π.χ. $\beta < \gamma + \alpha$ δεν είναι προφανές ότι οι κύκλοι θα τέμνονται.

Πρόταση 23 (I. 23)

Να κατασκευασθεί γωνία ίση με δεδομένη, της οποίας δίνεται η μια πλευρά και η κορυφή της επί δεδομένης ευθείας.

Απόδειξη

Έστω AB η δοθείσα ευθεία και Γ η κορυφή της γωνίας $\hat{\Delta}\Gamma E$ (Σχ. 64). Θέλουμε να κατασκευάσουμε γωνία ίση με την $\hat{\Delta}\Gamma E$ που να έχει κορυφή το A και πλευρά την AB . Πάνω στις πλευρές της δοθείσας γωνίας παίρνουμε σημεία Δ, E φέρνουμε την ΔE και παίρνουμε επί της AB τμήμα $AH = GE$. Κατασκευάζουμε τρίγωνο AHZ με $HZ = \Delta E$ και $AH = GE$, $AZ = \Gamma\Delta$. Άρα (πρόταση 8) τα τρίγωνα θα έχουν $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



Σχήμα 64

Κατασκευάζουμε λοιπόν γωνία $\hat{BAZ} = \hat{\Delta}\Gamma E$ και επί των πλευρών της AB , $A\Theta$ παίρνουμε $AH = GE$, $AZ = \Gamma\Delta$. Τότε το τρίγωνο AHZ είναι ίσο με το $\Delta\Gamma E$.

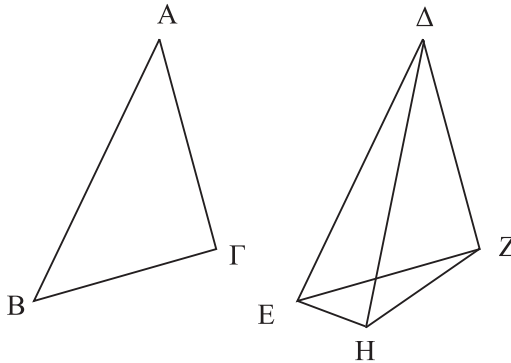
ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Στο Βατικανό κώδικα και σε άλλους κώδικες αναφέρεται ότι η πρόταση αυτή ανήκει στον Οινοπίδη. Το ίδιο αναφέρει και ο Πρόκλος, που ίσως άντλησε την πληροφορία του αυτή από τον Εύδημο: "Πρόβλημα καί τοῦτο, Οἰνοπίδου εὗρημα μᾶλλον, ὥς φησιν Εὐδήμος".

Ο Πρόκλος δίνει για λόγους διδακτικούς μια άλλη λύση.

Επειδή $\hat{B}\hat{A}\hat{G} > \hat{H}\hat{\Delta}\hat{Z}$, κατασκευάζουμε με πλευρά ΔZ και κορυφή Z (πρόταση 23) γωνία $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{B}\hat{A}\hat{G}$. Παίρνουμε $\Delta E = AB$ και φέρνουμε την EH και την EZ .



Σχήμα 67

Επειδή $\Delta E = AB = \Delta H$, θα είναι $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{H} = \hat{\Delta}\hat{H}\hat{E}$.

Επομένως $\hat{\Delta}\hat{H}\hat{E} > \hat{Z}\hat{E}\hat{H}$ και $\hat{Z}\hat{H}\hat{E} > \hat{Z}\hat{E}\hat{H}$, οπότε $EZ > ZH$.

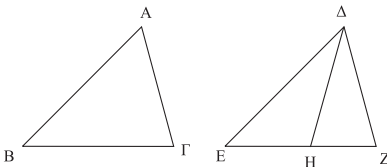
Επειδή τα τρίγωνα BAG , $E\Delta Z$ είναι ίσα, θα είναι $BG = EZ$ και άρα $BG > HZ$.

ὁ.ἔ.δ.

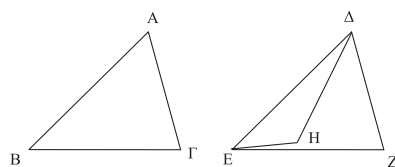
Σχόλια:

Στον κώδικα D' Orville (Δορβιλλιανό) υπάρχει μια όχι πλήρης απόδειξη την οποία, για το λόγο αυτό, δεν αναφέρουμε εδώ.

Στον Πρόκλο εξετάζονται οι περιπτώσεις κατά τις οποίες το H βρίσκεται επί της EZ (Σχ. 68) είτε στο εσωτερικό του τριγώνου ΔEZ (Σχ. 69).



Σχήμα 68



Σχήμα 69

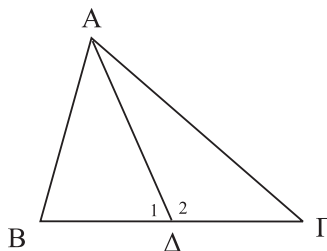
Στην πρώτη περίπτωση προεκτείνουμε την ΕΗ και παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε $\Delta Z = \Delta H = \text{ΑΓ}$. Προφανώς τότε $\text{ΕΗ} < \text{ΕΖ} = \text{ΒΓ}$. Αν πάλι το Η βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, τότε (Ι. 21) θα είναι $\text{ΕΗ} < \text{ΕΖ} = \text{ΒΓ}$ (Σχ. 69).

Ο μεταφραστής των *Στοιχείων* R. Simson γράφει ότι αν υποθέσουμε ότι $\Delta \text{Ε} > \Delta \text{Η}$, τότε προφανώς δε χρειάζεται να θεωρήσουμε άλλες περιπτώσεις.

Ο Α. De Morgan [42] αναφέρει μια σχετική πρόταση:

Κάθε τμήμα που άγεται από την κορυφή ενός τριγώνου μέχρι την απέναντι πλευρά είναι μικρότερο από την μεγαλύτερη από τις πλευρές μεταξύ των οποίων περιέχεται, είτε από τις δύο πλευρές, αν αυτές είναι ίσες.

Η απόδειξη της πρότασης μπορεί να γίνει είτε φέρνοντας το ύψος από το Β και διακρίνοντας περιπτώσεις είτε με τη βοήθεια της πρότασης 16. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\text{ΑΓ} > \text{ΑΒ}$ (Σχ.70), τότε $\hat{\text{Β}} > \hat{\text{Γ}}$.



Σχήμα

Αλλά $\hat{\Delta_2} > \hat{\text{Β}} > \hat{\text{Γ}}$ άρα $\text{ΑΓ} > \text{ΑΔ}$.

Ο Πρόκλος στα σχόλιά του αναφέρει το παρακάτω σχετικό θεώρημα, το οποίο όμως αποδίδεται στον Ήρωνα:

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις μεταξύ των πλευρών αυτών γωνίες άνισες, τότε:

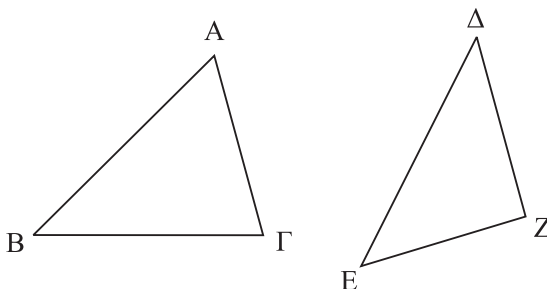
- (α) *Αν το άθροισμα των γωνιών αυτών είναι 2 ορθές, τα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά.*
- (β) *Αν το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο από 2 ορθές, το τρίγωνο με τη μεγαλύτερη γωνία έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.*
- (γ) *Αν το άθροισμα των γωνιών είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές, το τρίγωνο με τη μικρότερη γωνία έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.*

Πρόταση 25 (I. 25)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες και η τρίτη πλευρά του ενός είναι μεγαλύτερη της τρίτης πλευράς του άλλου, και η γωνία που περιέχεται από τις δύο πλευρές του ενός θα είναι μεγαλύτερη από τη γωνία που περιέχεται από τις δύο πλευρές του άλλου.

Απόδειξη

Έστω $\triangle AB\Gamma$, $\triangle EZ$ τρίγωνα με $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $B\Gamma > EZ$ (Σχ. 71).



Σχήμα 71

Θα αποδείξουμε ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} > \hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z}$. Αν αυτό δεν συνέβαινε, τότε $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} \leq \hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z}$.

Αν $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z}$, τότε τα τρίγωνα θα ήταν ίσα και $B\Gamma = EZ$, που είναι άτοπο.

Αν $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} < \hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z}$, τότε (πρόταση 24) θα ήταν $EZ > B\Gamma$, που είναι άτοπο.

ὅ.ξ.δ.

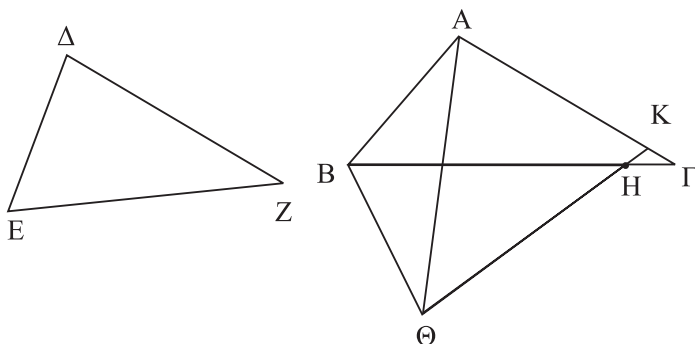
Σχόλια

Κατά τη γνώμη μας η απόδειξη της πρότασης 25 είναι μια ειδική περίπτωση της μεθόδου της εξάντλησης και μάλιστα η δεύτερη εφαρμογή της μεθόδου στα Στοιχεία. (Πρώτη εφαρμογή είχαμε στη πρόταση 19).

Ο Πρόκλος αναφέρει άλλες δυο έξοχες αποδείξεις, ανεξάρτητες από την πρόταση 24. Η μία είναι του Μενελάου και η άλλη του Ήρωνα.

Απόδειξη του Μενελάου:

Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ με $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ (Σχ. 72) και $B\Gamma > EZ$.



Σχήμα 72

Θα αποδείξουμε ότι $\hat{A} > \hat{\Delta}$.

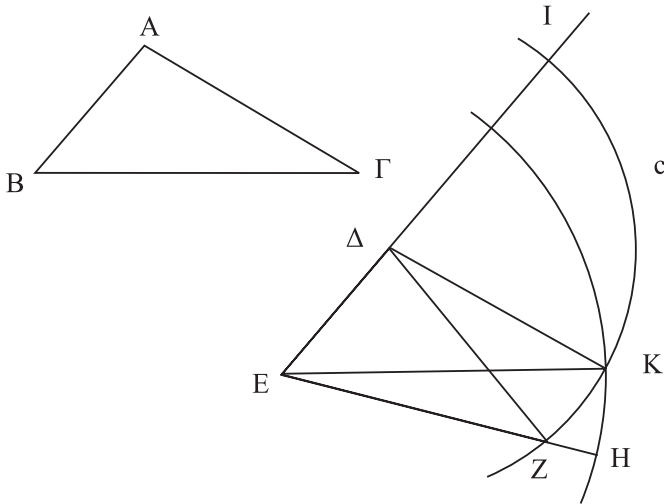
Επί της $B\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $BH = EZ$ και κατασκευάζουμε γωνία $\hat{B\Theta} = \hat{\Delta EZ}$, ώστε τα A, Θ να βρίσκονται εκατέρωθεν της $B\Gamma$.

Παίρνουμε τμήμα $B\Theta = \Delta E$ και φέρνουμε τη ΘH , που τέμνει την $A\Gamma$ στο K . Φέρνουμε και την $A\Theta$. Τότε τα τρίγωνα $B\Theta H$ και $E\Delta Z$ είναι ίσα, άρα $\Delta Z = \Theta H = A\Gamma > AK$ προφανώς. Επομένως $\hat{K\Delta\Theta} > \hat{K\Theta A}$ και αφού $AB = B\Theta$, θα είναι $\hat{B\Delta\Theta} = \hat{B\Theta A}$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{B\Delta\Theta} + \hat{K\Delta\Theta} > \hat{B\Theta A} + \hat{A\Theta K} = \hat{B\Theta H} = \hat{E\Delta Z}.$$

Απόδειξη του Ήρωνα:

Επειδή $B\Gamma > EZ$, προεκτείνουμε την EZ και παίρνουμε σημείο H ώστε $B\Gamma = EH$ (Σχ. 73). Με κέντρο Δ και ακτίνα ΔZ γράφουμε κύκλο c που τέμνει την ΔE στο I .



Σχήμα 73

Επειδή είναι $AB + AΓ > BΓ$ και $AB = ΔΕ$, $AΓ = ΔΖ$ αντίστοιχα, ενώ $BΓ = ΕΗ$ και $EΙ > ΕΗ$, ο κύκλος με κέντρο Ε και ακτίνα ΕΗ θα τέμνει το ΕΙ και συνεπώς και τον κύκλο c, έστω στο σημείο Κ.

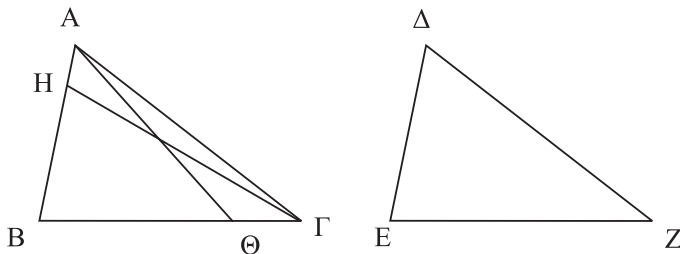
Φέρνουμε τις ΔΚ, ΚΕ. Τότε $ΔΚ = ΔΖ = AΓ$ και $EΚ = ΕΗ = BΓ$, $ΔΕ = AB$. Οπότε τα τρίγωνα $ABΓ$, $ΔΕΚ$ είναι ίσα και τότε $BΓ = EΚ = ΕΗ$, $\hat{B}AΓ = \hat{E}ΔΚ > \hat{E}ΔΖ$.

Πρόταση 26 (I. 26)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες αντιστοίχως ίσες και μια πλευρά ίση, η οποία είτε έχει τις γωνίες προσκείμενες είτε είναι απέναντι σε μια από τις ίσες γωνίες, τότε τα τρίγωνα θα έχουν ίσες αντιστοίχως και τις άλλες πλευρές τους, καθώς και τις τρίτες γωνίες τους.

Απόδειξη

Έστω $ABΓ$, $ΔΕΖ$ τα τρίγωνα τα οποία έχουν $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$ (Σχ. 74). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:



Σχήμα 74

- (i) Τα τρίγωνα έχουν $BΓ = ΕΖ$, δηλαδή τις πλευρές στις οποίες οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{E}$, $\hat{Z}$ είναι προσκείμενες. Θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα έχουν τις υπόλοιπες γωνίες ίσες και τις άλλες πλευρές ίσες, δηλαδή θα είναι ίσα.

Ας υποθέσουμε ότι $AB, \Delta E$ είναι άνισες και ότι $AB > \Delta E$. Επί της BA ας πάρουμε τμήμα $BH = \Delta E$ και ας φέρουμε την $H\Gamma$.

Τότε, αφού $BH = \Delta E$, $B\Gamma = ΕΖ$, τα τρίγωνα $HΒΓ$ και $\Delta ΕΖ$ είναι ίσα, άρα $\hat{H}\hat{\Gamma}B = \hat{Z} = \hat{A}\hat{\Gamma}B$, που είναι άτοπο.

Επομένως οι $AB, \Delta E$ δεν είναι άνισες, δηλαδή $AB = \Delta E$. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta ΕΖ$ θα είναι τότε ίσα και θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα (πρόταση 4).

- (ii) Τα τρίγωνα έχουν $AB = \Delta E$, δηλαδή τα τρίγωνα έχουν $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και $AB = \Delta E$. Θα αποδείξουμε ότι είναι ίσα.

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει, αλλά ότι $B\Gamma > ΕΖ$. Παίρνουμε τμήμα $B\Theta = ΕΖ$ και φέρουμε την ΘA . Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $\Delta ΕΖ$ είναι ίσα, γιατί $AB = \Delta E$, $B\Theta = ΕΖ$ και $\hat{B} = \hat{E}$.

Άρα και $\hat{B}\hat{\Theta}A = \hat{Z} = \hat{\Gamma}$. Αλλά στο τρίγωνο $A\Theta\Gamma$ η $\hat{B}\hat{\Theta}A$ είναι εξωτερική και άρα είναι $\hat{B}\hat{\Theta}A > \hat{\Gamma}$, άτοπο. Επομένως $B\Gamma = ΕΖ$ και τα τρίγωνα είναι ίσα.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 26 είναι το τρίτο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Φαίνεται ότι η απόδειξη αυτή ανήκει στον Πορφύριο, γιατί ο Πρόκλος στα σχόλιά του γράφει: *"Τοσαῦτα καὶ πρὸς τὴν τῶν προκειμένων ἀκρίβειαν ο Πορφύριος ἡμῖν συμβάλλεται"*.

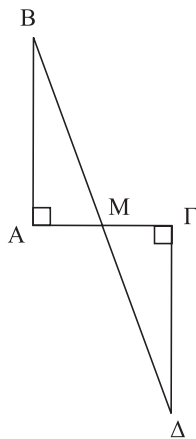
Ο Πρόκλος στα σχόλιά του αναφέρει ότι ο Εὐδήμος στη Γεωμετρική ιστορία του, αποδίδει την πρόταση αυτή στον Θαλή, (*Θαλοῦ εὔρημα*) λέγοντας ότι το θεώρημα αυτό είναι απαραίτητο για τη μέθοδο με την οποία ο Θαλής υπολόγισε την απόσταση ενός πλοίου από τη στεριά.

Υπάρχουν πάρα πολλές υποθέσεις (Bretschneider, Cantor, Schmidt, Tannery, κ.α.) άλλες από τις οποίες χρησιμοποιούν τη θεωρία της ομοιότητας και άλλες την ισότητα ορθογωνίων τριγώνων. Ο Tannery [138] πιστεύει ότι ο Θαλής χρησιμοποίησε μία τέτοια μέθοδο.

Ο Ρωμαίος τοπογράφος Marcus Junius Nip-sus χρησιμοποίησε μια παραλλαγή της απόδειξης του Θαλή για να υπολογίσει την απόσταση σημείου από άλλο απρόσιτο σημείο. Η απόδειξη αυτή είναι:

Έστω Β απρόσιτο σημείο και Α η θέση του μετρητή (Σχ. 75). Ζητάμε την απόσταση ΑΒ. Φέρουμε την $AM \perp AB$ και παίρνουμε $AM = M\Gamma$. Στο Γ φέρουμε κάθετο στην ΑΓ και φέρουμε την ΒΜ, που τέμνει την κάθετο στο Δ.

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΜ, ΓΔΜ προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = AB$. Μετρώντας λοιπόν την ΓΔ έχουμε υπολογίσει την ΑΒ.

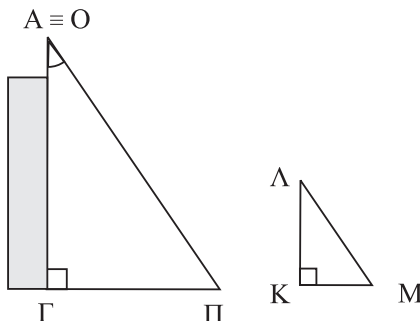


Σχήμα 75

Ο Heath [81] παρατηρεί ότι στην περίπτωση αυτή για να μπορεί να λειτουργήσει η μέθοδος, πρέπει να υπάρχει τεράστιος ακάλυπτος χώρος και γι' αυτό προτείνει μια άλλη, που στηρίζεται στην ομοιότητα:

Από ύψο γνοστού ύψους ο παρατηρητής τοποθετεί στο μάτι του μια γωνία, της οποίας η μια πλευρά μένει κάθετη στο έδαφος και η άλλη στρέφεται μέχρις ότου συμπέσει με την ευθεία ΟΠ (Ο ο οφθαλμός του παρατηρητή και Π το πλοίο) (Σχ. 76). Ταυτόχρονα από την κορυφή ενός

ραβδίου $\Lambda\text{Κ}$ γνωστού μήκους σχηματίζουμε γωνία ίση με την $\hat{\Gamma\text{ΑΠ}}$. Τότε $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΛΚ}} = \frac{\text{ΓΠ}}{\text{ΚΜ}}$.



Σχήμα 76

Ο Θέων ο Αλεξανδρινός, αλλά και άλλοι σχολιαστές, όπως π.χ. ο Πρόκλος, μας δίνουν μετά την πρόταση 26 μια σύνοψη των κριτηρίων ισότητας τριγώνων που αναφέρει ο Ευκλείδης. Στη συνέχεια ο σχολιαστής (μάλλον ο Θέων κατά τον Mueller [109]) αναφέρεται στα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

- α) ΠΠΠ (τρεις πλευρές ίσες μία προς μία)
- β) ΠΓΠ (δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία τους)
- γ) ΓΓΠ (μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες)

Ο Πρόκλος επίσης αναφέρει τα ίδια κριτήρια.

Ο σχολιαστής του Παρισινού κώδικα αναφέρει ακόμα και τις περιπτώσεις ΓΠΠΠ, ΠΓΓΓ τις οποίες μάλιστα χαρακτηρίζει περιττές. Καταλήγοντας, ο σχολιαστής αναφέρει ότι οι μόνες προτάσεις σχετικά με την ισότητα τριγώνων που είναι δεκτές είναι τρεις.

"Τρία μόνον θεωρήματα περί της ισότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν τῆς ἐν ταῖς πλευραῖς καὶ ταῖς γωνίαις, τῶν ἄλλων πασῶν ὑποθέσεων ἢ ἀδύνατον οὐσῶν δεῖξαι τό ζητούμενον ἢ δυνατῶν μὲν ἀλλὰ περιττῶν τῷ δι' ἐλαττόνων ὑποθέσεων τὰ αὐτὰ πέφηναν".

Ο Heath αναφερόμενος στον Πρόκλο γράφει ότι είναι παράξενο το γεγονός ότι ο Πρόκλος δεν κάνει νύξη για την "αμφισβητούμενη περίπτωση" (ΠΠΓ, δύο πλευρές και μια γωνία μη περιεχομένη). Ο Heath

προφανώς δεν είχε υπόψη του τα σχόλια του Παρισινού κώδικα, όπου στη συνέχεια όσων αναφέραμε, διαβάζουμε: "*ὥσπερ οὖν, ὅτε δύο πλευρὰς ἐλάμβανεν ἴσας δυσὶν καὶ γωνία μιᾷ μίαν ἴσην, οὐ τὴν τυχοῦσαν ἐλάμβανεν γωνίαν, ἀλλ' ὡς αὐτοῦ προσετίθει, τὴν ὑπὸ τὴν ἴσων*".

6. Η Γεωμετρία των παραλλήλων

Η έννοια των παραλλήλων είναι γνωστή στα προ-ευκλείδεια ελληνικά Μαθηματικά. Υπάρχουν ισχυρότατες ενδείξεις ότι θα πρέπει να ήταν γνωστή και στο Θαλή.

Οπωσδήποτε όμως οι Πυθαγόρειοι όχι μόνο γνώριζαν την έννοια της παραλληλίας, αλλά γνώριζαν ακόμα και το 5^ο αίτημα, αφού το χρησιμοποιούσαν στην απόδειξη της πρότασης για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου (πρόταση 32).

Ο Αριστοτέλης στα βιβλία του αναφέρεται στις παράλληλες πολύ συχνά. Στο βιβλίο "*Αναλυτικά Πρότερα*" (B 65a 4-9) αναφέρει: "*Είναι αυτό ακριβώς που κάνουν αυτοί που νομίζουν ότι σχεδιάζουν παράλληλες, διότι τους διαφεύγει ότι λαμβάνουν ως δεδομένα πράγματα τα οποία πρέπει να αποδείξουν, αν αυτές δεν υπάρχουν*".

Από αυτό το δύσκολο εδάφιο, λέγει ο Heath, το οποίο οι σχολιαστές δεν κατάφεραν να το ερμηνεύσουν ικανοποιητικά, φαίνεται ότι η θεωρία των παραλλήλων την εποχή του Αριστοτέλη είχε κάποιες "*petitiones principii*"¹.

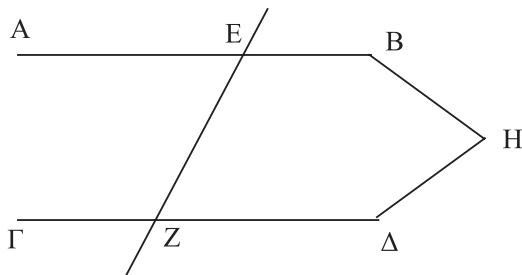
Πρόταση 27 (I. 27)

Αν δύο ευθείες τέμνονται από ευθεία, ώστε οι εντός και εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται να είναι ίσες, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες AB, ΓΔ τέμνονται από την ευθεία EZ και ότι $\hat{A}EZ = \hat{E}Z\Delta$ (Σχ. 77). Θα αποδείξουμε ότι AB // ΓΔ.

¹ *petitio principii* = αίτημα αρχής, λήψη του ζητούμενου, δηλαδή για την απόδειξη μιας πρότασης, χρησιμοποιούμε την ίδια την πρόταση (ή κάποια στοιχεία της).



Σχήμα 77

Αν οι AB, ΓΔ τέμνονται στο σημείο H, τότε στο τρίγωνο HEZ η γωνία $\hat{A}\hat{E}Z$ είναι εξωτερική και ίση με την $\hat{E}Z\hat{D}$, που είναι άτοπο (πρόταση 16).

Άρα οι AB, ΓΔ δε θα συναντηθούν προς το μέρος των B, Δ. Για τον ίδιο λόγο δεν θα συναντηθούν και προς το μέρος των A, Γ. Άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι είναι προφανές πως οι ευθείες πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Όπως παρατηρούμε, η απόδειξη της πρότασης 27 στηρίζεται στην πρόταση 16. Μάλιστα, όπως επισημαίνουν διάφοροι σχολιαστές, είναι πρώτη φορά που γίνεται χρήση της πρότασης 16. Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την πρόταση 27 όχι με τη βοήθεια της πρότασης 16 αλλά της παρακάτω πρότασης (Λήμμα):

Λήμμα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε οι ευθείες έχουν κοινή κάθετο.

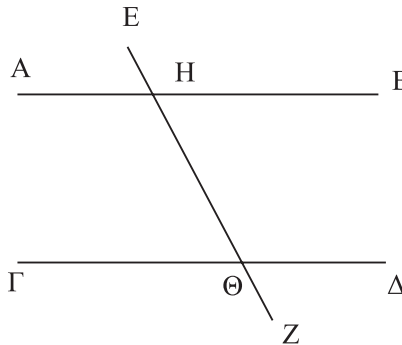
Πρόταση 28 (I. 28)

Αν δύο ευθείες τέμνονται ώστε δύο εντός - εκτός και επί τα αυτά γωνίες να είναι ίσες ή οι εντός και επί τα αυτά γωνίες να είναι παραπληρωματικές, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ότι η ΕΖ τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΓΔ στα Η, Θ. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- (i) $\hat{EHB} = \hat{H\Theta\Delta}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$. (Σχ. 78).



Σχήμα 78

Επειδή $\hat{EHB} = \hat{A\H\Theta}$ ως κατακορυφήν, θα είναι $\hat{A\H\Theta} = \hat{H\Theta\Delta}$.
Αλλά τότε (πρόταση 27) θα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

- (ii) $\hat{B\H\Theta} + \hat{H\Theta\Delta} = 2$ ορθές.

Επειδή $\hat{B\H\Theta} + \hat{\Theta\H\Delta} = 2$ ορθές, θα είναι $\hat{H\Theta\Delta} = \hat{A\H\Theta}$. Επομένως (πρόταση 27) $AB \parallel \Gamma\Delta$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Ο Πρόκλος σχολιάζοντας τις προτάσεις 27, 28 παρατηρεί ότι ο Ευκλείδης χωρίζει τα τρία κριτήρια με παράξενο τρόπο και εννοεί ότι η πρόταση 28 θα έπρεπε να προηγείται της 27, αφού δεν είναι βέβαια η ύπαρξή της χωρίς την 28.

Όμως ο Αριστοτέλης ("Αναλυτικά Ὑστερα" Α574α 13–16) θεωρεί την πρόταση 28 ως συνθήκη ύπαρξης των παραλλήλων και όχι ως την κατασκευή τους.

Η πρόταση 28 είναι ανεξάρτητη από το 5^ο αίτημα, εν τούτοις εξαρτάται από το αξίωμα 1 (Δύο σημεία ορίζουν μια μοναδική ευθεία) και επομένως ισχύει και για τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες Lobatshevski και Riemann.

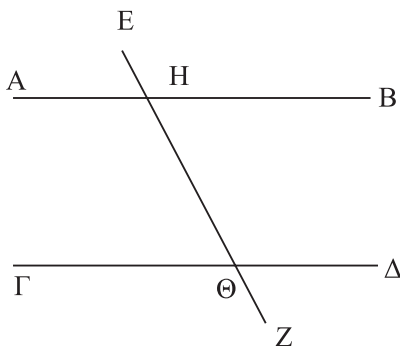
Πρόταση 29 (I. 29)

Η ευθεία που τέμνει δύο παράλληλες ευθείες σχηματίζει τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τις εντός - εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες και τις εντός και επί τα αυτά παραπληρωματικές.

Αποδείξη

Αν η ευθεία EZ τέμνει τις παράλληλες ευθείες AB, ΓΔ στα Η, Θ, θα αποδείξουμε ότι:

$$\hat{A}\hat{H}\hat{\Theta} = \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Delta}, \hat{E}\hat{H}\hat{B} = \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Delta} \text{ και } \hat{B}\hat{H}\hat{\Theta} + \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Delta} = 2 \text{ ορθές (Σχ. 79).}$$



Σχήμα 79

Πράγματι, αν π.χ. $\hat{A}\hat{H}\hat{\Theta} > \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Delta}$, τότε

$$2 \text{ ορθές} = \hat{A}\hat{H}\hat{\Theta} + \hat{B}\hat{H}\hat{\Theta} > \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{H}\hat{\Theta},$$

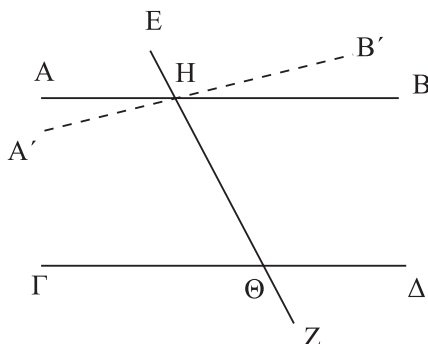
που είναι άτοπο (πρόταση 13), γιατί στην αντίθετη περίπτωση οι AB, ΓΔ θα τέμονταν. Οπότε $\hat{A}\hat{H}\hat{\Theta} = \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A}\hat{H}\hat{\Theta} = \hat{E}\hat{H}\hat{B}$, οπότε $\hat{E}\hat{H}\hat{B} = \hat{H}\hat{\Theta}\hat{\Delta}$.

Τέλος, $\hat{EHB} + \hat{BH\Theta} = \hat{H\Theta\Delta} + \hat{BH\Theta}$ και επειδή $\hat{EHB} + \hat{BH\Theta} = 2$ ορθές, τότε και $\hat{H\Theta\Delta} + \hat{BH\Theta} = 2$ ορθές.
 ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Στον κώδικα της Βιέννης διαβάζουμε ότι η πρόταση 29 είναι αντίστροφη των προτάσεων 27 και 28. Την παρατήρηση αυτή κάνει και ο Πρόκλος.

Στα σύγχρονα εγχειρίδια, όπου στη θέση του 5^{ου} αιτήματος χρησιμοποιείται η πρόταση του Αριστοτέλη (αναφέρεται και σαν αξίωμα Playfair), η πρόταση 29 αποδεικνύεται απλούστερα με τη βοήθεια του αξιώματος αυτού.



Σχήμα 80

Πράγματι, αν $\hat{A'H\Theta} > \hat{H\Theta\Delta}$, φέρνουμε ευθεία $A'B'$, ώστε $\hat{A'H\Theta} = \hat{H\Theta\Delta}$ (Σχ. 80). Τότε όμως $A'B' \parallel \Gamma\Delta$, που είναι άτοπο, αφού από το H μια μόνο παράλληλη άγεται προς την $\Gamma\Delta$.

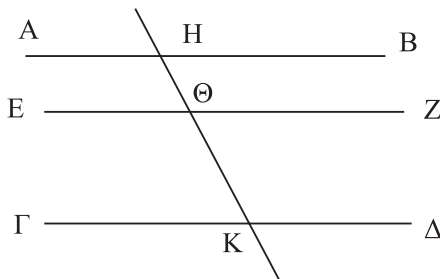
Όπως έχουμε επισημάνει, η πρόταση 29 είναι η πρώτη πρόταση των *Στοιχείων* για την απόδειξη της οποίας απαιτείται το 5^ο αίτημα (είτε το ισοδύναμό του αξίωμα του Αριστοτέλη)

Πρόταση 30 (I. 30)

Αν ευθείες είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ότι $AB \parallel EZ$ και $\Gamma\Delta \parallel EZ$. Θα αποδείξουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.



Σχήμα 81

Έστω ότι η ευθεία HK τέμνει τις AB, EZ (Σχ. 81). Τότε $\hat{A}HK = \hat{H}\Theta Z$. Αν η HK τέμνει τις EZ, $\Gamma\Delta$, τότε $\hat{H}\Theta Z = \hat{\Theta}K\Delta$. Άρα $\hat{A}H\Theta = \hat{\Theta}K\Delta$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$.
 ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 30 εκφράζει τη μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας. Την πρόταση αυτή θα μπορούσαμε να την αποδείξουμε και με τη βοήθεια της πρότασης του Αριστοτέλη - Playfair.

Πράγματι, αν οι AB, $\Gamma\Delta$ τέμονταν στο O, τότε από αυτό θα άγονταν δύο ευθείες παράλληλες στην EZ, πράγμα άτοπο.

Ακόμα απλούστερη είναι η απόδειξη στο πραγματικό Καρτεσιανό επίπεδο. Έστω e_1, e_2, e_3 διαφορετικές ευθείες με συντελεστές κατευθύνσεων $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Αν $e_1 \parallel e_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, $e_2 \parallel e_3 \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3$.

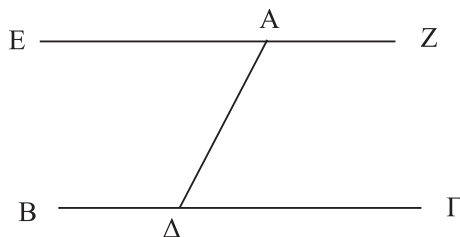
Άρα $\lambda_1 = \lambda_3 \Rightarrow e_1 \parallel e_3$.

Πρόταση 31 (I. 31)

Από δοθέν σημείο να αχθεί ευθεία παράλληλη προς δοθείσα ευθεία.

Απόδειξη

Έστω A δοθέν σημείο εκτός της ευθείας BΓ. Θα κατασκευάσουμε από το A ευθεία $EZ \parallel B\Gamma$ (Σχ. 82).



Σχήμα 82

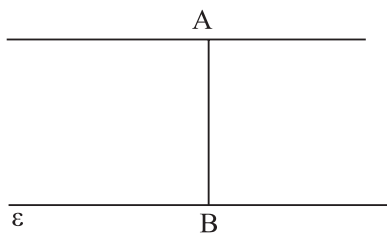
Επί της ΒΓ θεωρούμε σημείο Δ και φέρνουμε την ΑΔ. Κατασκευάζουμε με κορυφή το Α και πλευρά την ΑΔ, γωνία $\hat{E}\hat{A}\Delta = \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$. Η ευθεία ΕΑΖ είναι η ζητούμενη παράλληλη.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι αφού από σημείο Α εκτός ευθείας ε (Σχ. 83) μια μόνο κάθετη μπορούμε να φέρουμε στην ευθεία ε, την ΑΒ, (πρόταση 12), τότε φέρνοντας από το σημείο Α μία κάθετη στην ΑΒ στο Α, αυτή είναι παράλληλη στην αρχική ευθεία (πρόταση 27).

Αυτή βέβαια, λόγω του 5^{ου} αξιώματος θα είναι μοναδική.



Σχήμα 83

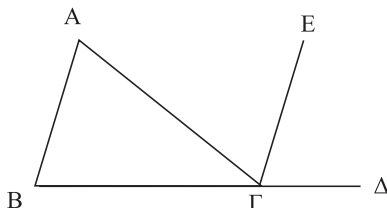
Πρόταση 32 (I. 32)

Σε κάθε τρίγωνο κάθε εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο εντός και απέναντι γωνιών και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ μέχρι το Δ (Σχ. 84). Θα αποδείξουμε ότι

$$\hat{A}\hat{G}\Delta = \hat{A} + \hat{B} \text{ και ότι } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ ορθές.}$$



Σχήμα 84

Φέρνουμε ΓΕ // ΑΒ και αφού η ΑΓ τις τέμνει, τότε $\hat{B}\hat{A}\hat{G} = \hat{A}\hat{G}\hat{E}$.

Επίσης, αφού η ΒΓ τις τέμνει, τότε $\hat{A}\hat{B}\hat{G} = \hat{E}\hat{G}\hat{\Delta}$, οπότε

$$\hat{B}\hat{A}\hat{G} + \hat{A}\hat{B}\hat{G} = \hat{A} + \hat{B} = \hat{A}\hat{G}\hat{E} + \hat{E}\hat{G}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{G}\hat{\Delta}.$$

Επειδή $\hat{A} + \hat{B} = \hat{A}\hat{G}\hat{\Delta}$ και $\hat{A}\hat{G}\hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές, θα είναι και

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ ορθές.}$$

ὁ.ἔ.δ.

Από την πρόταση 32 προκύπτει ότι:

Πόρισμα

Αν μια γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο άλλων είναι ορθή.

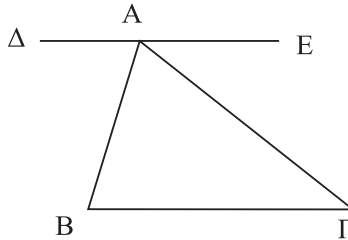
Διότι είναι ίση με την εφεξής που είναι εξωτερική των δύο γωνιών. Και ως γνωστόν, αν δύο εφεξής παραπληρωματικές γωνίες είναι ίσες, τότε αυτές είναι ορθές.

Σχόλια

Η πρόταση 32 είναι αρχαιότατη. Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Εὐδημος ο Περιπατητικός αποδίδει στους Πυθαγορείους την επινόηση της πρότασης για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, δηλαδή ότι: **Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι δύο ορθές.** "Εὐδημος δέ ὁ Περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρη-

ματος εὐρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθὰς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας".

Ἡ ἀπόδειξη των Πυθαγορείων, ὅπως μας την παραθέτει ο Πρόκλος ἀπὸ τον Εὐδήμιο ἔχει ως εξής:



Σχήμα 85

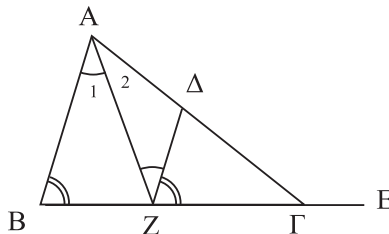
Ἐστω τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ΔΕ ἀπὸ το Α παράλληλη στη ΒΓ (Σχ. 85). Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ τέμνει τις παράλληλες, θα ἔχουμε $\hat{\Delta} \hat{A} B = \hat{B}$ και

ομοίως $\hat{E} \hat{A} \Gamma = \hat{\Gamma}$, ὁπότε $\hat{\Delta} \hat{A} B + \hat{E} \hat{A} \Gamma = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

ἢ $\hat{\Delta} \hat{A} B + \hat{B} \hat{A} \Gamma + \hat{E} \hat{A} \Gamma = 2 \text{ ὀρθές} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}$.

Εἶναι προφανές ὅτι τόσο για την ἀπόδειξη του Εὐκλείδη ὅσο και την ἀπόδειξη των Πυθαγορείων απαιτεῖται το 5^ο αἴτημα. Ἀλλὰ και ἀντιστρόφως, ἀν ἰσχύει ἡ πρόταση 32, τότε ἰσχύει και το 5^ο αἴτημα.

Πολλοὶ σχολιαστὲς ἔχουν ἐκφράσει την ἀποψη ὅτι ἡ ἀπόδειξη των Πυθαγορείων ἔχει ἐντονα διαισθητικά στοιχεῖα, ἐνὼ περισσότερο ἀυστηρή και ἀπὸ την ἀπόδειξη του Εὐκλείδη εἶναι ἡ παρακάτω ἀπόδειξη που ἀναφέρει ο Πρόκλος:



Σχήμα 86

Προεκτείνουμε την ΒΓ μέχρι το σημείο Ε και ἔστω σημείο Ζ του τμήματος ΒΓ (Σχ. 86). Φέρουμε $Z\Delta \parallel AB$.

Τότε $\hat{AZ}\Gamma = \hat{AZ}\Delta + \hat{\Delta Z}\Gamma = \hat{A}_1 + \hat{B}$. Αλλά $\hat{AZB} = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma}$ ως εξωτερική του τριγώνου $AZ\Gamma$.

Άρα $\hat{AZB} + \hat{AZ}\Gamma = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές.

Ο Βυζαντινός σχολιαστής Ευτόκιος, [75], στα σχόλιά του στα "Κωνικά" του Απολλώνιου αναφέρει ότι ο ιστορικός Γεμίνος (4^{ος} π.Χ. αιώνας) στο έκτο βιβλίο του έργου "Ιστορία των Μαθηματικών", γράφει ότι το θεώρημα του Πυθαγόρα ήταν γνωστό στους "αρχαίους" (από τους οποίους και βρέθηκε).

Ο Heath αναφερόμενος στο εδάφιο αυτό του Ευτόκιου, επισημαίνει ότι οι "αρχαίοι" μάλλον θα πρέπει να ήταν ο Θαλής.

Μια νύξη γι' αυτό γίνεται στο βιβλίο "Σύμμικτα ύπομνηματα" της ιστορικού Παμφίλης από την Επίδανδρο (1^{ος} μ. Χ αιώνας), που αναφέρεται στο γεγονός ότι ο Θαλής ήταν αυτός που μπόρεσε να εγγράψει ορθογώνιο τρίγωνο σε κύκλο και για το λόγο αυτό θυσίασε ένα βόδι. Συνδυάζοντας τις πληροφορίες του Διογένη του Λαέρτιου και της Παμφίλης συμπεραίνουμε ότι ο Θαλής θα πρέπει εύκολα να υπολόγισε το άθροισμα των γωνιών ενός ισοπλεύρου, καθώς και ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Το ότι το θεώρημα αυτό ήταν γνωστό πριν το συμπεριλάβει ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία*, προκύπτει από το γεγονός ότι ο Αριστοτέλης το αναφέρει σε αρκετά βιβλία του. Μάλιστα ο Heath στο βιβλίο του για τον Αριστοτέλη (σελ. 217) γράφει ότι ο Αριστοτέλης θα πρέπει να είχε κατά νουν την απόδειξη που υπάρχει στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Έτσι στο βιβλίο του "Αναλυτικά Ύστερα" (Α 85β 5-8) αναφέρει ότι το άθροισμα των γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές. Αυτό ισχύει όχι μόνο για το ισοσκελές τρίγωνο, αλλά για κάθε τρίγωνο. Αλλά και στα "Μετά τα Φυσικά" υπάρχει αναφορά του Αριστοτέλη στην πρόταση 32.

Σε διάφορους κώδικες υπάρχουν και γενικεύσεις της πρότασης 32, που αναφέρονται και από τον Πρόκλο.

Οι προτάσεις αυτές είναι:

- (α) *Το άθροισμα των (εσωτερικών) γωνιών (κυρτού) ν-γωνου είναι ίσο με 2(ν-2) ορθές.*
- (β) *Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γωνου είναι ίσο με 4 ορθές.*

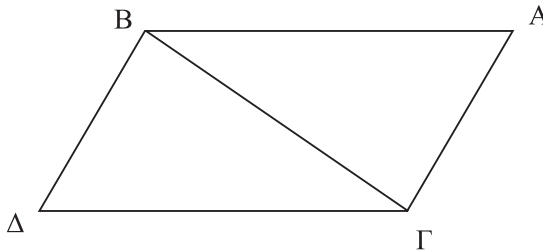
Οι προτάσεις αυτές είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσες για τη σύγχρονη Γεωμετρία και εκφράζουν δυο "αναλλοίωτες", που είναι το άθροισμα των εσωτερικών και το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ν-γώνου.

Πρόταση 33 (I. 33)

Τα τμήματα που συνδέουν τα άκρα δύο ίσων παράλληλων τμημάτων προς το ίδιο μέρος, είναι ίσα και παράλληλα.

Απόδειξη

Έστω $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = \Gamma\Delta$. Θα αποδείξουμε ότι $A\Gamma \parallel B\Delta$ και $A\Gamma = B\Delta$ (Σχ. 87).



Σχήμα 87

Φέρουμε την $B\Gamma$, που τέμνει τις AB , $\Gamma\Delta$ στα B , Γ . Τότε $\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}\Gamma B$. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma B$ έχουν $AB = \Delta\Gamma$, $B\Gamma = B\Gamma$, $\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}\Gamma\Delta$. Άρα είναι ίσα και επομένως $A\Gamma = B\Delta$ και $\hat{B}\Gamma A = \hat{\Gamma}\Delta A$.

Τότε όμως θα είναι $A\Gamma \parallel B\Delta$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Ο Πρόκλος θεωρεί την πρόταση 33 πολύ σημαντική για τη θεωρία των παραλλήλων ευθειών και των παραλληλογράμμων.

Διάφοροι σχολιαστές εφιστούν την προσοχή στη φράση "προς το ίδιο μέρος" γράφοντας ότι ο Ευκλείδης με τη φράση "προς το ίδιο μέρος" θεωρεί τις πλευρές που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο (μέρος) της πλευράς και τότε σχηματίζεται παραλληλόγραμμο, ενώ αν τα ίσα τμήματα βρίσκονται εκατέρωθεν της πλευράς δε σχηματίζεται παραλληλόγραμμο.

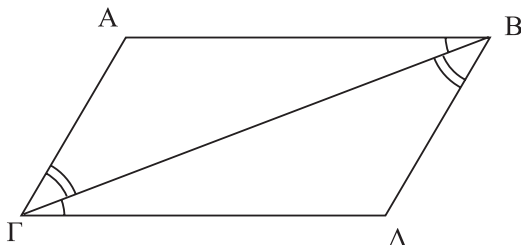
Πρόταση 34 (I. 34)

Οι απέναντι πλευρές και γωνίες των παραλληλογράμμων είναι ίσες και οι διαγώνιες το διαιρούν σε ίσα μέρη.

Απόδειξη

Έστω παραλληλογράμμο ΑΓΔΒ και η διαγώνιος ΒΓ (Σχ. 88). Θα αποδείξουμε ότι

$$\hat{A} = \hat{\Delta}, AB = \Gamma\Delta, A\Gamma = B\Delta, \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ και } AB\Gamma = \Delta B\Gamma.$$



Σχήμα 88

Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$, θα είναι $\hat{AB}\Gamma = \hat{B}\Gamma\Delta$ και αφού $A\Gamma \parallel B\Delta$, θα είναι $\hat{A}\Gamma B = \hat{\Gamma B\Delta}$. Επίσης αφού $B\Gamma = B\Gamma$, τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα, άρα $AB = \Gamma\Delta$, $A\Gamma = B\Delta$, $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Τέλος, αφού $\hat{AB}\Gamma = \hat{B}\Gamma\Delta$ και $\hat{\Delta B\Gamma} = \hat{A\Gamma B}$ τότε και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
 ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Στο Βατικανό κώδικα διαβάζουμε και διάφορες άλλες προτάσεις, που έχουν σχέση με τα παραλληλόγραμμα και τα στοιχεία τους, καθώς και τα διάφορα είδη παραλληλογράμμων.

Παρατηρούμε ότι ο Ευκλείδης αναφέρει μια πρόταση για τα παραλληλόγραμμα, χωρίς όμως προηγουμένως να έχει ορίσει την έννοια "παραλληλόγραμμο".

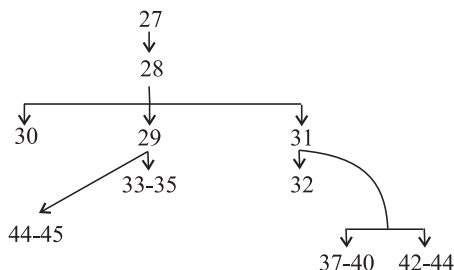
Παρατηρούμε επίσης ότι η πρόταση 34 διαφέρει στις διάφορες εκδόσεις των *Στοιχείων*. Σε άλλες αναφέρεται ότι η ΒΓ διαιρεί το παραλληλόγραμμο χωρίο σε δύο ίσα μέρη και σε άλλες αναφέρεται ότι η διαγώνιος ΒΓ διαιρεί το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα μέρη (τρίγωνα).

Π.χ. ο Heiberg αναφέρεται σε παραλληλόγραμμο χωρίο. Το ίδιο και οι Σταμάτης, Heath κ.ά. Αντίθετα οι M. Simon, G. Mugler κ.ά. αναφέρονται σε παραλληλόγραμμο.

Εμείς θα υιοθετήσουμε τη δεύτερη άποψη, κυρίως γιατί όλοι οι μελετητές του Ευκλείδη συμφωνούν ότι το τρίτο μέρος που αναφέρεται στα εμβαδά είναι οι προτάσεις 35 - 48.

Πάντως, ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την πρόταση *αν $AB\Gamma = \Delta EZ$, τότε $(AB\Gamma) = (\Delta EZ)$, δηλαδή τα ίσα τρίγωνα έχουν και ίσα εμβαδά.*

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι εφαρμογές της πρότασης 27, η οποία εμπλέκεται σε μια σειρά προτάσεων του Βιβλίου Ι:



7. Η θεωρία των εμβαδών

Το μέρος των *Στοιχείων* που περιλαμβάνει τις προτάσεις Ι. 35 έως και ΙΙ.14 αποτελεί αυτό που συνήθως ονομάζουμε "*Ευκλείδεια θεωρία των εμβαδών*".

Με την πρόταση 35 εισάγεται η έννοια του *περιεχομένου ενός σχήματος*, δηλαδή αυτού που εμείς ονομάζουμε *εμβαδόν*.

Όπως θα διαπιστώσουμε, η "*Θεωρία των εμβαδών*" του Ευκλείδη είναι πολύ υψηλού επιπέδου και δεν έχει τίποτε κοινό με την έννοια του εμβαδού όπως αυτή ήταν γνωστή μέχρι την εποχή του. Κατά την άποψή μας, ο Ευκλείδης έκρινε ότι η έννοια του εμβαδού ήταν πάρα πολύ γνωστή, είχε μελετηθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα, επομένως δεν υπήρχε λόγος να την παρουσιάσει με τον ίδιο μετρικό τρόπο. Γι' αυτό την αντιμετωπίζει διαφορετικά, θέτοντας έτσι τις βάσεις για μια σύγχρονη και διαχρονική θεωρία, της οποίας οι βασικές έννοιες και προτάσεις αποτελούν τα θεμέλια και της σύγχρονης θεωρίας όχι μόνο των εμβαδών και των όγκων, αλλά και της γεωμετρικής θεωρίας του μέτρου (*measure theory*).

Ίσως επειδή πίστευε ότι ήταν πολύ γνωστοί, ο Ευκλείδης παρέλειψε να δώσει τους παρακάτω ορισμούς:

- (α) Τι είναι εμβαδόν επίπεδου ευθύγραμμου σχήματος.
- (β) Τι ονομάζουμε ισότητα εμβαδών.

Επίσης, δεν όρισε τις πράξεις μεταξύ των εμβαδών ευθυγράμμων σχημάτων, ούτε απέδειξε κάποια από τις παρακάτω ιδιότητες των εμβადών, τις οποίες όμως χρησιμοποιεί πολλές φορές στα *Στοιχεία*:

1. *Δύο ίσα σχήματα είναι ισεμβαδικά.*
2. *Το άθροισμα ισεμβαδικών σχημάτων ορίζει ισεμβαδικά σχήματα.*
3. *Η διαφορά δύο ισεμβαδικών σχημάτων ορίζει ισεμβαδικά σχήματα.*

Οι τρεις αυτές ιδιότητες χρησιμοποιήθηκαν στην πρόταση 35.

4. *Τα μισά ισεμβαδικών σχημάτων είναι ισεμβαδικά σχήματα.*

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε στην πρόταση 37.

5. *Το εμβαδόν σχήματος είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν μέρους του σχήματος.*

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε στην πρόταση 39.

6. *Δύο ισεμβαδικά τετράγωνα έχουν ίσες πλευρές.*

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε στην πρόταση 48.

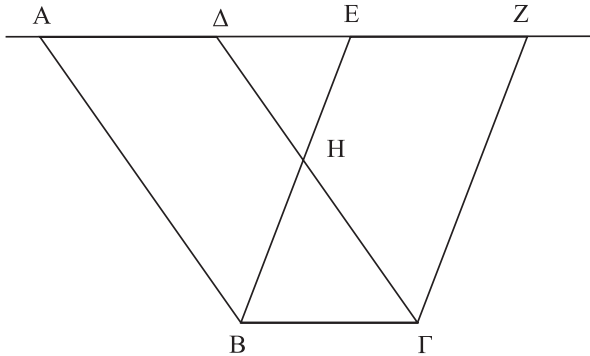
Στις περισσότερες σύγχρονες αξιωματικές θεωρίες η έννοια της ισότητας των εμβαδών θεωρείται βασική και οι παραπάνω προτάσεις αξιώματα.

Πρόταση 35 (I. 35)

Τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, έχουν περιεχόμενα (εμβαδά) ίσα.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ παραλληλόγραμμα με κοινή βάση ΒΓ, που περιέχονται μεταξύ των παραλλήλων ΒΓ, ΑΔΕΖ (Σχ. 89).



Σχήμα 89

Θα αποδείξουμε ότι τα παραλληλόγραμμα έχουν ίσα εμβαδά.

Επειδή $AD = BG$ και $EZ = BG$, θα είναι $AD = EZ$, οπότε $AE = AZ$.

Ακόμα $AB = DG$ και $\hat{EAB} = \hat{EDG}$.

Ωστε τα τρίγωνα EAB , DGZ είναι ίσα.

Άρα $(EAB) = (DGZ)$ και $(EAB) - (EDH) = (DGZ) - (DEH)$ ή $(ADHB) = (EHGZ)$ και $(ADHB) + (HBG) = (EHGZ) + (HBG)$ ή $(ABGD) = (EBGZ)$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Όπως αναφέραμε, ο Ευκλείδης πουθενά στο κείμενό του δεν αναφέρει την λέξη *εμβαδό*, αν και η λέξη αυτή ήταν τότε γνωστή. Αλλά αντικαθιστά τη λέξη αυτή με τον όρο "*περιεχόμενο*", για το οποίο όμως δε δίνει ορισμό, ούτε ορίζει την ισότητα και τις ιδιότητές του, αν και τις χρησιμοποιεί στα *Στοιχεία*.

Π.χ. στην I.35 χρησιμοποιεί τις προτάσεις:

Αν $\Phi = \Sigma$, τότε $(\Phi) = (\Sigma)$, όπου Φ, Σ τετράπλευρα και

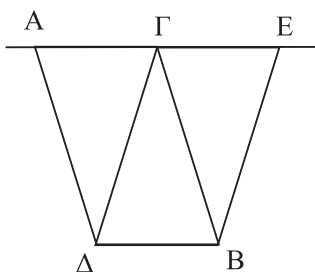
Αν $\Phi = \Sigma$, τότε $\Phi \pm F = \Sigma \pm F$ κ.ά.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ακόμα, ότι στον Ευκλείδη ορίζεται μόνο η ισότητα τμημάτων και τριγώνων, ενώ εδώ έχουμε και ισότητα τετραπλεύρων.

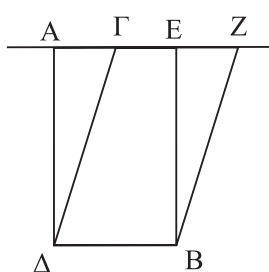
Από την πρόταση 35 και την απόδειξή της, αβίαστα προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε έναν ορισμό για τα ισεμβαδικά σχήματα που είναι σύγχρονος και σήμερα.

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι και για την πρόταση αυτή υπάρχουν 3 περιπτώσεις (όπως δείχνουν και τα σχήματα 89, 90, 91).

Προφανώς όμως, η απόδειξη της πρότασης 35 στις περιπτώσεις αυτές είναι απλούστερη από την απόδειξη των *Στοιχείων*. Όπως έχουμε αναφέρει, ο Ευκλείδης ακολουθούσε πάγια την τακτική αυτή.



Σχήμα 90



Σχήμα 91

Το θεώρημα αυτό είναι σημαντικό, γιατί περιέχει τις βασικές έννοιες και αρχές μιας θεωρίας που φαίνεται πως γνώριζε ο Αρχιμήδης και που έμελε να απασχολήσει τους μαθηματικούς του 19^{ου} και των αρχών του 20^{ου} αιώνα.

Πράγματι, εδώ έχουμε τις απαρχές της *θεωρίας των ισοδιαχωρισίμων σχημάτων* (divisibly - equal, zerlegungs leich). Δηλαδή, ορίζουμε ότι δύο επίπεδα σχήματα είναι ισοδιαχωρίσιμα, αν αυτά διαιρούνται σε πεπερασμένο αριθμό ίσων σχημάτων.

Για τα ισοδιαχωρίσιμα σχήματα ισχύει το επόμενο θεώρημα F. Bolyai – A. Gerwin [20]:

Αν δύο επίπεδα σχήματα είναι ισοδιαχωρίσιμα, είναι ισοεμβαδικά και αντιστρόφως.

Το θεώρημα αυτό (το οποίο δεν ισχύει στο χώρο), ήταν γνωστό στον Αρχιμήδη, όπως προκύπτει από το έργο του "*Στομάχιον*".

Στον Πρόκλο διαβάζουμε ότι η πρόταση 35 καθώς και η ανάλογή της για τρίγωνα με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος είναι θεώρημα **τόπου** (τοπικό θεώρημα) και ακόμα είναι ένα από τα παράδοξα θεωρήματα των Μαθηματικών, αφού σε πολλούς φαίνεται παράξενο πώς είναι δυνατό ένα παραλληλόγραμμο, του οποίου μόνο οι βάσεις μένουν σταθερές και

κινούνται σε δύο παράλληλες ευθείες, ενώ οι άλλες πλευρές του μεταβάλλονται, να έχουν σταθερό εμβαδόν. Στα σχόλια του Βατικανού κώδικα αναφέρεται ότι: η πρόταση 35 αποτελεί εκ πρώτης όψεως ένα παράδοξο, αφού όσο μακριά και να πάρουμε το ΕΖ (Σχ. 89), το εμβαδόν του παραλληλογράμμου παραμένει σταθερό.

Εξάλλου, στο Βατικανό κώδικα γίνεται λόγος και για ισοπεριμετρικά θεωρήματα, δηλαδή θεωρήματα που έχουν σχέση με το πρόβλημα. Π.χ. διαβάζουμε:

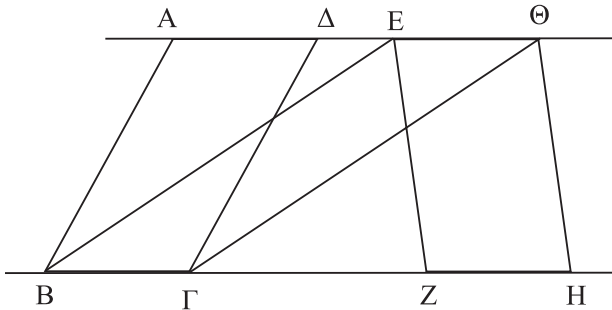
"Από τα δοθέντα επίπεδα σχήματα της αυτής περιμέτρου να προσδιορίσετε εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν".

Πρόταση 36 (Ι. 36)

Παραλληλόγραμμα που έχουν ίσες βάσεις και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Απόδειξη

Έστω τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ με ίσες βάσεις ΒΓ = ΖΗ, που περιέχονται μεταξύ των παραλλήλων ΒΗ, ΑΘ (Σχ. 92).



Σχήμα 92

Θα αποδείξουμε ότι έχουν το ίδιο εμβαδόν. Φέρνουμε τις ΒΕ, ΓΘ. Επειδή ΖΗ = ΕΘ, θα είναι ΒΓ = ΕΘ. Και αφού ΕΘ // ΒΓ, τότε (πρόταση 33) το ΒΕΘΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Τότε όμως (πρόταση 35), $(ΑΒΓΔ) = (ΒΓΘΕ)$ και ομοίως $(ΒΓΘΕ) = (ΕΖΗΘ)$. Οπότε $(ΑΒΓΔ) = (ΕΖΗΘ)$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Σε διάφορους κώδικες γίνεται μνεία της ύπαρξης και άλλων περιπτώσεων σχετικά με τις βάσεις, δηλαδή είτε οι βάσεις ταυτίζονται, είτε έχουν κοινό μέρος, είτε η μία βρίσκεται έξω από την άλλη τα παραλληλόγραμμα είναι ισοδύναμα.

Την ίδια παρατήρηση κάνει και ο Πρόκλος.

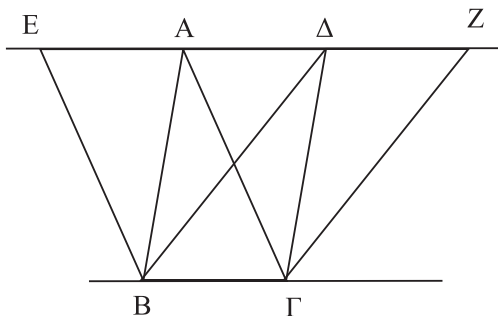
Πρόταση 37 (I. 37)

Τα τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ με κοινή βάση $B\Gamma$ που περιέχονται μεταξύ των παραλλήλων EZ , $B\Gamma$ (Σχ. 93).

Θα αποδείξουμε ότι $(AB\Gamma) = (\Delta B\Gamma)$.



Σχήμα 93

Προεκτείνουμε εκατέρωθεν την $A\Delta$ και φέρουμε $BE \parallel A\Gamma$, $\Gamma Z \parallel B\Delta$.

Τότε τα $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμα και $(EB\Gamma A) = (\Delta B\Gamma Z)$, οπότε και (πρόταση 34) $(AB\Gamma) = (\Delta B\Gamma)$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Στον κώδικα της Βιέννης διαβάζουμε: "Η πρόταση 37 αναφέρεται στη θέση σχήματος και είναι γενικότερη. Π.χ. εφαρμόζεται είτε σε τρίγωνα, είτε σε παραλληλόγραμμα."

Από την πρόταση 37 προκύπτει ένα πολύ χρήσιμο στη θεωρία των εμβαδών θεώρημα:

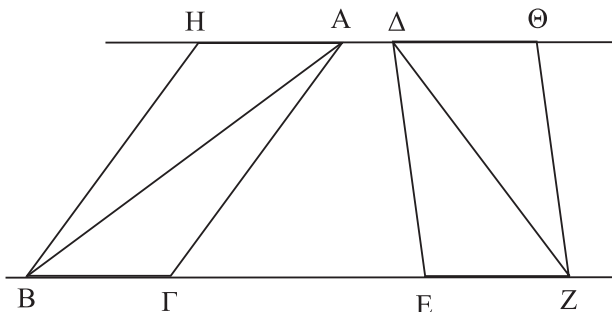
Κάθε διάμεσος ενός τριγώνου το διαιρεί σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

Πρόταση 38 (I. 38)

Τρίγωνα με ίσες βάσεις που βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων έχουν εμβαδά ίσα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ με ίσες βάσεις $B\Gamma = EZ$, που περιέχονται στις παράλληλες AD , BZ (Σχ. 94). Θα αποδείξουμε ότι $(AB\Gamma) = (\Delta EZ)$.



Σχήμα 94

Προεκτείνουμε εκατέρωθεν την AD και φέρουμε $BH \parallel A\Gamma$, $Z\Theta \parallel \Delta E$, που τέμνουν την AD στα H , Θ . Τα $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ είναι παραλληλόγραμμα με ίσες βάσεις $B\Gamma = EZ$ και επομένως (πρόταση 36) $(AB\Gamma H) = (\Delta EZ\Theta)$, οπότε

$$\frac{1}{2} (AB\Gamma H) = \frac{1}{2} (\Delta EZ\Theta) \text{ ή } (AB\Gamma) = (\Delta EZ).$$

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Σε διάφορους κώδικες διαβάζουμε ότι και η πρόταση αυτή είναι σχετική με τη θέση και εφαρμόζεται γενικότερα σε τρίγωνα και παραλληλόγραμμα, αλλά και σε κύκλους και κώνους και κυλίνδρους και όμοια στερεά σχήματα.

Τη διαπίστωση για τις πολλές περιπτώσεις του θεωρήματος αυτού κάνει και ο Πρόκλος.

Ο Ήρων ο Αλεξανδρινός στα σχόλιά του στα *Στοιχεία*, όπως μεταφράστηκαν από τον Άραβα al-Nayrizi [39], αναφέρει ένα ενδιαφέρον θεώρημα που χρησιμοποιείται ευρύτατα στη σύγχρονη Γεωμετρία, έχει σχέση με τα εμβαδά δυο τριγώνων και το παρουσιάσαμε ήδη στα σχόλια της πρότασης 24.

Πρόταση 39 (I. 39)

Αν δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά και την ίδια βάση, βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της βάσης, τότε περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.

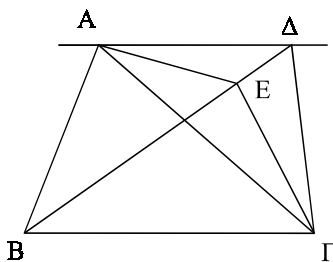
Απόδειξη

Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ με την ίδια βάση $B\Gamma$, που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$ (Σχ. 95).

Αν $(AB\Gamma) = (\Delta B\Gamma)$, θα απόδειξουμε ότι $A\Delta // B\Gamma$.

Αν υποθέσουμε ότι η $A\Delta$ δεν είναι παράλληλη στην $B\Gamma$ και φέρουμε $AE // B\Gamma$, τότε $(AB\Gamma) = (BE\Gamma) = (\Delta B\Gamma)$, που είναι άτοπο, αφού το $EB\Gamma$ περιέχεται στο $\Delta B\Gamma$.

ὁ.ξ.δ.



Σχήμα 95

Σχόλια

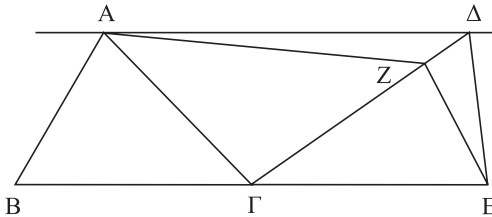
Η πρόταση 39 είναι "μερικώς αντίστροφη" της πρότασης 37, αφού στην υπόθεση της 39 έχουμε την επιπλέον συνθήκη ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$.

Πρόταση 40 (I. 40)

Δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά και ίσες βάσεις που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος των βάσεων, περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ με $B\Gamma = \Gamma E$, $(AB\Gamma) = (\Delta\Gamma E)$ (Σχ. 96).
Θα αποδείξουμε ότι $A\Delta \parallel BE$.



Σχήμα 96

Αν αυτό δε συμβαίνει και φέρουμε $AZ \parallel BE$, τότε (πρόταση 36) $(AB\Gamma) = (Z\Gamma E) = (\Delta\Gamma E)$, που είναι άτοπο (κοινή έννοια 1), αφού το $Z\Gamma E$ περιέχεται στο $\Delta\Gamma E$.

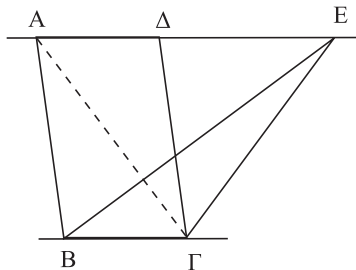
ὁ.ξ.δ.

Πρόταση 41 (I. 41)

Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει την ίδια βάση με τρίγωνο και περιέχεται μεταξύ των αυτών παραλλήλων, τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από αυτό του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω ότι το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και το τρίγωνο $EB\Gamma$ με $AE \parallel B\Gamma$ (Σχ. 97).



Σχήμα 97

Θα αποδείξουμε ότι $(AB\Gamma\Delta) = 2 (EB\Gamma)$.

Φέρνουμε την $A\Gamma$, οπότε (πρόταση 37) θα είναι $(AB\Gamma) = (EB\Gamma)$ ή

$$\frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta) = (EB\Gamma).$$

ὁ.ξ.δ.

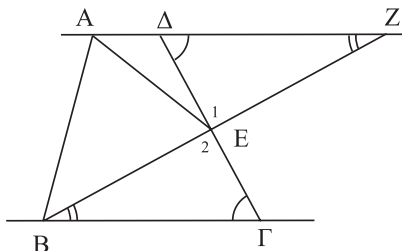
Σχόλια

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι και η πρόταση 41 είναι ένα τοπικό θεώρημα.

Ακολουθώντας ο Πρόκλος επιχειρεί για πρακτικούς λόγους (*γυμνασίας ἔνεκα*) να συσχετίσει το εμβαδόν τριγώνου όχι με το εμβαδόν παραλληλογράμμου, αλλά τραπεζίου και αποδεικνύει την πρόταση:

Αν ένα τρίγωνο προκύπτει όταν συνδέσουμε τα άκρα μιας από τις μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου με το μέσον της άλλης, τότε το εμβαδόν του είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τραπεζίου.

Πράγματι, έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο και E το μέσο της $B\Gamma$ (Σχ. 98). Θα αποδείξουμε ότι $2(ABE) = (AB\Gamma\Delta)$.



Σχήμα 98

Προεκτείνουμε την BE που τέμνει την προέκταση της AD στο Z . Τα τρίγωνα ΔEZ , $BE\Gamma$ είναι ίσα, διότι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $\hat{B} = \hat{Z}$, $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ και $\Delta E = E\Gamma$.

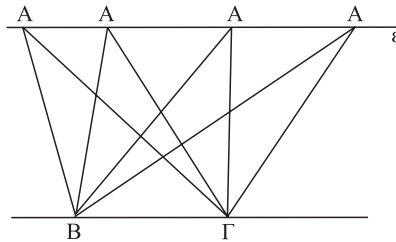
Άρα είναι ίσα και $(\Delta EZ) = (BE\Gamma)$.

Οπότε $(AB\Gamma\Delta) = (ABE\Delta) + (BE\Gamma) = (ABE\Delta) + (\Delta EZ) = (ABZ)$.

Τότε όμως (πρόταση 38) $(ABE) = (AEZ)$,

άρα $2(ABE) = (AB\Gamma\Delta)$.

Με σύγχρονη ορολογία θα λέγαμε ότι η πρόταση 41 εκφράζει μιαν "*αναλλοίωτη*", δηλαδή το γεγονός ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ με σταθερή βάση $B\Gamma$ και κορυφή A που κινείται επί ευθείας ε παραλλήλως στην $B\Gamma$ έχουν το ίδιο σταθερό εμβαδό (Σχ.99).



Σχήμα 99

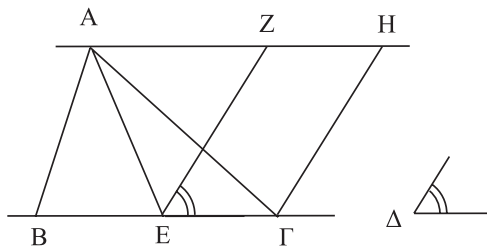
Για το λόγο αυτό η πρόταση 41 αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τη θεωρία των εμβαδών που υπάρχει στα *Στοιχεία*. Σημειωτέον ότι στη θεωρία αυτή δεν υπάρχει τύπος εμβαδού για τα σχήματα, που θα ήταν εύκολο να επιτευχθεί με τη βοήθεια της πρότασης 41, αν ο Ευκλείδης ενδιαφέρονταν για έναν τέτοιο τύπο.

Πρόταση 42 (I. 42)

Δίνεται τρίγωνο και μία γωνία. Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το τρίγωνο, του οποίου μια γωνία είναι ίση με τη δοθείσα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και γωνία $\hat{\Delta}$ (Σχ. 100). Βρίσκουμε το μέσο E (πρόταση 10) της $B\Gamma$, φέρουμε την AE και κατασκευάζουμε γωνία $\hat{ZEG}$ με κορυφή το E και πλευρά την EG , ίση με τη $\hat{\Delta}$. Από το A φέρουμε $AZ \parallel B\Gamma$ και από το Γ φέρουμε $\Gamma H \parallel EZ$.



Σχήμα 100

Το $EZH\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και $2(AE\Gamma) = (EZH\Gamma)$ (πρόταση 41). Όμως $(ABE) = (AE\Gamma)$ (πρόταση 38) άρα $2(AE\Gamma) = (AB\Gamma)$.

Επομένως $(AB\Gamma) = (EZH\Gamma)$.

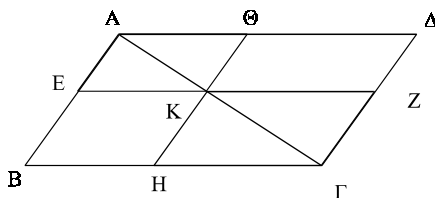
ὁ.ἔ.π.

Οι προτάσεις 41 και 42 είναι απλά πορίσματα προτάσεων και έχουν σχέση με τις ιδιότητες που έχουν οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου, δηλαδή να διαιρούν τα παραλληλόγραμμα σε δύο ίσα τρίγωνα.

Πρόταση 43 (I. 43)

Κάθε παραλληλόγραμμα τα συμπληρώματα¹ ως προς μια διαγώνιο έχουν ίσα εμβαδά.

Απόδειξη



Σχήμα 101

Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμα και $ΑΓ$ διαγώνιος, από σημείο K της οποίας φέρουμε ευθείες παράλληλες στις πλευρές του (Σχ. 101). Θα αποδείξουμε ότι $(EBHK) = (\Theta KZ\Delta)$.

Η διαγώνιος $ΑΓ$ διαιρεί το $AB\Gamma\Delta$ σε ίσα τρίγωνα, δηλαδή $(AB\Gamma) = (ΑΓ\Delta)$. Επίσης, αφού $ΑΕΚ\Theta$, $ΚΗΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμα, θα ισχύει $(ΑΕΚ) = (Α\Theta Κ)$ και $(ΚΗΓ) = (ΚΖΓ)$ οπότε:

$(AB\Gamma) - (ΑΕΚ) - (ΚΗΓ) = (ΑΓ\Delta) - (Α\Theta Κ) - (ΚΖΓ)$ ή $(EBHK) = (\Theta KZ\Delta)$.

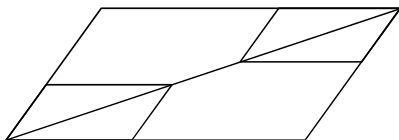
ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

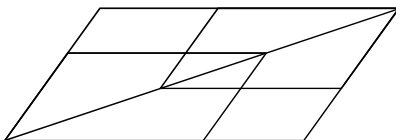
Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την έννοια "συμπληρωματικό" χωρίς να την έχει ορίσει προηγουμένως. Όπως όμως παρατηρεί ο Πρόκλος στα σχόλιά του, αυτό προκύπτει από τα πράγματα, αφού είναι προφανές τι εννοεί ο Ευκλείδης. Στα σχόλια του κώδικα της Φλωρεντίας διαβάζουμε:

¹ Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη λέξη *παραπλήρωμα*.

"Νῦν πρῶτον ἐμνήσθη τοῦ παραπληρώματος ἐν τῷ μγ' θεωρήματι, τό δέ ὄνομα τῶν παραπληρωμάτων ἐπ' αὐτοῦ τοῦ πράγματος ἔλαβεν ὁ στοιχειωτής ὥς καί τούτων μετὰ τῶν δύο παραλληλογράμμων συμπληρούντων ὅλον τό περιέχον ἀμφοτέρω παραλληλόγραμμον."



Σχήμα 102



Σχήμα 103

Ο Πρόκλος παρατηρεῖ ἀκόμα ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει καί στήν περίπτωση πού τὰ "συμπληρώματα" δέν εἶναι παραλληλόγραμμα, ἀλλά τραπεζίαι ἢ ἄλλα σχήματα (Σχ. 102, 103).

Ἡ πρόταση 43 ἔχει πολλές ἐφαρμογές σέ προτάσεις τῶν *Στοιχείων* π.χ. I. 44, II. 4, II. 5, II. 6, II. 7, II. 8, VI. 27, VI. 28, VI. 29 κ.ά.

Πρόταση 44 (I. 44)

Να κατασκευασθεῖ παραλληλόγραμμα με δοθείσα πλευρά, μία γωνία δοθείσα καί ἐμβαδόν ἴσο με τὸ ἐμβαδόν δοθέντος τριγώνου.

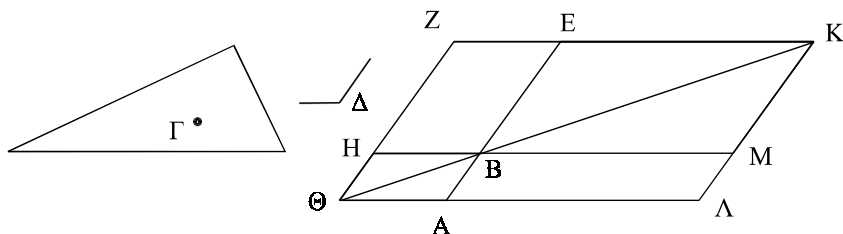
Απόδειξη

Ἐστω τμήμα AB , Γ δοθέν τρίγωνο, $\hat{\Delta}$ δοθείσα γωνία (Σχ. 104).

Προεκτείνουμε τὴν AB καὶ κατασκευάζουμε γωνία $\hat{EBH} = \hat{\Delta}$ καὶ παραλληλόγραμμα $BEZH$ με $(EBHZ) = (\Gamma)$.

Προεκτείνουμε τὶς ZE , ZH , HB καὶ ἀπὸ τὸ A φέρνουμε $A\Theta \parallel BH$. Φέρνουμε τὴν ΘB πού τέμνει τὴν προέκταση τῆς ZE στὸ K καὶ κατασκευάζουμε τὸ παραλληλόγραμμα ΘAKZ . Τότε (πρόταση 42) εἶναι $(EBHZ) = (\Gamma) = (ABM\Lambda)$ καὶ $\hat{EBH} = \hat{ABM}$. Ὅποτε, τὸ παραλληλόγραμμα $ABM\Lambda$ εἶναι τὸ ζητούμενο.

ὁ.ἔ.π.



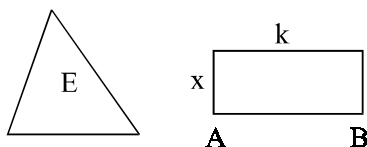
Σχήμα 104

Σχόλια

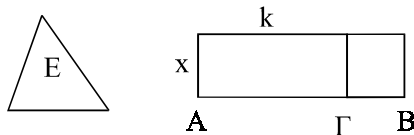
Ο Heath σχολιάζοντας την πρόταση αυτή γράφει ότι είναι μια από τις πιο εντυπωσιακές όλης της Γεωμετρίας, αν μάλιστα λάβουμε υπόψη τη μεγάλη σημασία του αποτελέσματος που παίρνουμε, δηλαδή του μετασχηματισμού ενός παραλληλογράμμου μιας μορφής σε άλλο παραλληλόγραμμο με μια γωνία ίση, εμβαδά ίσα και μια πλευρά δεδομένη, αλλά και την απλότητα των μέσων που χρησιμοποιήθηκαν, δηλαδή την πρόταση 43.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Εύδημος και η οι μαθητές του (οί περί τόν Εϋδημον) απέδιδαν την πρόταση στην "*Πυθαγόρεια Μούσα*" και αναφέρει ότι η ισότητα εμβαδών (*παραβολή*) και η ανισότητα εμβαδών (*υπερβολή* ή *έλλειψη*), στάθηκαν η αφορμή για την ονομασία των αντίστοιχων κωνικών τομών.

Ουσιαστικά εδώ έχουμε μια μέθοδο, τη μέθοδο της σύγκρισης εμβαδών (*παραβολής των χωρίων*). Αναλύοντας τα λεγόμενα του Πρόκλου σε συνδυασμό με την πρόταση 44 έχουμε τα εξής τρία προβλήματα:



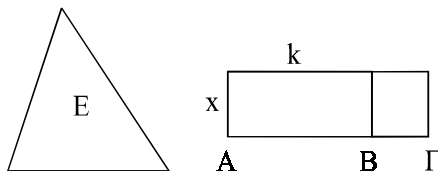
Σχήμα 105



Σχήμα 106

- α) Με πλευρά δοθέν τμήμα να κατασκευασθεί ορθογώνιο ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο $kx = E$ (Σχ. 105).
- β) Πάνω σε δοθέν τμήμα να κατασκευασθεί ορθογώνιο ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο και να περισσεύει και ένα τετράγωνο $kx - x^2 = E$ (έλλειψη) (Σχ. 106).

γ) Πάνω σε δοθέν τμήμα να κατασκευασθεί ορθογώνιο ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο και να λείπει ένα τετράγωνο $kx + x^2 = E$ (υπερβολή) (Σχ. 107).



Σχήμα 107

Όπως αναφέρει ο Πρόκλος, σύμφωνα με τον Εύδημο το Ρόδιο, οι ονομασίες **παραβολή**, **έλλειψη** και **υπερβολή** οφείλονται στις περιπτώσεις (α), (β) και (γ).

Εδώ βέβαια προκύπτει ένα πρόβλημα: Την εποχή του Εύδημου αλλά και του Ευκλείδη, δεν υπήρχαν τα ονόματα **έλλειψη**, **παραβολή**, **υπερβολή** και όταν ο Πρόκλος αναφέρει "*οι περί τον Εύδημον*", όπως παρατηρεί και ο Tannery, εννοεί τους μετά τον Εύδημο ("Ce sont, nous dit-on d' apres Eudeme") [138] αναφερόμενος κυρίως στον Γεμίνιο, ένα σημαντικό ιστορικό, που έγραψε "*Περί της θεωρίας των μαθηματικών επιστημών*" το 70 π.Χ.

Πολλοί μάλιστα (π.χ. Van der Waerden) [150] πιστεύουν ότι ο Πρόκλος δεν είχε υπόψη του το αυθεντικό κείμενο του Εύδημου.

Οπωσδήποτε, η ιστορία του Εύδημου επηρέασε είτε άμεσα είτε έμμεσα μια πλειάδα ιστορικών, όπως προκύπτει από τις πληροφορίες που έχουμε και όπως δείχνει το παρακάτω διάγραμμα του P. H. Michel.[111]

4^{ος} π.Χ. αιώνας

Εύδημος ο Ρόδιος

1^{ος} μ.Χ. αιώνας

Δερκυλίδης

2^{ος} μ.Χ. αιώνας

Θέων ο Σμυρναίος

3^{ος} μ.Χ. αιώνας

Πορφύριος

Σπόρος

Σωσιγένης

Κλήμης

4^{ος} μ.Χ. αιώνας

Πάππος

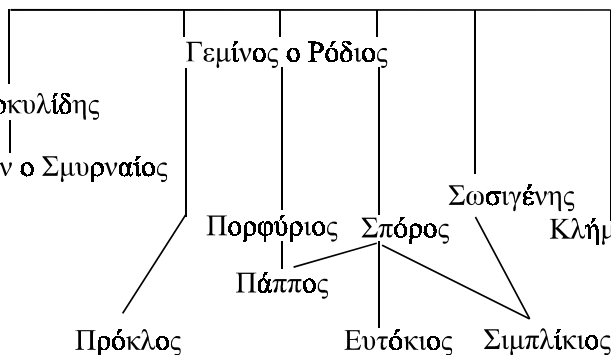
5^{ος} μ.Χ. αιώνας

Πρόκλος

Ευτόκιος

Σιμπλίκιος

6^{ος} μ.Χ. αιώνας



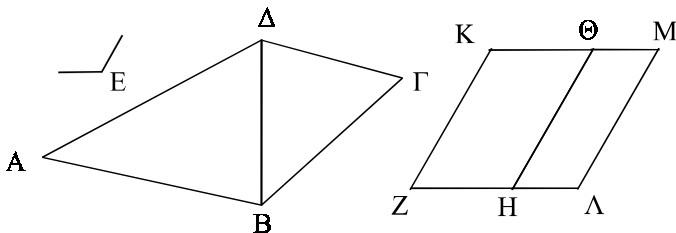
Πρόταση 45 (Ι. 45)

Να κατασκευασθεί ένα παραλληλόγραμμο, του οποίου μια γωνία είναι δοθείσα και είναι ισεμβαδικό με δοθέν πολύγωνο.

Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma\Delta$ το δοθέν τετράπλευρο και $\hat{E}$ η δοθείσα γωνία. Θέλουμε να κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ και μια γωνία ίση με $\hat{E}$ (Σχ. 108).

Φέρνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ και κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο $H\Theta KZ$ με $(AB\Delta) = (H\Theta KZ)$, $\Theta H = B\Delta$, και γωνία $\hat{\Theta KZ} = \hat{E}$ (πρόταση 42). Ας κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο $\Theta H\Lambda M$ με $(\Theta H\Lambda M) = (\Delta\Gamma B)$ και $\hat{M\Theta H} = \hat{E}$ και ΘH γνωστή.



Σχήμα 108

Τότε το παραλληλόγραμμο $KZ\Lambda M$ είναι το ζητούμενο, γιατί $(KZ\Lambda M) = (AB\Gamma\Delta)$ και $\hat{MKZ} = \hat{E}$.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Οι προτάσεις 43 μέχρι 45 είναι εξαιρετικά χρήσιμες για τη θεωρία των εμβαδών και ειδικά του "τετραγωνισμού" ευθυγράμμων σχημάτων, όπως θα δούμε αργότερα, στο βιβλίο II.

Επιπλέον, χρησίμευσαν ώστε οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, κυρίως οι Πυθαγόρειοι, να δημιουργήσουν αυτό που ονομάστηκε "*Γεωμετρική Άλγεβρα*" των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών.

Πρόταση 46 (I. 46)*Να κατασκευασθεί τετράγωνο με πλευρά δοθέν τμήμα.***Απόδειξη**

Έστω AB το δοθέν τμήμα. Θα κατασκευάσουμε τετράγωνο με πλευρά το AB .

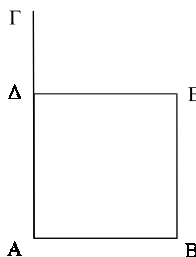
Φέρνουμε από το A ευθεία $AG \perp AB$ (πρόταση 11) και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα $AD = AB$ (πρόταση 2).

Από το D φέρνουμε τη $DE \parallel AB$ και από το σημείο B τη $BE \parallel AG$ (Σχ. 109). Το $ABED$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $EB = AD$, $AB = DE$. Αλλά $AB = AD$ άρα $AB = AD = BE =$

$= ED$, δηλαδή το $ABED$ είναι ρόμβος. Όμως $\hat{A} = 1$ ορθή και

$\hat{ADE} = 1$ ορθή $= \hat{B} = \hat{E}$, δηλαδή το $ABED$ είναι τετράγωνο.

ὁ.ἔ.π.



Σχήμα 109

Σχόλια

Σχολιάζοντας την πρόταση ο Πρόκλος αναφέρει τη διαφορά μεταξύ της λέξης "κατασκευάζω" και "σχεδιάζω". Ακολουθώς αποδεικνύει την πρόταση:

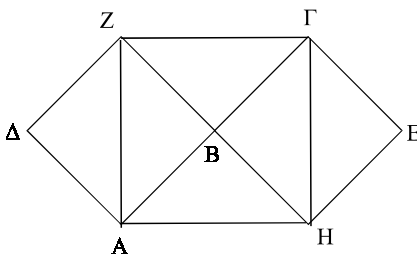
Αν δύο τετράγωνα έχουν την ίδια πλευρά, είναι ίσα και αντιστρόφως.

Το ορθό προκύπτει άμεσα φέροντας μια διαγώνιο των ίσων τετραγώνων. Έστω π.χ. ότι $ABZ\Delta = BHE\Gamma$ (Σχ. 110). Αν φέρουμε τις διαγώνιες AZ , $H\Gamma$ παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta Z$, $HE\Gamma$ είναι ίσα, όπως και τα ABZ , HBG .

Για το αντίστροφο ο Πρόκλος εργάζεται ως εξής:

Τοποθετεί τα τετράγωνα $ABZ\Delta$ και $HBG\Gamma$ έτσι ώστε οι AB , $B\Gamma$ να βρίσκονται επ' ευθείας. Τότε, επειδή

$\hat{ABZ} = \hat{HBG} = 1$ ορθή, και οι BZ , HB θα βρίσκονται επ' ευθείας.



Σχήμα 110

Φέρουμε τις AZ , $Z\Gamma$, $H\Gamma$, HA . Επειδή τα τετράγωνα είναι ίσα, και τα τρίγωνα ABZ , ΓBH είναι ίσα, καθώς και τα $ABZ + ZB\Gamma = \Gamma BH + ZB\Gamma$ ή $AZ\Gamma = HZ\Gamma$.

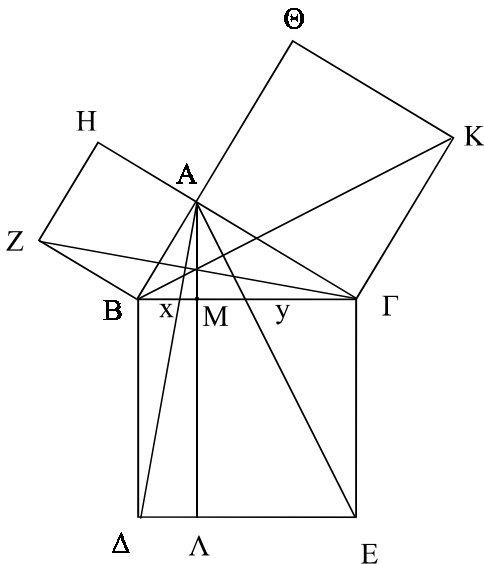
Τότε $(AZ\Gamma) = (HZ\Gamma)$, άρα (πρόταση 39) $Z\Gamma \parallel AH$. Για τον ίδιο λόγο και $AZ \parallel \Gamma H$. Ωστε το $AZ\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο $AZ = \Gamma H$. Τότε όμως τα τρίγωνα ABZ , $H\Gamma B$ είναι ίσα. Άρα $AB = HB$.

Πρόταση 47 (I.47) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που έχουν πλευρές τις κάθετες πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και $\hat{A} = 1$ ορθή. Θα αποδείξουμε ότι $(B\Gamma E\Delta) = (ABZH) + (A\Gamma K\Theta)$ (Σχ.111).



Σχήμα 111

Φέρουμε από το A την $AL \parallel B\Delta$ και τις $A\Delta$, AE , BK , ΓZ .

Επειδή $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 1$ ορθή $= \hat{B}\hat{A}\hat{H}$, τα HA , $A\Gamma$ είναι τμήματα της ίδιας ευθείας, όπως και τα AB , $A\Theta$.

Επειδή $AB = BZ$, $B\Delta = B\Gamma$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma} = 1$ ορθή $+ \hat{B}$, τα τρίγωνα $AB\Delta$, $ZB\Gamma$ είναι ίσα, οπότε $(AB\Delta) = (ZB\Gamma)$ ή

$$(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (B\Delta\Lambda M) = (ZB\Gamma) = \frac{1}{2} (ABZH).$$

$$\text{Ομοίως } (A\Gamma E) = \frac{1}{2} (\Gamma M\Lambda E) = (K\Gamma B) = \frac{1}{2} (A\Gamma K\Theta).$$

$$\text{Οπότε } (B\Delta\Lambda M) + (\Gamma M\Lambda E) = (B\Gamma E\Delta) = (ABZH) + (A\Gamma K\Theta).$$

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Ο al-Nayzizi [39] επισημαίνει ότι ο Ήρων έδειξε ότι οι AL , BZ , $ΓK$ διέρχονται από το ίδιο σημείο και ότι γράφει πως με τη βοήθεια ομοιότητας η απόδειξη είναι εύκολη.

Παρατηρούμε ότι, παρόλο που ούτε ο Heiberg ούτε ο Heath το αναφέρουν, στις προτάσεις 46 και 47 γίνεται χρήση του 4^{ου} αιτήματος για την ισότητα των ορθών γωνιών.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι αν λάβουμε υπόψη τους ιστορικούς των αρχαίων (αναφερόμενος στον Εύδημο), η πρόταση 47 είναι του Πυθαγόρα και μάλιστα λέγεται, ότι ο Πυθαγόρας θυσίασε ένα βόδι για να ευχαριστήσει τους θεούς για την ανακάλυψη: "*Τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαῖα βουλομένων ἀκούοντας τό θεώρημα τοῦτο εἰς Πυθαγόραν ἀναπεμπόντων ἐστὶν εὐρεῖν καὶ βοηθύτην λεγόντων αὐτῶν ἐπὶ τῇ εὐρέσει.*"

Όμως, συνεχίζει ο Πρόκλος, αν και θαυμάζω αυτόν που ανακάλυψε την πρόταση, θαυμάζω περισσότερο τον συγγραφέα των *Στοιχείων*, όχι μόνο γιατί απέδειξε απλούστερα με ένα λαμπρό τρόπο το θεώρημα, αλλά γιατί βρήκε και περισσότερο γενικά θεωρήματα. "*Ἐγὼ δέ θαυμάζω μὲν καὶ τοὺς πρῶτους ἐπιστάντας τῇ τοῦδε τοῦ θεωρήματος ἀληθείᾳ, μείζονος δέ ἄγμαιι τὸν στοιχειωτὴν, οὐ μόνον δι' ἀποδείξεως ἐναργεστάτης τοῦτο κατεδήσετο, ἀλλ' ὅτι καὶ τό καθολικώτερον αὐτοῦ τοῖς ἀνελέγκτοις λόγοις τῆς ἐπιστήμης ἐπίσεν ἐν τῷ ἔκτῳ βιβλίῳ.*"

Δεν υπάρχει ούτε μία αμφισβήτηση από τους αρχαίους συγγραφείς και ιστορικούς για την πατρότητα της πρότασης 47 (του πιο σημαντικού θεωρήματος των Μαθηματικών κατά τη γνώμη σοβαρών ιστορικών). Οι Πρόκλος, Εύδημος, Διογένης ο Λαέρτιος, Πλούταρχος ο Αθηναίος, Αριστοτέλης κ.ά. αναφέρουν τον Πυθαγόρα ως αυτόν που ανακάλυψε και απέδειξε την πρόταση 47. Μαρτυρίες έχουμε και από τον Απολλόδωρο, τον Κικέρωνα κ.ά.

Τον 20^ο αιώνα είχαμε μια σειρά από αμφισβητήσεις του γεγονότος αυτού, με περισσότερο γνωστή την αμφισβήτηση του O. Neugebauer, ο οποίος, με αφορμή τη μελέτη της βαβυλωνιακής πλάκας "*Plimpton 322*", στηριγμένος σε μη επιστημονικές υποθέσεις, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν το Πυθαγόρειο θεώρημα, πράγμα εντελώς ανακριβές, όπως απέδειξε ο Θ. Εξαρχάκος ("*Ιστορία των Μαθηματικών*" Τόμος Ι).

Το 1819 ο Γερμανός μαθηματικός J. W. Müller [12] δημοσίευσε ένα βιβλίο με τις πιο ενδιαφέρουσες αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος. Στην έκδοση του 1821 το βιβλίο περιείχε 32 αποδείξεις, μεταξύ των οποίων και μια του Leonardo da Vinci.

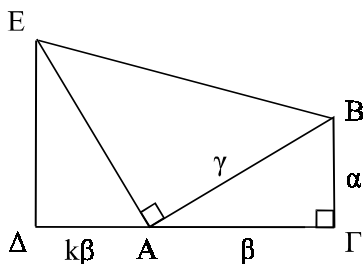
Το 1927 ο Αμερικανός μαθηματικός Elisha Scott Loomis [109] δημοσίευσε ένα βιβλίο με 370 αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος. Σήμερα ο αριθμός των γνωστών αποδείξεων είναι πολύ μεγαλύτερος των 1000 και συνεχώς μεγαλώνει. Για παράδειγμα, μπορούμε να δημιουργούμε συνεχώς αποδείξεις γενικεύοντας παλαιότερες. Μπορούμε π.χ. να γενικεύσουμε την περίφημη απόδειξη που έδωσε ο 20^{ος} πρόεδρος των ΗΠΑ James A. Garfield [105], ο οποίος στην απόδειξή του λαμβάνει τμήμα $\Gamma\Delta = \alpha + \beta$, ενώ εδώ θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $AB = \gamma$, $B\Gamma = \alpha$, $\Gamma A = \beta$ (Σχ. 112) και $AE \perp AB$, $ED = A\Gamma$.

Τότε, αν $k = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = k\beta$ με

$k \in \mathbb{R}^*$, θα έχουμε:

$$\Delta E = \frac{k\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} = \beta \text{ και}$$

$AE = \frac{k\beta\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\alpha} = \gamma$, οπότε από το τραπέζιο $\Delta E B \Gamma$ θα έχουμε:

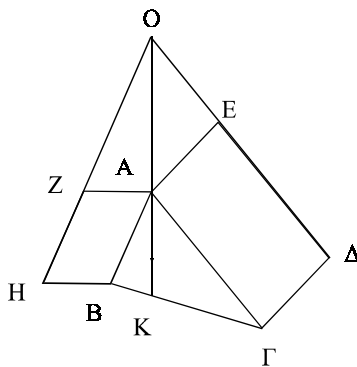


Σχήμα 112

$$(\Delta \epsilon \beta \Gamma) = (\Delta \Delta \epsilon) + (\Delta \epsilon \beta) + (\Delta \beta \Gamma) \Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} \Rightarrow \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Ο Πάππος στη "Συναγωγή" δίνει μιν εξοχη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος. Η γενίκευση του Πάππου έχει ως εξής:

Αν κατασκευάσουμε οποιαδήποτε παραλληλόγραμμα ABHZ, ΑΓΔΕ με βάσεις τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, τότε το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές ΟΑ, ΒΓ (όπου Ο η τομή των ΔΕ, ΖΗ), που σχηματίζουν γωνία ίση με τη γωνία $\hat{A}ΚΓ$ των ΒΓ, ΟΑ (Σχ. 113).



Σχήμα 113

Την πρόταση αυτή του Πάππου περιέλαβε στο βιβλίο του "Elements de Geometrie" (1775) ο A. Clairaut με αποτέλεσμα πολλοί συγγραφείς των αρχών του αιώνα, οι οποίοι δε γνώριζαν το σύγγραμμα του Πάππου αποδίδουν την πρόταση σ' αυτόν.

Είναι χαρακτηριστικό ότι ανάμεσα στις αποδείξεις που παραθέτει ο Loomis δεν υπάρχει τριγωνομετρική, επειδή οι πιο βασικοί τύποι της Τριγωνομετρίας στηρίζονται στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Όπως γράφει χαρακτηριστικά και ο Loomis, "Trigonometry is because the Pythagorean Theorem is".

Πρόταση 48 (I. 48)

Αν σε τρίγωνο, το τετράγωνο μιας πλευράς έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και έχει την ορθή γωνία μεταξύ των δύο πλευρών.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά $B\Gamma$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές AB , $A\Gamma$ (Σχ. 114). Θα αποδείξουμε ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 1$ ορθή.

Φέρουμε $A\Delta \perp A\Gamma$ και παίρνουμε $A\Delta = AB$. Τότε τα τετράγωνα με πλευρές $A\Delta$, AB είναι ίσα. Αν προσθέσουμε σ' αυτά το τετράγωνο με πλευρά την $A\Gamma$, τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις AB και $A\Gamma$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές $A\Delta$ και $A\Gamma$.

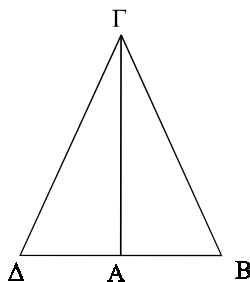
Αλλά, επειδή $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = 1$ ορθή, το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές $A\Delta$ και $A\Gamma$ είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την $\Gamma\Delta$. Άρα $\Gamma\Delta = \Gamma B$. Οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 48 είναι το αντίστροφο θεώρημα του Πυθαγόρειου.

Ο Πρόκλος δίνει μια διαφορετική απόδειξη από αυτή του Ευκλείδη, η οποία αναφέρεται από τον al-Nayrizi ως απόδειξη του Ήρωνα.



Σχήμα 114

Κεφάλαιο 2

ΒΙΒΛΙΟ II

Η Γεωμετρία των ορθογωνίων

1. Εισαγωγή

Το βιβλίο II μαζί με κάποιες προτάσεις του βιβλίου I, το βιβλίο IV, καθώς και μέρος των VI, X και XIII αποτελούν τα λεγόμενα **μετρικά** βιβλία των *Στοιχείων*.

Μια πρώτη ματιά στα *Στοιχεία* δείχνει ότι το βιβλίο II είναι το μικρότερο σε έκταση από όλα τα άλλα. Περιέχει δύο ορισμούς, που αφορούν μάλιστα όχι σε σημαντικά γεωμετρικά αντικείμενα, καθώς και 14 προτάσεις. Ωστόσο είναι εξαιρετικά σημαντικό για πολλούς λόγους.

Το κυριότερο χαρακτηριστικό του βιβλίου αυτού, σε αντίθεση με το βιβλίο I, είναι ότι θεματικά είναι συμπαγές και ομοιογενές. Πράγματι, οι 14 προτάσεις του βιβλίου αναφέρονται σε ένα μόνο θέμα, **τα εμβαδά παραλληλογράμμων** και κυρίως ορθογωνίων ή τετραγώνων. Εξαιρεση ίσως παρουσιάζουν οι προτάσεις 12 και 13, οι οποίες θεωρούνται επεκτάσεις του Πυθαγορείου θεωρήματος. Συγκεκριμένα είναι τα θεωρήματα που δίνουν το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, η οποία βρίσκεται απέναντι από αμβλεία ή οξεία γωνία και αποτελούν καθαρά "γεωμετρικές" μορφές του γενικότερου θεωρήματος του συνημίτονου. Ενώ η πρόταση 14, που αποδίδεται στον Ιππία τον Ηλείο [135], αποτελεί μια βασική κα-

τασκευή και συγκεκριμένα το μετασχηματισμό τυχαίου κυρτού πολυγώνου σε ισοδύναμο τετράγωνο.

Οι πρώτες 10 προτάσεις αποτελούν αυτό που σήμερα λέμε **"Γεωμετρική Άλγεβρα"** των αρχαίων Ελλήνων, δηλαδή αλγεβρικές σχέσεις που αποδεικνύονται γεωμετρικά. Αλλά και η πρόταση 11 είναι σημαντική, αφού σ' αυτήν η διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο εκφράζεται συναρτήσει εμβαδών.

Από τις 10 πρώτες προτάσεις του βιβλίου II προκύπτουν οι παρακάτω ισοδύναμες αλγεβρικές σχέσεις:

$$1) \alpha (x + y + z + \dots) = \alpha x + \alpha y + \alpha z + \dots$$

$$2) (\alpha + \beta) \alpha + (\alpha + \beta) \beta = (\alpha + \beta)^2$$

$$3) (\alpha + \beta) \alpha = \alpha \beta + \alpha^2$$

$$4) (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$5) \alpha\beta + \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta\right)^2 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 = \alpha^2$$

$$6) (2\alpha + \beta)\beta + \alpha^2 = (\alpha + \beta)^2 \quad \text{ή} \quad (\alpha + \beta)(\beta - \alpha) + \alpha^2 = \beta^2,$$

$$7) \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2$$

$$8) 4(\alpha + \beta)\alpha + \beta^2 = \{(\alpha + \beta) + \alpha\}^2 \quad \text{ή} \quad 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$$

$$9) \alpha^2 + \beta^2 = 2 \left\{ \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta\right)^2 \right\} \quad \text{ή} \quad (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$10) (2\alpha + \beta)^2 + \beta^2 = 2\{\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2\} \quad \text{ή} \quad (\alpha + \beta)^2 + (\beta - \alpha)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του βιβλίου II είναι ότι όλες οι προτάσεις αναφέρονται σε ισότητες μεταξύ κάποιων εμβαδών και δεν αναφέρονται ποτέ σε ανισότητες, όπως συμβαίνει σε άλλα βιβλία των Στοιχείων, π.χ. στο βιβλίο I. Βέβαια, από τις ισότητες αυτές μπορούν να προκύψουν και ανισοτικές σχέσεις, πράγμα το οποίο διαπιστώνει και ο Γαλιλαίος στο έργο του *"Διάλογοι σχετικά με δύο νέες επιστήμες"*, όπου και επισημαίνει τον "αριθμητικό" χαρακτήρα του βιβλίου II.

Παρόλο που το μέγεθος του βιβλίου είναι μικρό, εν τούτοις για περισσότερο από 120 χρόνια η φύση και η σημασία του αποτέλεσαν πεδίο σφοδρών αντιθέσεων μεταξύ των ιστορικών των Μαθηματικών.

Η αρχή της διαμάχης ξεκινά το 1882, όταν ο Γάλλος ιστορικός Paul Tannery (1843-1904) δημοσίευσε την εργασία του "*De la solution geometriques des problemes de second degré avant Euclide*" (Περί της γεωμετρικής επίλυσης των δευτεροβάθμιων προβλημάτων πριν από τον Ευκλείδη). Στο άρθρο αυτό ο Tannery εκφράζει την άποψη ότι το βιβλίο II των *Στοιχείων* δεν είναι παρά η Γεωμετρία που ανέπτυξαν οι Πυθαγόρειοι.

Το 1896 ο γνωστός Δανός ιστορικός και ένας από τους πιο γνωστούς γεωμέτρες του 19^{ου} αιώνα, ο H. G. Zeuthen (1839-1920), που είναι και σήμερα γνωστός από την αναλλοίωτη Zeuthen – Segre, συνοψίζοντας διάσπαρτες απόψεις που από το 1880 είχε εκφράσει κυρίως ο Tannery αλλά και διάφοροι άλλοι, διατυπώνει την άποψη ότι οι προτάσεις των βιβλίων II και VI των *Στοιχείων* αποτελούν τη "*Γεωμετρική Άλγεβρα των Ελλήνων*" (*Geometrischen Algebra der Griechen*) [165], που προέρχεται από τους Πυθαγορείους, σύμφωνα με την άποψη του Tannery.

Ο γνωστός Άγγλος μαθηματικός και ιστορικός των Μαθηματικών D. H. Fowler στο βιβλίο "*The Mathematics of Plato's Academy*" [59] που κυκλοφόρησε το 1987, δίνει διαφορετική και κάπως αιρετική άποψη για την "προϊστορία" του βιβλίου II των *Στοιχείων*. Σύμφωνα με τον Fowler, η επιρροή των Πυθαγορείων είναι πολύ μεγαλύτερη στο βιβλίο XIII των *Στοιχείων* και πολλές προτάσεις του βιβλίου II προκύπτουν από μεθόδους του βιβλίου XIII.

Θεωρούμε σημαντικό το γεγονός ότι ο Ευκλείδης ούτε στο βιβλίο I ούτε στο βιβλίο II χρησιμοποιεί για τα εμβαδά αριθμητικές τιμές, αλλά αντιμετωπίζει τις προτάσεις του από καθαρά γεωμετρική σκοπιά. Δηλαδή, προσπαθεί **γεωμετρικά** να εξαγάγει **άλγεβρικές σχέσεις**, με τη βοήθεια των οποίων αντιμετωπίζονται "πρακτικά" προβλήματα, όπως π.χ. λύσεις εξισώσεων, προβλήματα κ.ά.

Σχετικά με το βιβλίο II ο σχολιαστής Αρεταίος αναφέρει ότι πρόκειται για βιβλίο που είναι χρήσιμο στη λύση προβλημάτων ακόμα και της Στερεομετρίας αλλά και της Αστρονομίας.

Είναι λοιπόν φανερός ο χαρακτήρας του βιβλίου. Το βιβλίο παρουσιάζει μια μέθοδο, εκείνη της γεωμετρικής Άλγεβρας, που όπως είδαμε ουσιαστικά εξελίχθηκε στην Άλγεβρα των αρχαίων Ελλήνων.

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι και στα έργα των πρώτων μαθηματικών της Ευρώπης μετά την Αναγέννηση, χρησιμοποιήθηκαν προτάσεις από το Βιβλίο II των *Στοιχείων* για την επίλυση εξισώσεων. Ο G. Cardano, για παράδειγμα, στο έργο του "*Ars Magna*", που γράφτηκε το 1545 και ήταν ένα από τα πρώτα βιβλία της Άλγεβρας στην Ευρώπη, χρησιμοποιεί προτάσεις του βιβλίου II για τη λύση των εξισώσεων.

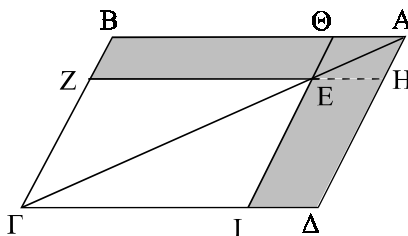
2. Ορισμοί

1. Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέμε ότι περιέχεται μεταξύ των πλευρών μιας ορθής γωνίας του.
2. Από σημείο E της διαγωνίου $ΑΓ$ παραλληλογράμμων $ΑΒΓΔ$ φέρουμε τις παράλληλες EZ, EI προς τις πλευρές $ΑΒ, ΒΓ$ αντίστοιχα. Το γραμμοσκιασμένο μέρος $BZEΙΔΑ$ (Σχ. 1) ονομάζεται γνώμονας. Ομοίως γνώμονας ονομάζεται και το $BΘΕΗΔΓ$.

Σχόλια

α) Ο ορισμός 1 θα μπορούσε να διατυπωθεί και απλούστερα ως εξής:

- 1'. Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ορίζεται από τις πλευρές του.



Σχήμα 1

Ο ορισμός του Ευκλείδη μας λέει ότι το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας των ημιευθειών $ΒΑ, ΒΓ$ (Σχ. 2).



Σχήμα 2

Στο βιβλίο του Βαρλαάμ του μοναχού ο ορισμός 1 αποδίδεται ως εξής:

"Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, του οποίου δίνονται δύο διαδοχικές πλευρές, θεωρείται και αυτό δοσμένο."

Ο ορισμός αυτός του Βαρλαάμ είναι πιο συγγενικός με τον 1' και νομίζουμε ότι αποδίδει καλύτερα το νόημα του ορισμού 1. Άλλωστε, ο Βαρλαάμ έζησε σε μια εποχή όπου τα *Στοιχεία* ήταν επίκαιρα και πιθανόν να είχε υπόψη του και κάποιους σχολιαστές που εμείς σήμερα δεν γνωρίζουμε. Επιπλέον, σε πολλούς κώδικες (π.χ. κώδικα Βατικανού) ο σχολιαστής έχει εκφράσει την ίδια άποψη:

"Απορήσεται τις, διά τί πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπό δύο τῶν τήν ὀρθήν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καί οὐχί πᾶν παραλληλόγραμμον ἀπλῶς, ἐπεὶπερ ἔδοξε λέγεσθαι περιέχειν τὰς δύο πλευράς τοιόνδε τι παραλληλόγραμμον. Λέγομεν οὖν πρὸς τὸν οὕτω ἀπορήσαντα αἰτίαν εἶναι τούτου τήν τῆς γωνίας ὀρθότητα . . ."

Το ίδιο ερώτημα έχει απασχολήσει και τον σχολιαστή του Φλωρεντινού κώδικα που γράφει:

"Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπό δύο τῶν τήν ὀρθήν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν διά τί τεσσάρων αὐτῶν εὐθειῶν τῶν περιεχουσῶν τό παραλληλόγραμμον δύο μόνας ὠνόμασεν; αἱ γάρ τήν ὀρθήν γωνίαν περιέχουσαι δύο μόναι εἰσίν' . . ."

β) Σχετικά με τον όρο *γνώμονας* υπάρχουν διάφορες πληροφορίες και μαρτυρίες για τον ορισμό του και τη σημασία του.

Στο *Λεξικό Σούδα* (Σουΐδα), [13] στο λήμμα *Αναξίμανδρος* διαβάζουμε:

"Αναξίμανδρος Πραξιάδου, Μιλήσιος φιλόσοφος, συγγενής, μαθητής και διάδοχος του Θαλή . . . Εισήγαγε το γνώμονα και γενικά έκανε γνωστές τις βασικές αρχές της Γεωμετρίας".

Στο Διογένη τον Λαέρτιο ("*Βίοι φιλοσόφων*", βιβλίο II.1) διαβάζουμε: "*Εὗρε δέ καί γνώμονα πρῶτος καί ἔστησεν ἐπὶ τῶν σκιοθήρων ἐν Λακεδαιμόνι, καθά φησι Φαβωρίνος ἐν Παντοδαστῇ ἱστορίᾳ*".

Στους διάφορους κώδικες που σώζονται (Βατικανός Ελληνικός, Βοδληϊανός, Φλωρεντινός, Λαυρεντιανός, Βιενναίος Ελληνικός) αναφέρονται τα εξής:

"Το γνώμονα χρησιμοποιούν οι γεωμέτρεις για να επιτυγχάνουν σύντομες αποδείξεις και το όνομα το πήρε από το γεγονός ότι σχηματίζεται το γράμμα Γ".

Το εδάφιο αυτό είναι εξαιρετικά αποκαλυπτικό, αφού μας πληροφορεί ότι ο γνώμονας χρησίμευε σε διάφορους γεωμετρικούς ή όχι υπολογισμούς. Στην αριθμητική σημασία των γνωμόνων αναφέρεται το παρακάτω εδάφιο από τους ίδιους κώδικες:

"Με το όνομα γνώμονας αναφέρονται και οι περιττοί αριθμοί, γιατί αν προστεθούν σε τετράγωνο δίνουν πάλι τετράγωνο".

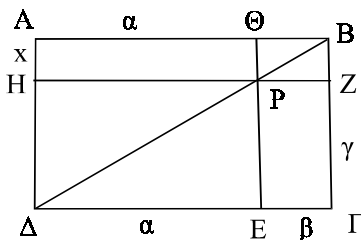
Στον κώδικα της Φλωρεντίας έχει προστεθεί η εξής παρατήρηση:

"Αλλά αν και σε ένα τετράπλευρο γενικά προστεθεί ένας αντίστοιχος γνώμονας, σχηματίζεται όμοιο με το αρχικό τετράπλευρο".

Αυτή είναι η βασική γεωμετρική ιδιότητα του γνώμονα. Η σημασία του γνώμονα στην επίλυση πρακτικών αριθμητικών προβλημάτων είναι μεγάλη. Αυτό έχει διαπιστωθεί από πολύ ενωρίς από πολλούς ερευνητές, οι οποίοι εκφράζουν την άποψη ότι με τη βοήθεια του γνώμονα μπορούσαν να επιλύσουν προβλήματα όχι μόνο γεωμετρικά αλλά και αριθμητικά.

Γενικότερα με τη βοήθεια του γνώμονα και των ιδιοτήτων του είμαστε σε θέση να επιλύσουμε εξισώσεις της μορφής:

$$ax = \beta\gamma \quad (1).$$



Σχήμα 3

Πράγματι, αν (Σχ. 3) το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και P σημείο της διαγωνίου του και $HP \parallel AB$, $PE \parallel AD$, τότε $(AHP\Theta) = (ΓEPZ)$, οπότε αν $\Delta E = \alpha$, $E\Gamma = \beta$, $\Gamma Z = \gamma$ τότε $AH = x$.

Θα μπορούσαν άμεσα να επιλυθούν και αριθμητικά προβλήματα των εξής μορφών:

- α)** Μια άμαξα που κινείται με ταχύτητα v Km/h διανύει την απόσταση ΚΛ σε χρόνο $t = 10h\ 40'$. Αν η ταχύτητα μειωθεί κατά 2 Km / h, η άμαξα θα καθυστερήσει κατά 2 h $8'$. Να προσδιορίσετε την απόσταση ΚΛ.
- β)** Για να τελειώσουμε ένα έργο χρειάζονται 57 εργάτες να εργασθούν 45 ημέρες. Μετά 15 ημέρες από την έναρξη των εργασιών χρησιμοποιήσαμε και μερικούς άλλους εργάτες, οπότε το έργο τελείωσε 12 ημέρες νωρίτερα. Ποιος ήταν ο αριθμός των επιπλέον εργατών που χρησιμοποιήσαμε;
- γ)** Σε 3 lit νερού θερμοκρασίας $36^\circ C$ προσθέτουμε 4 lit νερού θερμοκρασίας $15^\circ C$. Ποια θα είναι η θερμοκρασία του μείγματος;

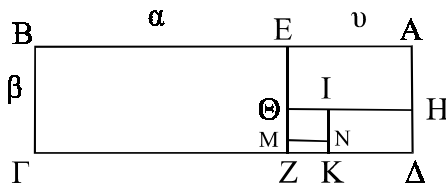
Νεότερες έρευνες έδειξαν ότι ο γνώμονας συνδέεται άμεσα με τους αριθμούς Fibonacci, τον Ευκλείδειο αλγόριθμο και τα συνεχή κλάσματα.

Ας δούμε πώς συνδέονται αυτά μεταξύ τους.

Αν δοθεί ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, για να κατασκευάσουμε ένα γνώμονα, παίρνουμε σε μια από τις διαγωνίες του σημείο P και από αυτό φέρνουμε παράλληλες στις πλευρές του. Δημιουργείται έτσι ο γνώμονας $AB\Gamma EPH$ (Σχ. 3).

Έστω όμως ότι δίδεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, το οποίο χάριν απλότητας το θεωρούμε ορθογώνιο με διαστάσεις α , β .

Ας υποθέσουμε ότι $\alpha = AB > \beta = B\Gamma$ (Σχ. 4). Θεωρούμε τη διαίρεση $\alpha = \beta\pi + \upsilon$ με $\upsilon = AE$. Έστω $AE \neq 0$.



Σχήμα 4

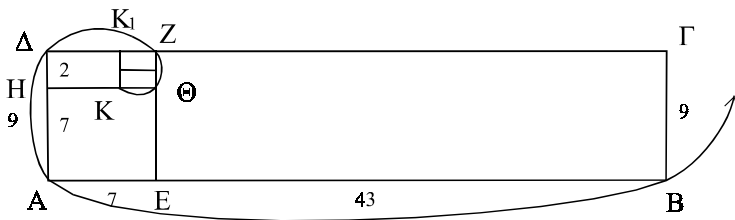
Συνεχίζουμε τις διαιρέσεις $\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1$, $\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2$, ..., $\upsilon_{v-1} = \upsilon_v\pi_{v+1} + 0$

Τις ευκλείδειες αυτές διαιρέσεις εκφράζουμε με το συνεχές κλάσμα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pi + \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} = \pi + \frac{1}{\pi_1 + \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta_1}}} = \pi + \frac{1}{\pi_1 + \frac{1}{\pi_2 + \frac{1}{\frac{\beta_1}{\alpha_2}}}} = \dots$$

το οποίο συμβολίζουμε και με $[\pi, \pi_1, \pi_2, \dots]$

Π.χ. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 43, ΒΓ = 9 (Σχ. 5).

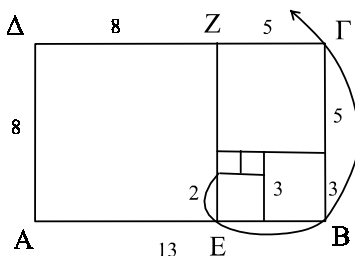


Σχήμα 5

Τότε, αφού $43 = 4 \cdot 9 + 7$, έχουμε $AE = 7$, $AH = 7$, $\Delta H = Z\Theta = 2$, $K_1Z = 1$. Και ακόμα $\frac{43}{9} = [4, 1, 3, 1, 1]$

Παρατηρούμε ότι, αν κάνουμε τις διαιρέσεις από δεξιά προς τα αριστερά και από τα κάτω προς τα επάνω, ακολουθώντας τη φορά των δεικτών του ωρολογίου, και συνδέσουμε τα σημεία Κ, Θ, Ζ, Δ, Α, Β, θα πάρουμε μιαν ελικοειδή καμπύλη, που την ονομάζουμε **εσώστρεφη ηλιοτροπική**, επειδή και οι σπόροι του ηλιοτροπίου είναι τοποθετημένοι στο άνθος του σύμφωνα με μια τέτοια καμπύλη. Αντίστοιχα υπάρχει και η **εξώστρεφη ηλιοτροπική** ελικοειδής καμπύλη.

Αν έχουμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 13, ΒΓ = 8, τότε η εξώστρεφη ηλιοτροπική αντιστοιχεί στη διαίρεση του σχήματος 6.



Σχήμα 6

Η διαίρεση αυτή αντιστοιχεί στο συνεχές κλάσμα $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$, του οποίου τα επιμέρους κλάσματα είναι τα $\frac{13}{8}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}$ και των οποίων οι παρονομαστές κατ' αντίστροφη τάξη, αποτελούν τους 6 πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci τάξης 1.

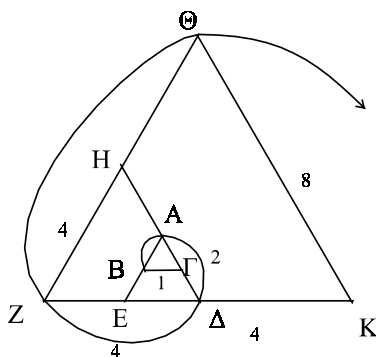
Για το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 29, ΒΓ = 12 θα πάρουμε το συνεχές κλάσμα $[2, 2, 2, 2]$, του οποίου τα επιμέρους κλάσματα είναι τα $\frac{29}{12}, \frac{12}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{1}$. Οι παρονομαστές των κλασμάτων αυτών 1, 2, 5, 12 αντιστοιχούν στους 4 πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci τάξης 2.

Οι προηγούμενες διαιρέσεις ονομάζονται **μονογωνομονικές**.

Αν θεωρήσουμε και από αριστερά τις **διγωνομονικές** διαιρέσεις, θα πάρουμε μια άλλη ηλιοτροπική καμπύλη.

Εκτός από τις ηλιοτροπικές καμπύλες των ορθογωνίων έχουμε τέτοιες ελικοειδείς καμπύλες και στα τρίγωνα.

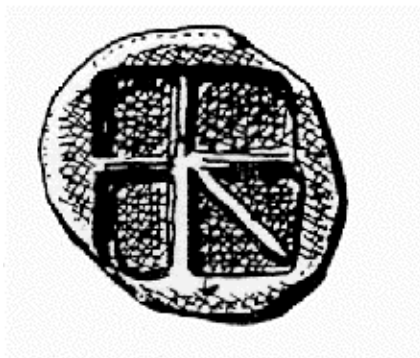
Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (Σχ. 7) με πλευρά 1. Το ισοσκελές τραπέζιο ΒΓΔΕ είναι γνώμονας του ΑΒΓ και μαζί σχηματίζουν το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ. Του ΑΔΕ γνώμονας είναι το ισοσκελές τραπέζιο ΑΕΖΗ, που μαζί με το ΑΔΕ σχηματίζουν το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΖΗ. Το τρίγωνο ΔΗΖ έχει γνώμονα το ισοσκελές τραπέζιο ΗΘΚΔ, που μαζί με το τρίγωνο σχηματίζουν το ισόπλευρο τρίγωνο ΘΖΚ κλπ.



Σχήμα 7

Η γραμμή που συνδέει τις κορυφές Β, Α, Δ, Ζ, Θ είναι εσωστρεφής ηλιοτροπική ελικοειδής.

Με ανάλογο τρόπο είναι δυνατό να ορίσουμε γνώμονες και για πεντάγωνα κλπ.



Νόμισμα της Αίγινας
που εικονίζει γνώμονα (404 π.Χ.).

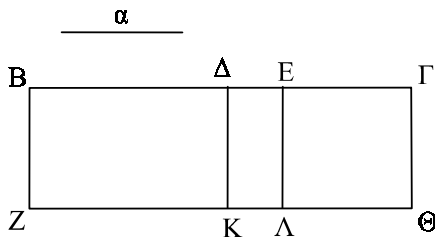
3. Η Γεωμετρική Άλγεβρα

Πρόταση 1 (Π. 1)

Αν δοθούν δύο τμήματα α και $B\Gamma$ και το $B\Gamma$ διαιρεθεί σε οσαδήποτε τμήματα, τότε το ορθογώνιο που ορίζουν τα α , $B\Gamma$ είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των ορθογωνίων που ορίζουν το α με καθένα από τα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το $B\Gamma$.

Απόδειξη

Έστω α , $B\Gamma$ τα τμήματα και Δ , E τα σημεία διαιρέσεως του $B\Gamma$. Θα αποδείξουμε ότι το ορθογώνιο που ορίζουν τα α , $B\Gamma$ είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των ορθογωνίων που ορίζει το α με τα $B\Delta$ και ΔE και $E\Gamma$ (Σχ. 8).



Σχήμα 8

Πράγματι, αν φέρουμε από το Β κάθετη στη ΒΓ και πάρουμε τμήμα $BZ = \alpha$ (I. 11), αν φέρουμε από το Ζ παράλληλο στη ΒΓ και πάρουμε τμήμα $Z\Theta = B\Gamma$ (I. 31) και αν από τα Δ, Ε, Γ φέρουμε παράλληλες ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ προς την ΒΖ τότε:

$$(B\Gamma\Theta Z) = (B\Delta K Z) + (\Delta E\Lambda K) + (E\Gamma\Theta\Lambda) \text{ ή}$$

$$\alpha \cdot B\Gamma = \alpha \cdot B\Delta + \alpha \cdot \Delta E + \alpha \cdot E\Gamma \quad (1)$$

ή το ορθογώνιο που ορίζουν τα τμήματα α και ΒΓ είναι ισοδύναμο με τα αθροίσματα των ορθογωνίων που ορίζει το α με τα ΒΔ, ΔΕ, ΕΓ.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η λύση είναι μια μερική λύση όπως θα λέγαμε σήμερα, αφού, ενώ η πρόταση αναφέρεται σε **οποιαδήποτε** τμήματα, στην απόδειξη θεωρούμε μόνον τρία. Προφανώς αυτό γίνεται χάριν οικονομίας.

Αλλωστε, αν η πρόταση 1 ισχύει για διαίρεση του ΒΓ σε δύο τμήματα, επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει και όταν το ΒΓ έχει διαιρεθεί σε ν τμήματα (ν φυσικός).

Η πρόταση 1 θα μπορούσε να αποδοθεί και από τη σχέση:

$$\alpha (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n) = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 + \alpha\beta_3 + \dots + \alpha\beta_n,$$

όπου $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = B\Gamma$.

Ο Άραβας σχολιαστής al-Nayrizi στα σχόλιά του στα *Στοιχεία*, αναφέρει ότι σύμφωνα με τον Ήρωνα, η πρόταση 1 χωρίς να φέρουμε έναν αριθμό τμημάτων (τα ΔΚ, ΕΛ εδώ), είναι αδύνατο να αποδειχθεί.

Ο Ήρων δίνει την αλγεβρική σημασία των προτάσεων 1 μέχρι 10 και μάλιστα σε μερικές αναφέρει και αριθμητικά παραδείγματα. Π.χ. στην πρόταση 1 θεωρεί ότι $\alpha = 6$, $B\Gamma = 10$, $B\Delta = 2$, $\Delta E = 3$, $E\Gamma = 5$ και παρατηρεί ότι $6 \cdot 10 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5$.

Τέλος, ο Γαλιλαίος στο βιβλίο του "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno á due nuove scienze*" που εκδόθηκε το 1688, κάνει χρήση της πρότασης 1 (με αναφορά) για τη λύση του XII προβλήματός του.

Πρόταση 2 (II. 2)

Αν σημείο διαιρεί τμήμα, τότε το τετράγωνο με πλευρά το τμήμα είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των ορθογωνίων με διαστάσεις το δοθέν τμήμα και τα τμήματα στα οποία το τμήμα διαιρείται από το σημείο.

Απόδειξη

Έστω τμήμα AB και σημείο του Γ που το διαιρεί στα τμήματα $A\Gamma$, ΓB (Σχ. 9). Θα αποδείξουμε ότι $AB \cdot A\Gamma + AB \cdot \Gamma B = AB^2$.

Με πλευρά AB κατασκευάζουμε το τετράγωνο $ABED$ και από το σημείο Γ φέρνουμε παράλληλο την $\Gamma Z \parallel AD$.

Έχουμε :

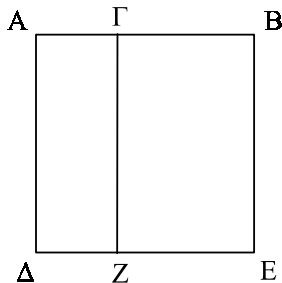
$$(ABED) = (A\Gamma ZD) + (\Gamma BEZ) \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = AD \cdot A\Gamma + \Gamma B \cdot BE.$$

Αλλά αφού $AB = AD = BE$ έχουμε:

$$AB \cdot A\Gamma + AB \cdot \Gamma B = AB^2.$$

ὅ.ξ.δ.



Σχήμα 9

Σχόλια

Η πρώτη παρατήρησή μας σχετικά με την πρόταση 2 είναι ότι ήδη έχει χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος (πρόταση I. 47), όπως γράφει ο Heath στα σχόλια της πρότασης 2.

Προβληματιζόμαστε βέβαια εδώ για ποιους λόγους ο Ευκλείδης αναφέρει την πρόταση στο σημείο αυτό, αφού η πρόταση είναι τόσο προφανής, που ο ίδιος τη χρησιμοποίησε χωρίς καμιά ιδιαίτερη μνεία στην απόδειξη της πρότασης 4.

Η δεύτερη παρατήρησή μας είναι ότι η πρόταση 2 είναι προφανώς μερική περίπτωση της 1.

Πολλοί λοιπόν είναι εκείνοι που πιστεύουν ότι η τοποθέτηση της πρότασης 2 εδώ έχει σχέση με τη χρησιμοποίησή της στην απόδειξη της πρότασης I. 47.

Θα παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω εξήγηση έχει ελάχιστη σχέση με την πραγματικότητα, για τον εξής λόγο:

Αν μελετήσουμε τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών που έχουν διασωθεί και ειδικά του Ευκλείδη, ο οποίος πρώτος χρησιμοποίησε την αξιωματική μέθοδο, θα διαπιστώσουμε το εξής: Αν για την απόδειξη μιας πρότασης P μπορούν να χρησιμοποιήσουν την πρόταση Q ή την ασθενέστερη πρόταση της R , θα χρησιμοποιήσουν την R . Του γεγονότος αυτού κάνει μνεία και ο Πρόκλος. Ανεξάρτητα από τον Πρόκλο, ο Heath πιστεύει ότι ο Ευκλείδης για λόγους πρακτικούς αναφέρει τις προτάσεις 2 και 3. Επειδή, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η πρόταση, θα έπρεπε να υπάρχει, για το λόγο αυτό και την αναφέρει.

Πρέπει λοιπόν να θεωρήσουμε την πρόταση 2 ως πόρισμα της 1 το οποίο, αν και δε χρησιμοποιήθηκε στο βιβλίο II, χρησιμοποιήθηκε στα βιβλία IX, XIII. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ο εξής:

Οι πρώτες προτάσεις του βιβλίου II έχουν τις παρακάτω αλγεβρικές μορφές:

$$1) \alpha (\beta + \gamma + \dots + \kappa) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \dots + \alpha\kappa$$

$$2) \alpha (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$3) \beta (\beta + \gamma) = \beta\gamma + \beta^2 \quad \text{ή} \quad (\alpha + \beta) \alpha + (\alpha + \beta) \beta = (\alpha + \beta)^2$$

$$4) (\beta + \gamma)^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma$$

$$5) \alpha\beta + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^2 = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \quad \text{κ.λπ.}$$

Δηλαδή, η πρόταση 2 δεν ενδείκνυται να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη κάποιας από τις προτάσεις 4, 5 κλπ.

Τι λοιπόν επιδιώκει ο Ευκλείδης, προτάσσοντας δέκα προτάσεις που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους; Προφανώς, αναφέρει ο Heath, ο Ευκλείδης εδώ θέλει να δείξει το δυναμισμό των μεθόδων της γεωμετρικής Άλγεβρας. Από την άποψη αυτή δικαιολογείται η τακτική αυτή του Ευκλείδη και καταφαίνεται ότι οι μέθοδοι της γεωμετρικής Άλγεβρας είναι πιο αποτελεσματικές από τις **ημιαλγεβρικές** διαδικασίες αντικαταστάσεων. Επιπλέον, η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα να μας δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε οποιαδήποτε από αυτές τις προτάσεις απευθείας, χωρίς να στηριχθούμε σε κάποια από τις υπόλοιπες.

Δεν θα πρέπει ακόμα να διαφεύγει της προσοχής μας και η διδακτική διάσταση της μεθόδου αυτής του Ευκλείδη. Γιατί είναι φανερό ότι είναι προτιμότερο να εργαζόμαστε με βάση τη γεωμετρική σημασία μιας πρότασης (δηλαδή με ένα σχήμα που εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε και το οποίο κάνει την πρόταση περίπου προφανή), παρά να είμαστε αναγκασμένοι να απομνημονεύουμε αλγεβρικές ταυτότητες. Η παρατήρηση αυτή είναι εύστοχη, όχι μόνο για τους αρχαίους Έλληνες, τους εθισμένους στις γεωμετρικές μεθόδους, αλλά και στους σύγχρονους σπουδαστές.

Πρόταση 3 (II. 3)

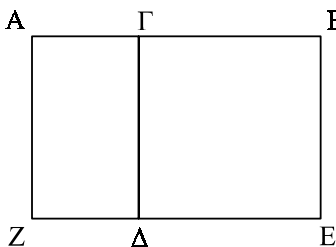
Αν τμήμα AB διαιρείται από σημείο Γ σε δύο τμήματα ΑΓ, ΓΒ, τότε το ορθογώνιο που ορίζεται από το τμήμα ΑΒ και ένα από τα

δύο τμήματα π.χ. ΓΒ, είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα και το τετράγωνο με πλευρά το τμήμα ΓΒ.

Απόδειξη

Έστω Γ τυχόν σημείο που διαιρεί το τμήμα ΑΒ στα τμήματα ΑΓ, ΓΒ (Σχ. 10). Θα αποδείξουμε ότι

$$AB \cdot BG = AG \cdot GB + GB^2 \quad (1)$$



Σχήμα 10

Σχεδιάζουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ και από το Α φέρουμε παράλληλο προς την ΓΔ, που τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ.

Προφανώς,

$$(ABEZ) = (AG\Delta Z) + (GBE\Delta) \text{ ή } AB \cdot BE = AG \cdot \Gamma\Delta + \Gamma B^2.$$

$$\text{Αλλά } BE=BG=\Delta\Gamma. \text{ Άρα } AB \cdot BG = AG \cdot \Gamma B + \Gamma B^2.$$

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή, όπως και η προηγούμενη είναι σημαντική για την γεωμετρική Άλγεβρα, αφού, αν θέσουμε $AB = \alpha$, $AG = \beta$, η πρόταση παίρνει τη μορφή:

$$(i) \quad \alpha (\alpha - \beta) = \beta (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2$$

Αν θέσουμε $AG = \alpha$, $BG = \beta$, η πρόταση παίρνει τη μορφή:

$$(ii) \quad \beta (\alpha + \beta) = \alpha\beta + \beta^2.$$

Τέλος, αν θέσουμε $AB = \alpha$, $BG = \beta$, η πρόταση παίρνει τη μορφή

$$(iii) \quad \alpha\beta = (\alpha - \beta) \beta + \beta^2$$

Ο Ήρων, όπως αναφέρει ο Άραβας al-Nayrizi, σχολιάζοντας τις προτάσεις 2 και 3 δε σχεδιάζει σχήματα, επειδή αυτές είναι μερικές περιπτώσεις της πρότασης 1.

Πρόταση 4 (II. 4)

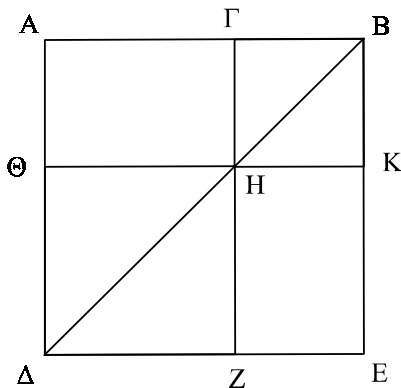
Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από σημείο σε δυο τμήματα, το τετράγωνο του όλου τμήματος είναι ίσο με τα τετράγωνα των δυο τμημάτων και το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα.

Απόδειξη

Αν Γ σημείο του τμήματος ΑΒ, θα αποδείξουμε ότι :

$$AB^2 = AG^2 + GB^2 + 2AG \cdot GB$$

Σχεδιάζουμε το τετράγωνο ΑΒΕΔ (I. 46), τη διαγώνιο ΒΔ, καθώς και την παράλληλο ΓΖ // ΑΔ, που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Η (I. 30 και I. 31) (Σχ. 11).



Σχήμα 11

Από το Η φέρνουμε ΘΚ // ΑΒ. Τότε οι γωνίες $\hat{GHB}$ και $\hat{ADB}$ είναι ίσες (I. 29).

Αλλά οι γωνίες $\hat{ADB}$, $\hat{EDB}$ είναι ίσες με 45° (I. 5). Άρα και οι γωνίες $\hat{GHB}$, $\hat{KHB}$ είναι ίσες, οπότε και $GB = KB$ (I. 6), δηλαδή το ΓΗΚΒ είναι ρόμβος. Όμως είναι και ορθογώνιο, διότι αφού $BE \parallel GZ$ και τέμνονται από την ΑΒ, θα πρέπει $\hat{GBK} + \hat{BGH} = 180^\circ$. Αλλά $\hat{GBK} = 90^\circ$,

άρα και $\hat{B\Gamma H} = 90^\circ$, δηλαδή το $\Gamma H K B$ είναι ορθογώνιο, οπότε είναι τετράγωνο με πλευρά ΓB .

Για τους ίδιους λόγους και το $\Delta \Theta H Z$ είναι τετράγωνο με πλευρά $\Theta H = A\Gamma$ (I. 34). Άρα το τετράγωνο $\Delta \Theta H Z$ είναι ίσο με τετράγωνο πλευράς $A\Gamma$, ενώ τα ορθογώνια $A\Gamma H \Theta$, $E Z H K$ έχουν διαστάσεις $A\Gamma$, ΓB .

$$\text{Άρα } AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma B.$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 4 είναι σημαντικότερη, γιατί αν θέσουμε $A\Gamma = \alpha$, $\Gamma B = \beta$ γίνεται η γνωστή αλγεβρική ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ενώ αν θέσουμε $AB = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ η πρόταση γίνεται:

$$\alpha^2 = \beta^2 + (\alpha - \beta)^2 + 2\beta(\alpha - \beta).$$

Ο Ήρων, όπως αναφέρει ο al-Nayrizi, δίνει την παρακάτω απόδειξη:

Θέτοντας $A\Gamma = \alpha$, $\Gamma B = \beta$ έχουμε:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)\alpha + (\alpha + \beta)\beta = \beta\alpha + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta.$$

Εκτός από τις δύο αποδείξεις που αναφέραμε παραπάνω υπάρχει και αυτή που αναφέρει ο E. F. August στην έκδοση του 1826-29. Ο Heiberg πιστεύει ότι η απόδειξη αυτή οφείλεται στον Θέωνα τον Σμυρναίο [88]. Η απόδειξη αυτή έχει ως εξής:

Επειδή $AB = A\Delta$ στο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\hat{A\hat{B}\Delta} = \hat{A\hat{\Delta}B} = 45^\circ$. Αλλά και $\hat{B\hat{\Gamma}H} = 90^\circ = \hat{\Gamma\hat{A}\Delta}$ ως εντός - εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών $A\Delta$, ΓZ που τέμνονται από την AB . (I. 3).

Άρα $\hat{\Gamma H B} = 45^\circ = \hat{\Gamma B H}$, οπότε $\Gamma H = \Gamma B$, δηλαδή το $\Gamma B K H$ είναι τετράγωνο, με πλευρά ΓB . Ανάλογα, και το $\Theta H Z \Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά την $A\Gamma$. Τέλος, τα ορθογώνια $A\Gamma H \Theta$ και $E Z H K$ είναι ίσα, αφού $A\Gamma = \Theta H = HZ$ και $\Gamma H = H K$.

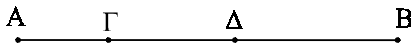
$$\begin{aligned} \text{Τότε } AB^2 &= \Theta H Z \Delta + \Gamma B K H + A\Gamma H \Theta + H K E Z = \\ &= A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma B. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εδώ στην ουσία κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων του γνόμονα (ορισμός 2).

Στην περίπτωση που $AB = 2\alpha$ και $A\Gamma = \Gamma B = \alpha$, τότε η πρόταση 4 γράφεται

$$(2\alpha)^2 = \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha^2$$

που είναι προφανής.



Σχήμα 12

Η πρόταση ισχύει και όταν το AB διαιρείται σε n τμήματα. Αν τα τμήματα είναι τα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ τότε από την πρόταση 4 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (ΑΓ + ΓΔ + ΔΒ)^2 &= ΑΓ^2 + (ΓΔ + ΔΒ)^2 + 2ΑΓ(ΓΔ + ΔΒ) = \\ &= ΑΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔΒ^2 + 2ΓΔ \cdot ΔΒ + 2ΑΓ \cdot ΓΔ + 2ΑΓ \cdot ΔΒ \quad (\text{Σχ. 12}). \end{aligned}$$

Ο J. Peletier (Peletarius, 16^{ος} αιώνας) [47] από την πρόταση 4 εξάγει την αλγεβρική πρόταση $\alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \beta) (\alpha \beta)$, η οποία κάθε άλλο παρά τετριμμένη ήταν στις αρχές του 16^{ου} αιώνα. Η απόδειξη του Peletier είναι η παρακάτω:

$$\frac{(ΑΓΗΘ)}{(ΓΒΚΗ)} = \frac{(ΔΖΗΘ)}{(ΕΖΗΚ)} \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta}$$

Πόρισμα

Τα ορθογώνια ΑΓΗΘ και ΖΗΚΕ είναι ίσα¹, ενώ τα ΒΓΗΚ και ΔΖΗΘ είναι τετράγωνα.

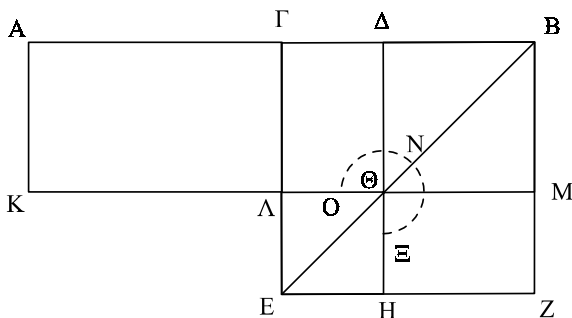
Πρόταση 5 (II. 5)

Αν τμήμα διαιρεθεί από το μέσο του σε δύο ίσα τμήματα και από ένα σημείο του σε δύο άνισα τμήματα, το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα μαζί με τετράγωνο που έχει πλευρά το τμήμα με άκρα τα σημεία διαίρεσης είναι ίσα με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό του αρχικού τμήματος.

Απόδειξη

Έστω Γ το μέσο του AB και Δ σημείο που διαιρεί το AB σε μέρη άνισα. Θα αποδείξουμε ότι το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα ΑΔ, ΔΒ μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΓΔ είναι ισοδύναμα με το τετράγωνο πλευράς ΒΓ.

¹ Όταν ο Ευκλείδης λέει ίσα, εννοεί ότι έχουν ίδιο περιεχόμενο (ίδιο εμβαδό).



Σχήμα 13

Σχεδιάζουμε με πλευρά ΓΒ τετράγωνο ΓΒΖΕ (I. 46), και φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΕ. Από το Δ φέρνουμε την ΔΗ // ΒΖ και από το Θ την ΚΜ // ΑΒ (I. 30 και I. 31) (Σχ.13). Από το Α φέρνουμε ΑΚ // ΓΕ.

Παρατηρούμε ότι επειδή τα ορθογώνια ΓΔΘΛ και ΘΗΖΜ είναι ίσα (πόρισμα πρότασης 4), τότε

$$\begin{aligned} (\Gamma\Delta\Theta\Lambda) + (\Delta\text{BM}\Theta) &= (\Theta\text{H}\text{ZM}) + (\Delta\text{BM}\Theta) \text{ ή } \Gamma\text{B}\text{M}\Lambda = (\text{B}\text{Z}\text{H}\Delta) \text{ ή} \\ (\text{A}\Gamma\Lambda\text{K}) &= (\text{B}\text{Z}\text{H}\Delta) \text{ ή } (\text{A}\Delta\Theta\text{K}) = (\Gamma\Lambda\Theta\text{H}\text{ZB}) \end{aligned} \quad (1),$$

που είναι ο γνώμονας ΟΝΞ. Αλλά το ΑΔΘΚ είναι το ορθογώνιο που ορίζουν τα ΑΔ, ΔΒ, αφού ΔΒ = ΔΘ. Αν στα μέλη της (1) προσθέσουμε το τετράγωνο ΛΕΗΘ, θα πάρουμε:

$$(\text{A}\Delta\Theta\text{K}) + (\text{ΛΕΗ}\Theta) = (\Gamma\text{B}\text{ZΕ}).$$

$$\text{Άρα } \text{A}\Delta \cdot \Delta\text{B} + \Gamma\Delta^2 = \Gamma\text{B}^2.$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Σε διάφορους κώδικες καθώς και σε πολλούς σχολιαστές υπάρχουν και αριθμητικά παραδείγματα για την πρόταση 5.

Έτσι π.χ. στον Παρισινό κώδικα 2344 υπάρχει το αριθμητικό παράδειγμα:

Έστω ΑΒ = 10 (μονάδες) και ΑΓ = 5 = ΓΒ, ενώ ΑΔ = 8, ΔΒ = 2.

$$\text{Άρα } 8 \cdot 2 + 3^2 = 5^2 \text{ ή } 16 + 9 = 25.$$

Στον κώδικα της Βιέννης υπάρχει ανάλογο αριθμητικό παράδειγμα:

$AB = 10, AG = 5 = GB$ ενώ $AD = 7, DB = 3$.

Τότε $7 \cdot 3 + 2^2 = 5^2$.

Η πρόταση 5 είναι πολύ σημαντική για τη γεωμετρική Άλγεβρα. Μαζί με την πρόταση 4 είναι αυτές στις οποίες ο Zeuthen [165] εστίασε το ενδιαφέρον του για να οικοδομήσει τη θεωρία του για την γεωμετρική Άλγεβρα.

Αν $AG = \alpha$ και $GD = \beta$, τότε η αλγεβρική σημασία της (πρόταση 5) είναι η ταυτότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 = \alpha^2$ ή $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$.

Ο Nesselman έδωσε στην πρόταση 5 τη μορφή

$$\alpha\beta + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2,$$

ενώ ο Zeuthen παρατήρησε ότι αν θέσουμε $AB = \alpha, BD = x$ τότε η πρόταση 5 γίνεται

$$\begin{aligned} \alpha x - x^2 &= GB^2 - GD^2 = (GB + GD) \cdot (GB - GD) = \\ &= (AG + GD) BD = AD \cdot DK = (AD \cdot DK). \end{aligned}$$

Αλλά, όπως δείξαμε προηγουμένως, το $AD \cdot DK$ είναι ίσο με τον γνόμενο $ON \cdot \Xi$. Αν λοιπόν το εμβαδόν του γνόμου $ON \cdot \Xi$ είναι β^2 και το α δεδομένο, τότε:

$$\beta^2 = \alpha x - x^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2 \quad (1)$$

Επομένως, αφού τα $BD = \frac{\alpha}{2}$ και β είναι γνωστά από την (1)

μπορούμε να υπολογίσουμε και το τμήμα $GD = \frac{\alpha}{2} - x$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα (I. 47). Με τον τρόπο αυτό θα καταλήξουμε στην πρόταση VI. 28 των *Στοιχείων*, με την οποία μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα γενικότερα.

Θα μπορούσαμε όμως, συνεχίζει ο Zeuthen, να αντιμετωπίσουμε την επίλυση της (1) διαφορετικά, αφού η (1) είναι η αλγεβρική έκφραση της γεωμετρικής πρότασης:

Αν Γ το μέσον του AB και Δ σημείο του AB , τότε:

$$AD \cdot DB + GD^2 = GB^2 \quad (2)$$

Η (2) παραπέμπει στο πρόβλημα:

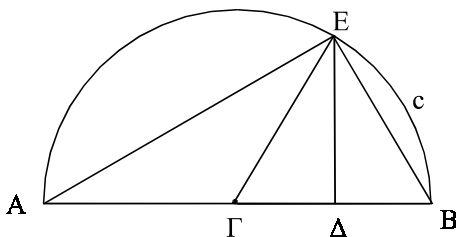
Να διαιρεθεί δοθέν τμήμα AB σε δύο μέρη, ώστε το ορθογώνιο που σχηματίζουν να έχει δοσμένο εμβαδόν (α).

Αυτό το εμβαδόν, γράφει ο Zeuthen, μπορούμε από τα σχετικά με το Πυθαγόρειο θεώρημα να το θεωρήσουμε με τη μορφή β^2 .

Παρατηρούμε ότι η σχέση (2) είναι ισοδύναμη με τη σχέση $ED^2 = AD \cdot BD$ και το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο. Αυτός ενδεχομένως είναι και ο λόγος που η πρόταση 5 δε χρησιμοποιείται στη σύγχρονη Γεωμετρία με τον τρόπο που υπάρχει στα *Στοιχεία*, αλλά με τη μορφή της ισοδύναμης πρότασης που είναι το θεώρημα του ύψους ορθογωνίου τρι-

γώνου. Δηλαδή $\angle AEB = 90^\circ$ και $ED \perp AB \Leftrightarrow ED^2 = AD \cdot BD$.

Πράγματι, με διάμετρο AB γράφουμε ημικύκλιο c (Γ , ΓB) και φέρουμε την κάθετη στο Δ επί την AB που τέμνει το ημικύκλιο c στο E (Σχ. 14).



Σχήμα 14

Τότε $ED^2 = EG^2 - \Gamma\Delta^2$. Επειδή $B\Gamma = E\Gamma$, έχουμε:

$$B\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2 = AD \cdot DB \quad \text{ή}$$

$$DE^2 = B\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2 = (B\Gamma + \Gamma\Delta) \cdot (B\Gamma - \Gamma\Delta) = AD \cdot DB.$$

Ο μεταφραστής των *Στοιχείων* R. Simson εφαρμόζει την πρόταση 5 για να λύσει την εξίσωση $ax - x^2 = \beta^2$ ως εξής:

Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $AB = a$ και φέρουμε κάθετη στο AB στο μέσο Γ αυτού (Σχ.15). Πάνω στην κάθετη παίρνουμε τμήμα $\Gamma O = \beta$. Με κέντρο το O και ακτίνα ίση με ΓB γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την AB στο σημείο Δ .

Από την πρόταση 5 έχουμε ότι $AD \cdot DB + \Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2$.

Το σύστημα ως συμμετρικό, στην πραγματικότητα έχει μόνο μια λύση που λαμβάνεται με αντιμετάθεση των x, y και μπορεί να πάρει τη μορφή μιας γεωμετρικής πρότασης γνωστής στον Ευκλείδη, αφού υπάρχει στο βιβλίο του “Γεωμετρικά” (πρόταση 35):

Αν δύο τμήματα ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο με δοσμένο εμβαδόν και δοσμένη γωνία και αν το άθροισμα αυτών των τμημάτων είναι γνωστό, τότε είναι γνωστό και καθένα από τα τμήματα.

Από το σχήμα 15 της πρότασης 5 και τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy \quad (2)$$

Επειδή τα $x+y$, xy είναι γνωστά, από τη (2) μπορούμε να υπολογίσουμε το $x-y$. Γνωρίζοντας λοιπόν τα τμήματα $x+y$, $x-y$ βρίσκουμε τα x , y .

Στα τέλη της δεκαετίας του 60, ο Ούγγρος ιστορικός A. Szabo [136] (από τους πρώτους που αμφισβήτησαν τη βαβυλωνιακή προέλευση της γεωμετρικής Άλγεβρας), θεωρεί ότι η πρόταση 5 είναι ένα λήμμα για την απόδειξη της πρότασης 14. Το γεγονός αυτό είχε επισημάνει από το 1756 ο μεταφραστής των *Στοιχείων* γνωστός Άγγλος μαθηματικός R. Simpson.

Αναφερόμενος στις διάφορες λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπως αυτές δόθηκαν από τους Zeuthen, Tannery, Heath, van der Waerden, P. H. Michel κ.ά. ο S. Unguru [149] γράφει:

“Και τι δείχνει αυτή η απόδειξη; Ότι οι Έλληνες έλυναν δευτεροβάθμιες εξισώσεις; Καθόλου. Το μόνο πράγμα που αποδείχθηκε είναι ότι ο Heath (και ο Zeuthen και ο Tannery και ο van der Waerden και ο P. H. Michel κ.λπ.) μπορούν να εκφράσουν τη γεωμετρία του Ευκλείδη με αλγεβρικούς συμβολισμούς και να πάρουν στην περίπτωση αυτή μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Μπορεί αυτό να μας δώσει κάποια πληροφορία για τους Έλληνες γενικά και για την πρόταση 5 ειδικά; Τίποτα. Δεν υπήρχε ούτε το παραμικρό στοιχείο αυθεντικής ιστορικής πληροφόρησης ότι ο Ευκλείδης (ή κάποιος άλλος μεγάλος Έλληνας μαθηματικός εκτός των Πυθαγορείων) χρησιμοποίησε ποτέ εξισώσεις στα γεωμετρικά του έργα. Οι πηγές δεν περιέχουν εξισώσεις”.

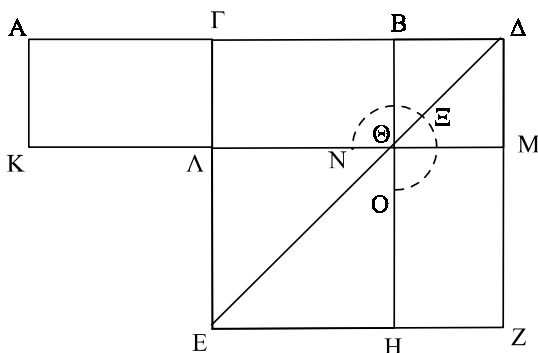
Το μόνο σχόλιο που μπορούμε να κάνουμε στα παραπάνω είναι ότι ο Unguru δεν μπορεί να κατανοήσει, μη όντας ο ίδιος μαθηματικός, τη σημασία της “Γεωμετρικής Άλγεβρας”, επειδή για τον ίδιο οι όροι αυτοί είναι τουλάχιστον αντιθετικοί.

Πρόταση 6 (II. 6)

Αν Γ είναι το μέσον τμήματος AB και προεκτείνουμε το τμήμα κατά BA , τότε το ορθογώνιο που ορίζουν τα τμήματα AA και BA μαζί με το τετράγωνο πλευράς BA είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς GA .

Απόδειξη

Έστω Γ το μέσον της AB και Δ σημείο στην προέκταση της AB . Σχεδιάζουμε το τετράγωνο $\Gamma\Delta ZE$, φέρουμε τη διαγώνιο ΔE και την $BH \parallel GE$ που τέμνει την ΔE στο Θ . Από το Θ φέρνουμε $\Theta M \parallel \Delta\Delta$ και $AK \parallel GE$ (Σχ. 16).



Σχήμα 16

Επειδή $AG = GB$, τα ορθογώνια $AGAK$, $GB\Theta\Lambda$ είναι ίσα. Αλλά $GB\Theta\Lambda = M\Theta HZ$.

Άρα $AGAK = M\Theta HZ$, οπότε αν σε αυτά προσθέσουμε το $\Gamma\Delta M\Lambda$, τότε το $(A\Delta MK)$ θα είναι ίσο με το εμβαδόν του γνόμονα $N\Theta O$. Αλλά το $A\Delta MK$ είναι το ορθογώνιο που ορίζουν τα τμήματα $A\Delta$, ΔB . Άρα ο γνόμονας $N\Theta O$ έχει εμβαδόν το εμβαδόν του ορθογωνίου που ορίζουν τα $A\Delta$, ΔB . Αν προσθέσουμε σ' αυτά και το τετράγωνο $\Lambda\Theta H\Xi$, που είναι τετράγωνο πλευράς $B\Gamma$, τότε το ορθογώνιο με πλευρές $A\Delta$, $B\Delta$ και το τετράγωνο πλευράς $B\Gamma$ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς $\Gamma\Delta$.

$$\text{Άρα } A\Delta \cdot B\Delta + B\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2.$$

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Σε πολλούς κώδικες (Βατικανού, Οξφόρδης κ.ά.) υπάρχει ακόμα η παρατήρηση:

"Εν τούτω δεικνυται ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία".

Η αναλογία αυτή είναι $ΑΔ : ΓΔ = ΓΔ : ΒΔ$, όπου το $ΓΔ$ είναι ο γεωμετρικός μέσος των $ΑΔ$ και $ΒΔ$.

Ο Heath παρατηρεί ότι στην περίπτωση της πρότασης 6 έχουμε ότι το ορθογώνιο των $ΑΔ$, $ΒΔ$ κατασκευάζεται από ένα δοσμένο τμήμα $ΑΒ$, αφού το προεκτείνουμε κατά $ΒΔ$, που και στην γλώσσα της Γεωμετρίας ισοδυναμεί με το πρόβλημα:

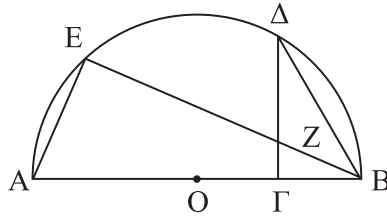
Να κατασκευασθεί ορθογώνιο με μια πλευρά a , που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δοσμένου τετραγώνου μείον το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την άλλη πλευρά του ορθογωνίου.

Πράγματι, αν θέσουμε $ΑΒ = a$, $ΒΔ = x$. Τότε η πρόταση 6 γράφεται $(a + x) \cdot x + \frac{a^2}{4} = ΓΔ^2$ ή $ax + x^2 = β^2$, όπου $β^2 = ΓΔ^2 - \frac{a^2}{4}$, δοσμένος αριθμός.

Η λύση του προβλήματος θεωρητικά ανάγεται στη λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής αυτής, η οποία υπάρχει και σε ένα απόσπασμα του έργου *"Τετραγωνισμός Μηνίσκων"* του Ιπποκράτη του Χίου. Το απόσπασμα διασώθηκε στο έργο του Ευδήμου *"Ιστορία της Γεωμετρίας"* και το αναφέρει ο Simplicius στα Σχόλια των *"Φυσικών"* του Αριστοτέλη [46].

Στο απόσπασμα αυτό ο Ιπποκράτης κάνει την παρακάτω κατασκευή:

Με διάμετρο την $ΑΒ$ γράφουμε ημικύκλιο κέντρου $Ο$ και έστω $Γ$ το μέσο του $ΟΒ$. Φέρνουμε $ΓΔ \perp ΑΒ$ και πάνω στο ημικύκλιο ορίζουμε σημείο $Ε$, ώστε η $ΕΒ$ να τέμνει την $ΓΔ$ στο $Ζ$ και $ΕΖ = R\sqrt{\frac{3}{2}}$, όπου R το μήκος της ακτίνας $ΟΑ$ (Σχ. 17).



Σχήμα 17

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΕΒ, ΖΓΒ έχουμε: $\frac{BZ}{B\Gamma} = \frac{AB}{BE}$ ή

$BE \cdot BZ = AB \cdot B\Gamma$. Δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου που ορίζουν τα τμήματα BE, BZ είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου που ορίζουν τα BA, BΓ.

$$\text{Αλλά } B\Delta = \sqrt{2R \cdot \frac{R}{2}} = R = OB, \text{ άρα } BE \cdot BZ = OB^2 = R^2.$$

Επειδή όμως $EZ = R\sqrt{\frac{3}{2}}$, αν θέσουμε $BZ = x$, θα πάρουμε

$$(R\sqrt{\frac{3}{2}} + x) \cdot x = R^2 \text{ ή } R\sqrt{\frac{3}{2}}x + x^2 = R^2 \quad (1)$$

οπότε έχουμε μια λύση της (1). Το τμήμα $R\sqrt{\frac{3}{2}}$ εύκολα κατασκευάζεται

επειδή, (Σχ. 17) είναι $\Gamma\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Gamma B = \frac{3}{4} R^2$ ή $\Gamma\Delta = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ και τμήμα

$R\sqrt{\frac{3}{2}}$ είναι η διαγώνιος τετραγώνου πλευράς $\Gamma\Delta$.

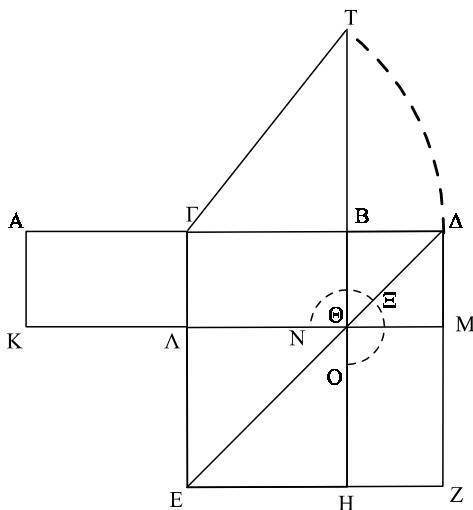
Δεν υπάρχει αμφιβολία, αναφέρει ο Heath, ότι ο Ιπποκράτης έλυσε την εξίσωση με τη γεωμετρική κατασκευή που δίνουμε παραπάνω και θα μπορούσε να είχε κάνει στην περίπτωση αυτή την εξής καθαρά μηχανική διαδικασία: Να τοποθετήσει το τμήμα EZ μεταξύ του ημικυκλίου και της $\Gamma\Delta$ και να το μετακινήσει ώστε τα E, Z, B να είναι συνευθειακά.

Ο Zeuthen το θεωρεί αυτό πιθανόν, γιατί, περιέργως, το απόσπασμα του Ιπποκράτη αναφέρει αμέσως μετά ότι πρέπει να ενώσουμε το B με το Z.

Για να λύσουμε την εξίσωση $ax + x^2 = \beta^2$ θα πρέπει να κατασκευάσουμε το ορθογώνιο ΑΔΜΚ (Σχ. 18) ή το γνώμονα ΝΞΟ, που έχει εμ-

βαδόν β^2 και έχει μια από τις πλευρές στο εσωτερικό της ορθής γωνίας ίση με $\Gamma\text{B} = \frac{1}{2}\alpha$.

Οπότε, γνωρίζοντας τα $(\frac{1}{2}\alpha)^2$ και β^2 έχουμε να υπολογίσουμε (I. 47) το $(\frac{1}{2}\alpha)^2 + \beta^2$.



Σχήμα 18

Για την κατασκευή αυτή ο R. Simson φέρει (Σχ. 18) $\text{BT} = \beta$ κάθετη στην AB και με κέντρο Γ και ακτίνα ΓT γράφει κύκλο c , που τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ . Τότε η $\text{B}\Delta = x$ κατασκευάσθηκε.

Τώρα το ορθογώνιο με πλευρές $\text{B}\Delta$, ΔA μαζί με το τετράγωνο πλευράς $\text{B}\Gamma$ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς $\Gamma\Delta$, δηλαδή το τετράγωνο πλευράς ΓT , δηλαδή με το άθροισμα των τετραγώνων με πλευρές $\text{B}\Gamma$, BT . Οπότε το ορθογώνιο των $\text{B}\Delta$, ΔA είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς BT , δηλαδή $ax + x^2 = \beta^2$.

Από τη σκοπιά του Ευκλείδη τα παραπάνω αποτελούν μόνο μια λύση του προβλήματος. Θα έπρεπε λοιπόν να λύσουμε και την εξίσωση $x^2 - ax = \beta^2$, η οποία λύνεται ανάλογα.

Οι αντίστροφες προτάσεις των 5 και 6 έχουν δοθεί από τον Πάππο στα Σχόλια των "Κωνικών":

Οι προτάσεις αυτές είναι:

α) *Αν Δ σημείο που διαιρεί το τμήμα AB σε άνισα μέρη και Γ άλλο σημείο του AB, τέτοιο ώστε το ορθογώνιο που ορίζουν τα τμήματα AD, AB μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΓΔ να είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς ΑΓ, τότε $ΑΓ = ΓΒ$.*

β) *Αν Δ σημείο στην προέκταση της AB και Γ σημείο της AB τέτοιο ώστε το ορθογώνιο που ορίζουν τα τμήματα AD, AB μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΒΓ να είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς ΓΔ, τότε $ΑΓ = ΓΒ$.*

Οι προτάσεις 5 και 6 είναι από τις πλέον ενδιαφέρουσες της "Αλγεβρικής Γεωμετρίας".

Μια αλγεβρική έκφραση των προτάσεων αυτών είναι:

$$\begin{array}{ccc} xy = \varepsilon & & xy = \varepsilon \\ & \text{και} & \\ x + y = k & & x - y = k \end{array}$$

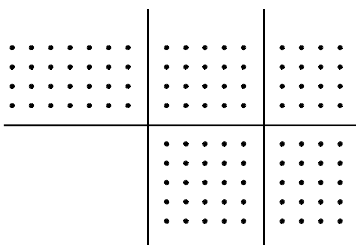
που είδαμε και στα σχόλια της I. 44.

Όπως έχουμε αναφέρει, οι εκφράσεις αυτές, που πρώτος ο Tannery το 1882 παρουσίασε, έδωσαν στον Zeuthen [165] την ιδέα της "Γεωμετρικής Αλγεβρας".

Το πόσο σημαντικές θεωρούσε ο Ευκλείδης τις προτάσεις αυτές φαίνεται και από το γεγονός ότι τις αποδεικνύει τρεις φορές. Μια φορά στο II βιβλίο, μια φορά στο βιβλίο VI (28, 29) και μια φορά στο βιβλίο "Δεδομένα" (84, 85).

Οι προτάσεις αυτές συνδέονται άμεσα με την πρόταση 11 (Χρυσή τομή) και τις προτάσεις IV.10, IV.11 (κατασκευή 5-γώνου).

Όπως και προηγουμένως αναφέραμε, ο Α. Szabo [136] θεωρεί ότι η πρόταση 6 αποτελεί λήμμα για την απόδειξη της πρότασης 11 και η 6 είναι δυνατόν να αποδειχθεί "δι' αριθμών" ή "δια ψήφων", όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



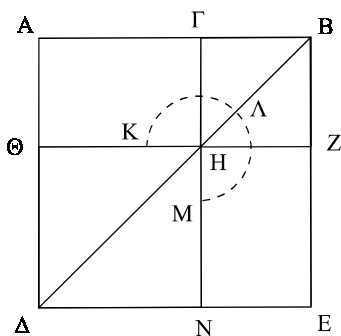
Πρόταση 7 (II. 7)

Αν Γ σημείο του τμήματος AB , τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές AB , $B\Gamma$ είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου με πλευρές AB , $B\Gamma$ και το τετράγωνο της AG .

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε το τετράγωνο $ABED$ και από το Γ φέρουμε $\Gamma N \parallel AD$ που τέμνει τη διαγώνιο BD στο H . Από το H φέρουμε $\Theta Z \parallel AB$ (Σχ. 19). Τα $B\Gamma HZ$ και $\Delta\Theta HN$ είναι τετράγωνα. Επειδή τα ορθογώνια $AGH\Theta$, $EZH N$ είναι ίσα, θα είναι

$$(AGH\Theta) + (B\Gamma HZ) = (EZHN) + (B\Gamma HZ) \text{ ή } (ABZ\Theta) = (B\Gamma NE).$$



Σχήμα 19

Επομένως

$$2 \cdot (ABZ\Theta) = 2AB \cdot B\Gamma = (ABZ\Theta) + (B\Gamma NE)$$

Αλλά τα ορθογώνια $ABZ\Theta$ και $B\Gamma EN$ είναι ισοδύναμα με το γνώμονα $K\Lambda M$ και το τετράγωνο $B\Gamma HZ$. Άρα ο γνώμονας $K\Lambda M$ και το τετράγωνο $B\Gamma HZ$ είναι διπλάσιο του ορθογωνίου $ABZ\Theta$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } (ABE\Delta) &= 2(AGH\Theta) + (B\Gamma HZ) + (\Delta NH\Theta) \quad \text{ή} \\ (ABE\Delta) + (B\Gamma HZ) &= 2(AGH\Theta) + 2(B\Gamma HZ) + (\Delta NH\Theta) \quad \text{ή} \\ (ABE\Delta) + (B\Gamma HZ) &= 2(ABZ\Theta) + (\Delta NH\Theta). \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \cdot B\Gamma + A\Gamma^2.$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Αν θέσουμε $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, τότε η πρόταση 7 γίνεται:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2.$$

Σε πολλούς κώδικες υπάρχουν αριθμητικά παραδείγματα.

Στον Φλωρεντινό υπάρχει το παράδειγμα:

Η AB είναι 12 μονάδες, η $AG = 8$ και η $B\Gamma = 4$.

$$\text{Τότε } 12^2 + 4^2 = 2 \cdot 12 \cdot 4 + 8^2 \quad \text{ή}$$

$$144 + 16 = 96 + 64 \quad \text{ή} \quad 160 = 160.$$

Μια άλλη αριθμητική επαλήθευση υπάρχει στον κώδικα της Βιέννης.

Πρόταση 8 (Π. 8)

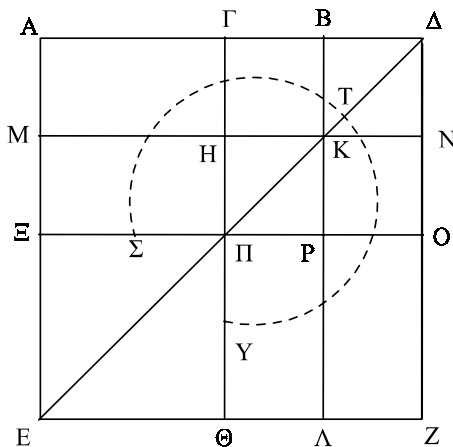
Έστω τμήμα AB και σημείο του Γ . Τότε το τετραπλάσιο του εμβადού του ορθογωνίου που ορίζει το AB και ένα από τα τμήματα, μαζί με το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά το άλλο από τα τμήματα αυτά, είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά το άθροισμα των τμημάτων που ορίζουν το ορθογώνιο.

Απόδειξη

Έστω τμήμα AB και σημείο του Γ . Στην προέκταση του AB θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $B\Gamma = B\Delta$ και κατασκευάζουμε το τετράγωνο $A\Delta ZE$. Φέρουμε $\Gamma\Theta \parallel AE \parallel B\Lambda$ και από τις τομές K , Π των $B\Lambda$, $\Gamma\Theta$ με τη διαγώνιο ΔE φέρουμε τις MN , ΞO παράλληλες στην $A\Delta$ (Σχ. 20).

Επειδή $B\Gamma = B\Delta$, $B\Gamma = HK$ και $B\Delta = KN$ θα είναι $HK = KN$.

Ομοίως $\Pi P = PO$.



Σχήμα 20

Άρα $\Gamma ΒΚΗ = ΒΔΝΚ$ και $ΗΚΡΠ = ΚΝΟΡ$. Αλλά $\Gamma ΒΚΗ = ΚΝΟΡ$ γιατί είναι συμπληρώματα του παραλληλογράμμου $\Gamma ΔΟΠ$. Άρα $ΒΔΝΚ = ΗΚΡΠ$. Δηλαδή $\Gamma ΒΚΗ + ΒΔΝΚ + ΚΝΟΡ + ΗΚΡΠ = 4\Gamma ΒΚΗ$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $ΑΓΗΜ + ΜΗΠΞ + ΠΡΛΘ + ΡΟΖΛ = 4ΑΓΗΜ$. Επομένως τα οκτώ παραλληλόγραμμα που περιέχει ο γνόμενος $\Sigma ΤΥ$ είναι τετραπλάσια του $ΑΒΚΜ$. Άρα το εμβαδό του γνόμονα

$$(\Sigma ΤΥ) = 4ΑΒ \cdot ΒΓ \quad \text{ή} \quad (\Sigma ΤΥ) + (\Xi ΠΘΕ) = 4ΑΒ \cdot ΒΓ + ΑΓ^2$$

$$\text{ή} \quad ΑΔ^2 = 4ΑΒ \cdot ΒΓ + ΑΓ^2. \text{ Άρα } (ΑΒ + ΒΓ)^2 = 4ΑΒ \cdot ΒΓ + ΑΓ^2$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Το σχήμα της πρότασης 8 αναφέρεται σε πολλούς κώδικες ως “διπλούν” σε σύγκριση με το σχήμα της πρότασης 7.

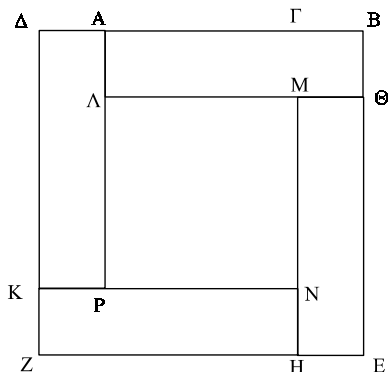
Αν θέσουμε $ΑΒ = \alpha$, $ΒΓ = \beta$, η πρόταση 8 γίνεται:

$$4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2,$$

από την οποία προκύπτει η γνωστή και πολύ σημαντική ανισότητα $4\alpha\beta < (\alpha + \beta)^2$, αφού $\alpha \neq \beta$.

Η πρόταση 8, όπως αναφέρει ο Πάππος, χρησιμοποιείται από τον ίδιο τον Ευκλείδη στο βιβλίο του "Δεδομένα" (πρόταση 86), αλλά και για την απόδειξη βασικών ιδιοτήτων της παραβολής. Σε διάφορους κώδικες υπάρχουν και άλλες αποδείξεις (Βιέννης κ.ά). Μια από αυτές έγινε πιθανόν από μαθητές του Ευκλείδη και είναι παρεμφερής με αυτή που αναφέραμε.

Μια άλλη απόδειξη, την οποία ο Heath [80] χαρακτηρίζει "ημιαλγεβρική", αναφέρεται στις πρώτες μεταφράσεις των *Στοιχείων* και αποδίδεται στον Clavius και άλλους μεταφραστές.



Σχήμα 21

Η απόδειξη αυτή έχει ως εξής:

Προεκτείνουμε το ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε τμήμα ΑΔ = ΒΓ (Σχ. 21).

Επειδή $4(ΑΒ) \cdot (ΒΓ) = (ΑΒΘΛ) + (ΑΔΚΡ) + (ΚΖΗΝ) + (ΗΕΘΜ)$, ενώ $(ΑΓ)^2 = (ΛΜΝΡ)$, οπότε $(ΑΒ + ΒΓ)^2 = 4ΑΒ \cdot ΒΓ + ΑΓ^2$.

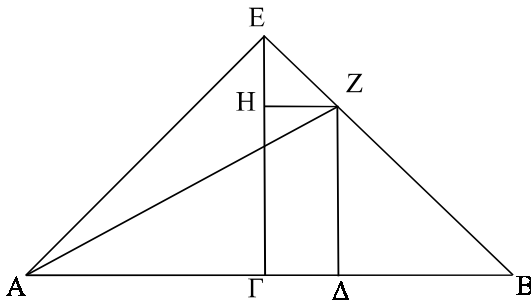
Τέλος, παρατηρούμε ότι οι προτάσεις 4 μέχρι 8 ουσιαστικά είναι οι μόνες προτάσεις του βιβλίου ΙΙ που αναφέρονται στον γνώμονα.

Πρόταση 9 (ΙΙ. 9)

Αν Γ το μέσο του τμήματος ΑΒ και Δ σημείο του τμήματος, τότε τα εμβαδά των τετραγώνων με πλευρές τα τμήματα τα οποία ορίζει το Δ έχουν άθροισμα διπλάσιο από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τα ΓΔ και το ήμισυ του τμήματος ΑΒ.

Απόδειξη

Φέρουμε κάθετο στην ΑΒ στο σημείο Γ σ’ αυτήν και παίρνουμε $ΓΕ = ΑΓ = ΓΒ$ (Σχ.22). Φέρουμε τις ΕΑ, ΕΒ και $ΖΔ // ΓΕ$ και $ΖΗ // ΑΒ$, καθώς και την ΑΖ.



Σχήμα 22

Επειδή $ΑΓ = ΓΕ$ και $\hat{ΑΓΕ} = 90^\circ$, θα είναι $\hat{ΑΕΓ} = \hat{ΕΑΓ} = 45^\circ$. Θα είναι επίσης $\hat{ΒΕΓ} = \hat{ΕΒΓ} = 45^\circ$. Άρα $\hat{ΑΕΒ} = 90^\circ$.

Ακόμα, $\hat{ΗΕΖ} = 45^\circ$, $\hat{ΕΗΖ} = 90^\circ$, γιατί $\hat{ΕΗΖ} = \hat{ΕΓΒ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Άρα και $\hat{ΕΖΗ} = 45^\circ$, οπότε $ΕΗ = ΖΗ$.

Επίσης, αφού $\hat{ΓΒΕ} = 45^\circ$ και $\hat{ΒΔΖ} = 90^\circ$, εφόσον $\hat{ΒΔΖ} = \hat{ΒΓΕ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, θα είναι $\hat{ΔΖΒ} = 45^\circ$, άρα $ΔΒ = ΔΖ$. Και αφού $ΑΓ = ΓΕ$, θα είναι $ΑΓ^2 = ΓΕ^2$, άρα $2ΑΓ^2 = ΑΓ^2 + ΓΕ^2 = ΑΕ^2$ ή $ΑΕ^2 = 2ΑΓ^2$.

Ομοίως, αφού $ΕΗ = ΖΗ$, θα είναι $ΕΗ^2 = ΖΗ^2$. Άρα $ΕΗ^2 + ΖΗ^2 = 2ΖΗ^2 = ΕΖ^2 = 2ΓΔ^2$ ή $ΕΖ^2 = 2ΓΔ^2$.

Άρα $ΑΕ^2 + ΕΖ^2 = 2(ΑΓ^2 + ΓΔ^2)$ και αφού $ΑΕ^2 + ΕΖ^2 = ΑΖ^2$, θα είναι $ΑΔ^2 + ΔΖ^2 = 2(ΑΓ^2 + ΓΔ^2)$.

Άρα: $ΑΔ^2 + ΔΒ^2 = 2(ΑΓ^2 + ΓΔ^2)$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Κατ’ αρχήν παρατηρούμε ότι η πρόταση 9 είναι η πρώτη πρόταση του βιβλίου ΙΙ, όπου γίνεται χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος, δηλαδή της πρότασης Ι. 47.

Επίσης είναι η πρώτη "μετρική" απόδειξη, δηλαδή δεν κατασκευάζουμε τα τετράγωνα και τα ορθογώνια που απαιτούνται για την απόδειξη της πρότασης, αλλά γίνεται χρήση μετρικών σχέσεων.

Αν θέσουμε $AB = 2a$, $AD = x$, $DB = y$, η πρόταση 9 γράφεται :

$$x^2 + y^2 = 2 \left[\left(\frac{x+y}{2} \right)^2 + \left(\frac{x-y}{2} \right)^2 \right].$$

Γίνεται φανερό ότι λόγω συμμετρίας, η πρόταση 9 ισχύει είτε το Δ βρίσκεται μεταξύ των Γ , B είτε όχι.

Παρατηρούμε ακόμα ότι η πρόταση 9 ισχύει και όταν το Δ βρίσκεται στην προέκταση του AB .

Αλγεβρικά η πρόταση 9 θα μπορούσε να αποδειχθεί με τη βοήθεια των προτάσεων 4 και 7, όπου έχουμε:

Πρόταση 4: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ και

Πρόταση 7: $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ ή

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} [(x+y)^2 + (x-y)^2] = 2 \left[\left(\frac{x+y}{2} \right)^2 + \left(\frac{x-y}{2} \right)^2 \right].$$

Βέβαια, με τη βοήθεια των προτάσεων 4 και 7 η πρόταση 9 μπορεί να αποδειχθεί και γεωμετρικά. Έτσι π.χ. από την πρόταση 4 έχουμε :

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta \quad (1)$$

Από την πρόταση 7 έχουμε :

$$\Gamma B^2 + \Gamma\Delta^2 = 2\Gamma B \cdot \Gamma\Delta + B\Delta^2 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) παίρνουμε ότι:

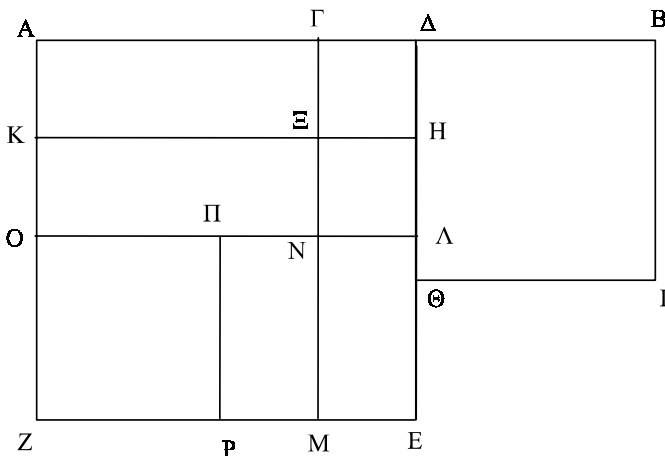
$$A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2\Gamma B \cdot \Gamma\Delta = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta.$$

Αλλά $A\Gamma = \Gamma B$, οπότε τα ορθογώνια που ορίζουν οι ΓB , $\Gamma\Delta$ και $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ είναι ίσα, άρα:

$$A\Delta^2 + B\Delta^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2).$$

Η πρόταση 9 μπορεί να αποδειχθεί και με τη βοήθεια των προτάσεων 1-8.

Έτσι κατάσκευάζουμε το τετράγωνο ΑΔΕΖ και το τετράγωνο ΔΒΙΘ (Σχ. 23).



Σχήμα 23

Παίρνουμε $\Gamma\Delta = \Delta\text{H}$ και από το H φέρουμε παράλληλη HK στην AB. Φέρουμε παράλληλη ΓΜ στην AZ και παίρνουμε $\text{N}\Pi = \Gamma\Delta$. Φέρουμε ακόμη NO παράλληλη στην AB και ΠΡ παράλληλη στην AZ.

Εύκολα τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση 9.

Σε διάφορους κώδικες (Φλωρεντινός, Βιέννης κ.ά.) υπάρχουν και αριθμητικά παραδείγματα. Π.χ. έστω $AB = 12$, $A\Gamma = 6$ και $\Delta\Gamma = 2$, $\Delta B = 4$. Τότε $8^2 + 4^2 = 2(6^2 + 2^2)$ ή $64 + 16 = 2(36 + 4)$ ή $80 = 80$.

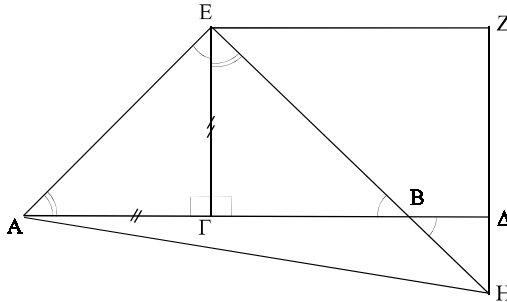
Πρόταση 10 (Π. 10)

Αν Γ το μέσο του τμήματος AB και Δ σημείο στην προέκταση του AB, τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ΑΔ, ΒΔ είναι διπλάσιο από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ΑΓ, ΓΔ.

Απόδειξη

Φέρουμε κάθετη στην AB στο σημείο Γ και παίρνουμε πάνω στην κάθετη τμήμα $\Gamma\text{E} = A\Gamma = \Gamma\text{B}$.

Φέρουμε τις EA, EB και $EZ \parallel AB$, $\Delta Z \parallel \Gamma\text{E}$ (Σχ. 24).



Σχήμα 24

Είναι $\hat{G}\hat{E}Z + \hat{E}Z\hat{\Delta} = 180^\circ$, επομένως $\hat{Z}\hat{E}B + \hat{E}Z\hat{\Delta} < 180^\circ$. Άρα οι EB, ZΔ τέμνονται στο Η (5^ο αίτημα).

Φέρουμε την ΑΗ. Αφού ΓΑ = ΓΕ και $\hat{A}\hat{G}E = 90^\circ$, θα είναι $\hat{E}\hat{A}\hat{G} = \hat{A}\hat{E}\hat{G} = 45^\circ$. Για τον ίδιο λόγο $\hat{G}\hat{E}B = \hat{E}\hat{B}\hat{G} = 45^\circ$, άρα $\hat{A}\hat{E}B = 90^\circ$. Αλλά $\hat{E}\hat{B}\hat{G} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{H} = 45^\circ$ και $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{H} = 90^\circ$, οπότε ΒΔ = ΔΗ. Επίσης, αφού $\hat{E}\hat{H}Z = 45^\circ$ και $\hat{E}\hat{Z}\hat{H} = 90^\circ$, θα είναι $\hat{Z}\hat{E}\hat{H} = 45^\circ$. Δηλαδή $\hat{E}\hat{H}Z = \hat{Z}\hat{E}\hat{H}$. Άρα ΗΖ = ΕΖ και αφού ΕΓ = ΑΓ, θα είναι $E\Gamma^2 = A\Gamma^2$.

$$\text{Άρα } E\Gamma^2 + G\Delta^2 = 2A\Gamma^2 = AE^2.$$

$$\text{Για τον ίδιο λόγο } 2ZE^2 = ZE^2 + ZH^2 = EH^2 = 2G\Delta^2$$

$$\text{Άρα } 2A\Gamma^2 + 2G\Delta^2 = AE^2 + EH^2 = AH^2 = A\Delta^2 + \Delta H^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2.$$

$$\text{Επομένως: } A\Delta^2 + B\Delta^2 = 2(A\Gamma^2 + G\Delta^2).$$

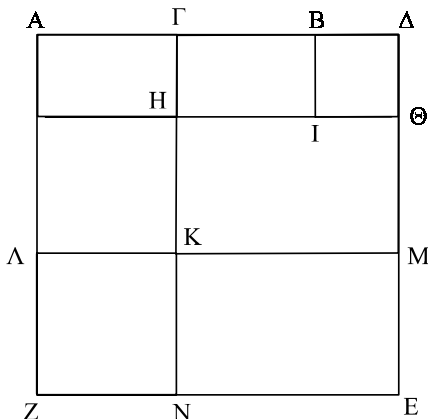
ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Αν θέσουμε $A\Gamma = \alpha$, $\Delta\Gamma = \beta$ η πρόταση 10 γράφεται

$$(\alpha + \beta)^2 + (\beta - \alpha)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

και εύκολα θα μπορούσε να αποδειχθεί αλγεβρικά με τη βοήθεια των προτάσεων 4 και 7. Έτσι γίνεται φανερό ότι η πρόταση 10 ουσιαστικά πρόκειται για διαφορετική έκφραση της πρότασης 9. Θα μπορούσε λοιπόν να αποδειχθεί όπως και η πρόταση 9 με καθαρά γεωμετρικό τρόπο:



Σχήμα 25

Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $AΔEZ$ και $BΔΘI$ με πλευρές τις $AΔ$ και $BΔ$ αντίστοιχα (Σχ. 25). Επίσης, κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $KΛΖN$ και $ΓΔMK$ με πλευρές τις $AΓ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα. Το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από το σχήμα 25.

Όπως για τις προηγούμενες προτάσεις έτσι και για την πρόταση 10 πολλοί ιστορικοί πιστεύουν ότι χρησίμευε τόσο στη λύση εξισώσεων όσο στην προσεγγιστική κατασκευή λόγων.

Ο Zeuthen, όπως ήδη αναφέραμε, θεωρούσε ότι οι προτάσεις 9, 10 χρησίμευαν στους αρχαίους Έλληνες για την αντιμετώπιση Διοφαντικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα, ο Zeuthen παρατήρησε ότι η πρόταση 9 δίνει

$$AΔ^2 + BΔ^2 = 2(AΓ^2 + ΓΔ^2) \quad \text{ή} \quad AΔ^2 - 2AΓ^2 = 2ΓΔ^2 - BΔ^2$$

και για $ΓΔ = x$, $BΔ = y$ παίρνουμε

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι αν οι αριθμοί x , y ικανοποιούν τη μια από τις εξισώσεις

$$2x^2 - y^2 = \pm 1 \quad (2)$$

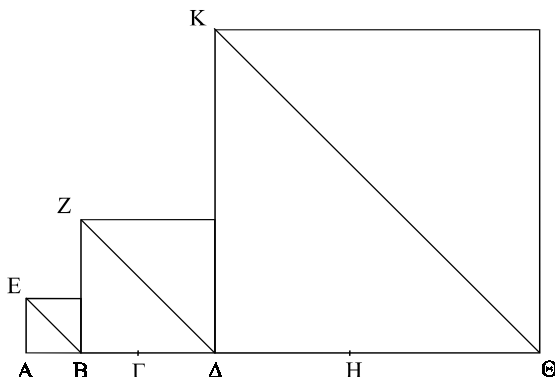
τότε οι αριθμοί $x + y$, $2x + y$ θα ικανοποιούν την άλλη εξίσωση.

Π.χ. αν $2x^2 - y^2 = -1$, τότε:

$$\begin{aligned} 2(x + y)^2 - (2x + y)^2 &= 2(x^2 + 2xy + y^2) - (4x^2 + 4xy + y^2) = \\ &= -2x^2 + y^2 = -(-1) = 1. \end{aligned}$$

Έτσι οι προτάσεις 9, 10 μας δίνουν γενική λύση, καθώς και τον τύπο που δίνει διαδοχικές τιμές αυτών που ονομάζουμε *πλευρικούς* και *διαγώνιους* αριθμούς.

Ο Πρόκλος στο βιβλίο του για την "*Πολιτεία*" του Πλάτωνα [106], χρησιμοποιεί την πρόταση 10 για την κατασκευή των πλευρικών και διαγώνιων αριθμών.



Σχήμα 26

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τα τετράγωνα με πλευρές $AB = \alpha_1$, $BD = \alpha_2$, $\Delta\Theta = \alpha_3 \dots$ και διαγώνιες $BE = \delta_1$, $\Delta Z = \delta_2$, $\Theta K = \delta_3$, όπου $BD = \alpha_2 = \alpha_1 + \delta_1$, $\delta_2 = \Delta Z = 2\alpha_1 + \delta_1 \dots$ (Σχ. 26), τότε θα ισχύει: Αν α_1 και δ_1 η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου, τότε τα τμήματα $\alpha_1 + \delta_1$, $2\alpha_1 + \delta_1$ είναι η πλευρά και η διαγώνιος ενός διαδοχικού τετραγώνου.

Πράγματι, αρκεί να αποδείξουμε ότι $2(\alpha_1 + \delta_1)^2 = (2\alpha_1 + \delta_1)^2$ ή $2(\alpha_1^2 + 2\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2) = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2$ ή $\delta_1^2 = 2\alpha_1^2$, που ισχύει, αφού οι α_1 , δ_1 είναι πλευρά και διαγώνιος τετραγώνου. (Βλέπε Θ. Εξαρχάκος, "*Εισαγωγή στα Μαθηματικά*", τόμος Β', σελ.12-13).

Πρόταση 11 (Π. 11) (Κατασκευή της "συνεχούς διαίρεσης")

Να διαιρεθεί δοσμένο τμήμα ώστε το ορθογώνιο που ορίζει το τμήμα και το ένα μέρος του να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το άλλο μέρος.

Απόδειξη

Ζητάμε να προσδιορίσουμε σημείο Θ του AB, ώστε $AB \cdot \Theta B = A\Theta^2$. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ABΔΓ και το μέσο E του ΑΓ. Φέ-

ρούμε την ΒΕ και στην προέκταση του ΓΑ παίρνουμε $EZ = EB$ και κατασκευάζουμε το τετράγωνο $AZH\Theta$ (Σχ. 27). Θα αποδείξουμε ότι το Θ είναι το ζητούμενο σημείο.

Προεκτείνουμε την $H\Theta$, η οποία τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο Κ. Σύμφωνα με την πρόταση 6, το ορθογώνιο που ορίζουν οι ΓZ , ZA μαζί με το τετράγωνο πλευράς AE θα είναι ισόδυναμο με το τετράγωνο πλευράς EZ , δηλαδή:

$$\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = EZ^2 \quad (1)$$

Αλλά $EZ = EB$, άρα η (1) γίνεται

$$\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = EB^2 \quad (2)$$

Όμως $EB^2 = EA^2 + AB^2$ (Πυθαγόρειο θεώρημα I. 47). Άρα

$$\begin{aligned} \Gamma Z \cdot ZA + AE^2 &= EA^2 + AB^2 \quad \text{ή} \quad \Gamma Z \cdot ZA = AB^2 \quad \text{ή} \\ (ZHK\Gamma) &= (AB\Delta\Gamma) \quad (3). \end{aligned}$$

Αν αφαιρέσουμε από τα μέλη της (3) το $(A\Theta K\Gamma)$, θα πάρουμε $(AZH\Theta) = (\Theta B\Delta K)$ ή $A\Theta^2 = AB \cdot B\Theta$, δηλαδή το Θ είναι το ζητούμενο σημείο.

ὅ.ξ.δ.

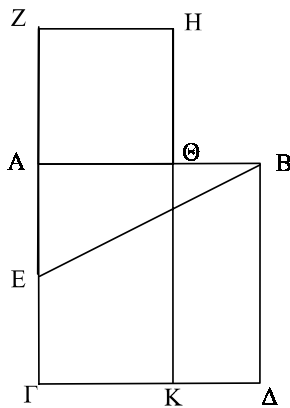
Σχόλια

Η πρόταση αυτή είναι ουσιαστικά η γεωμετρική μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης

$$a(a-x) = x^2 \quad \text{ή} \quad x^2 + ax = a^2 \quad (1)$$

που προκύπτει αν θέσουμε $AB = a$, $A\Theta = x$, την οποία συνεπώς οι Πυθαγόρειοι φαίνεται ότι γνώριζαν.

Η λύση της εξίσωσης (1), όπως θα διαπιστώσουμε στο βιβλίο IV (προτάσεις 10 και 11), έχει σχέση και με την κατασκευή κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R , δηλαδή με τη διαίρεση ενός κύκλου σε πέντε ίσα τόξα.



Σχήμα 27

Βεβαίως, θα μπορούσαμε να επιλύσουμε την εξίσωση αυτή με τη βοήθεια της πρότασης 6.

Σύμφωνα με τον ορισμό 3 του βιβλίου VI, το σημείο Θ λέμε ότι διαιρεί το AB σε **μέσο** και **άκρο λόγο**.

Στην πρόταση 30 του βιβλίου VI γίνεται η απόδειξη της πρότασης 11 με κατασκευαστικό τρόπο.

Επίσης, στην πρόταση 8 του βιβλίου XIII αποδεικνύεται ότι τα τμήματα στα οποία η μία διαγώνιος τέμνεται από την άλλη ικανοποιούν την εξίσωση (1).

Η πρόταση 11 ονομάζεται και κατασκευή της "συνεχούς διαίρεσης", αφού η σχέση $\frac{AB}{A\Theta} = \frac{A\Theta}{\Theta B}$ δίνει συνεχή αναλογία.

Στα σχόλια του Βατικανού κώδικα διαβάζουμε: "...ὅτι οὐ δυνατόν δι' ἀριθμῶν δειχθῆναι τό πρόβλημα", δηλαδή ότι θεωρείται απαραίτητη η θεωρητική απόδειξη.

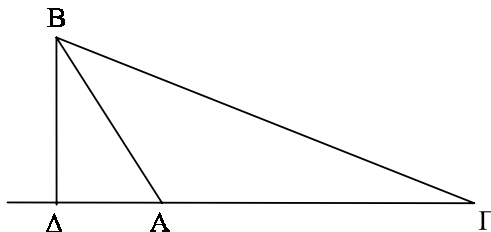
Πρόταση 12 (II. 12)

Σε κάθε αμβλυγώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών που περιέχουν τη γωνία κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας επί την προβολή της άλλης σ' αυτήν.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι αν $\hat{A} > 90^\circ$, τότε:

$$BI^2 = AB^2 + AI^2 + 2AI \cdot AD \quad (1)$$



Σχήμα 28

Αφού (Σχ. 28) το A είναι σημείο της $\Delta\Gamma$, θα είναι

$$\Gamma\Delta^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΔ}^2 + 2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ} \text{ (πρόταση 4) } \quad \text{ή}$$

$$\Gamma\Delta^2 + \text{ΒΔ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΔ}^2 + \text{ΒΔ}^2 + 2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ} \quad (2)$$

$$\text{Όμως (I. 47) } \text{ΒΓ}^2 = \Gamma\Delta^2 + \text{ΒΔ}^2 \text{ και}$$

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΒΔ}^2 \quad (3)$$

Λόγω της (2) και της (3) παίρνουμε:

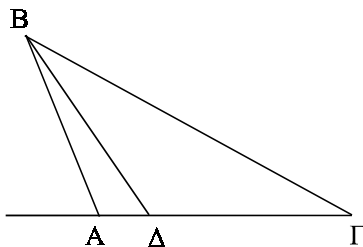
$$\text{ΒΓ}^2 = \Gamma\Delta^2 + \text{ΒΔ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 + 2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ}, \text{ δηλαδή την (1).}$$

ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή έχει επικρατήσει να ονομάζεται **"θεώρημα της αμβλείας γωνίας"** και αποτελεί γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος (Πρόταση 47 του βιβλίου I).

Στον Φλωρεντινό κώδικα, καθώς και σε αρκετούς άλλους, υπάρχει το εξής σχόλιο, μάλλον του Αρεταίου: *"Πόθεν ὅτι ἡ ΒΔ κάθετος οὐ πίπτει ἐντός τοῦ ΑΒΓ τριγώνου;"*



Σχήμα 29

Η απάντηση που δίνει ο σχολιαστής στην ερώτηση αυτή είναι ότι αν υποθέσουμε ότι η κάθετη ΒΔ στην ΑΓ βρίσκεται στο εσωτερικό του ΑΒΓ (Σχ. 29), τότε $\hat{\text{ΒΑΔ}} + \hat{\text{ΒΔΑ}} > 180^\circ$, που είναι άτοπο.

Στον ίδιο κώδικα, καθώς και σε άλλους, υπάρχουν και αριθμητικά παραδείγματα για την επαλήθευση της πρότασης 12.

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη της πρότασης διαφέρει από τις αποδείξεις που χρησιμοποιούνται σήμερα. Μια συνηθισμένη απόδειξη είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \text{ΒΓ}^2 &= \text{ΒΔ}^2 + \Delta\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + \text{ΑΒ}^2 - \Delta\text{Α}^2 = \text{ΑΒ}^2 + (\Delta\Gamma - \Delta\text{Α})(\Delta\Gamma + \Delta\text{Α}) = \\ &= \text{ΑΒ}^2 + \Delta\Gamma(2\Delta\text{Α} + \Delta\Gamma) = \text{ΑΒ}^2 + \Delta\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\text{Α}. \end{aligned}$$

Τέτοιες αποδείξεις άρχισαν να εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια από τις αρχές του 17^{ου} αιώνα.

Υπάρχει και η αντίστροφη πρόταση της πρότασης 12, που αποδίδεται από τον al-Nayrizi στον Ήρωνα [39]:

Αν για μια πλευρά ενός τριγώνου ισχύει ότι το τετράγωνο της πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών συν το διπλάσιο του γινομένου της μιας από τις πλευρές επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν, τότε απέναντι από την πλευρά αυτή το τρίγωνο έχει αμβλεία γωνία.

Αποδείξεις της πρότασης αυτής έχουμε δυο ειδών:

α) Με τη βοήθεια των του Πυθαγορείου θεωρήματος και των προτάσεων 12 και 13 και

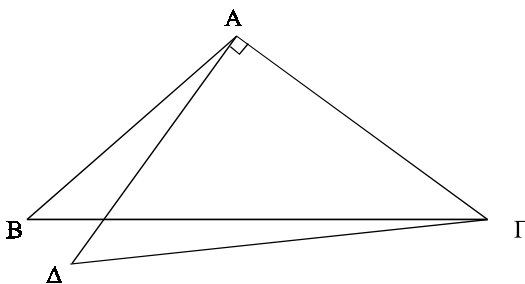
β) Με τη βοήθεια διαιρέσεως των σχημάτων.

Εδώ θα αποδείξουμε μια πιο αδύνατη πρόταση από την αντίστροφη της πρότασης 12. Θα δείξουμε ότι:

Αν το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά αυτή είναι αμβλεία.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΒΓ}^2 > \text{ΒΑ}^2 + \Delta\Gamma^2$.

Φέρουμε την ΑΔ ⊥ ΑΓ. Παίρνουμε τμήμα ΑΔ = ΑΒ και φέρουμε την ΔΓ (Σχ. 30).



Σχήμα 30

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Lambda\Gamma$ έχουμε

$$\Delta\Gamma^2 = \Delta\Lambda^2 + \Lambda\Gamma^2 = \Lambda\Gamma^2 + \Lambda\Gamma^2.$$

Επομένως $\Lambda\Gamma^2 > \Delta\Gamma^2$.

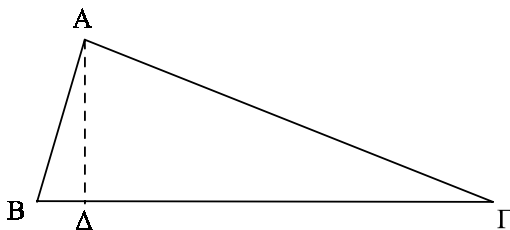
Άρα τα τρίγωνα $\Lambda\Delta\Gamma$ και $\Delta\Lambda\Gamma$ έχουν δύο πλευρές ίσες αντιστοίχως και τις τρίτες άνισες. Επομένως (I. 25) $\hat{\Delta\Lambda\Gamma} = 90^\circ < \hat{\Lambda\Delta\Gamma}$.

Άρα η $\hat{\Lambda\Delta\Gamma}$ είναι αμβλεία.

Πρόταση 13 (II. 13)

Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης επ’ αυτή.

Απόδειξη



Σχήμα 31

Έστω τρίγωνο $\Lambda\Delta\Gamma$ με $\hat{\Delta\Lambda\Gamma} < 90^\circ$ (Σχ. 31). Θα αποδείξουμε ότι:

$$\Lambda\Gamma^2 = \Lambda\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Lambda \quad (1).$$

Επειδή το Δ είναι σημείο της $\Delta\Gamma$, θα είναι
 $\Delta\Gamma^2 + \Delta\Lambda^2 = 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Lambda + \Delta\Lambda^2$ (II.7) ή $\Delta\Gamma^2 + \Delta\Lambda^2 + \Delta\Lambda^2 =$
 $= 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Lambda + \Delta\Lambda^2 + \Delta\Lambda^2$ ή $\Delta\Gamma^2 + \Lambda\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Lambda$.
 Άρα $\Lambda\Gamma^2 = \Lambda\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Lambda$
 ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή έχει επικρατήσει να ονομάζεται *"θεώρημα της οξείας γωνίας"* και αποτελεί γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Επειδή είναι προφανές ότι κάθε τρίγωνο έχει μια τουλάχιστον οξεία γωνία, η πρόταση 13 θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

"Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, το τετράγωνο μιας πλευράς που βρίσκεται απέναντι από μια οξεία γωνία, . . ."

Την παραπάνω παρατήρηση κάνει ο Αρεταίος και υπάρχει σε αρκετούς κώδικες, π.χ. στον κώδικα του Βατικανού κ.ά.

Σήμερα οι προτάσεις 12, 13 συνήθως παρουσιάζονται ενοποιημένες με τη μορφή του θεωρήματος του συνημιτόνου:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos \alpha.$$

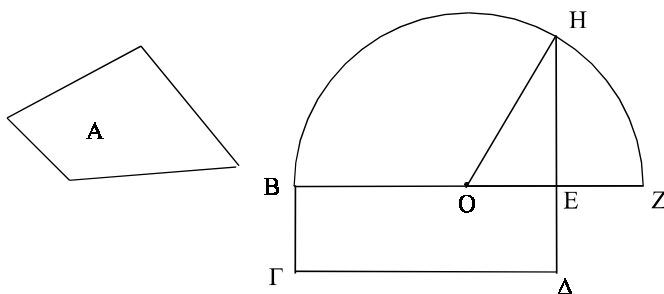
4. Τετραγωνισμός ευθύγραμμου σχήματος

Πρόταση 14 (Π. 14)

Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο προς δεδομένο ευθύγραμμο σχήμα.

Κατασκευή

Έστω Α το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα (Σχ. 32). Πρέπει να κατασκευάσουμε τετράγωνο ισοδύναμο προς το Α (πρόταση Ι. 45).



Σχήμα 32

Αρχικά κατάκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ ισεμβαδικό με το σχήμα Α. Αν $BE = ED$, τότε το τετράγωνο είναι το ΒΓΔΕ.

Αν $BE > B\Gamma$, τότε στην προέκταση της BE λαμβάνουμε τμήμα $EZ = BE$ και έστω O το μέσον της BZ . Με κέντρο O και ακτίνα BO γράφουμε ημικύκλιο εκτός του $B\Gamma\Delta E$ και προεκτείνουμε την ED μέχρις ότου τμήσει το ημικύκλιο στο H .

Όμως το O είναι μέσο και το E τυχαίο σημείο της BZ , οπότε (II. 5) θα έχουμε:

$$BE \cdot EZ + EO^2 = OZ^2 \quad (1)$$

Αλλά $OZ = OH$ και η (1) γίνεται

$$BE \cdot EZ = OH^2 - OE^2 = HE^2 \quad (2)$$

Ωστε το ορθογώνιο που ορίζουν οι BE , EZ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς EH .

Αλλά το ορθογώνιο είναι ισοδύναμο με το A , άρα το A είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς EH .

Άρα $(A) = (B\Gamma\Delta E) = EH^2$.

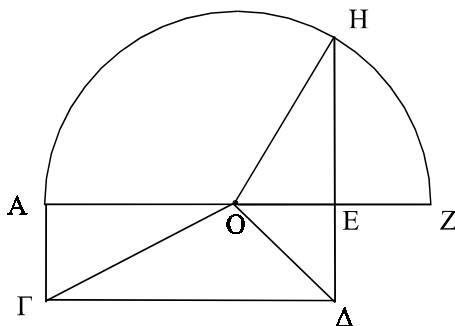
ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Μια σημαντική παρατήρηση σχετικά με το γεγονός ότι το Δ δεν είναι δυνατό να ανήκει στον κύκλο (O , OB) αναφέρεται στον κώδικα B (D' Orville) που γράφτηκε το 888 μ.Χ.

Ο σχολιαστής ερωτά γιατί ο κύκλος δε διέρχεται από το σημείο Δ και δίνει την απάντηση:

Αν αυτό συνέβαινε, τότε $OD = OH = OZ$ (Σχ. 33)
ή $OD = OE + EZ = OE + ED$, πράγμα άτοπο.



Σχήμα 33

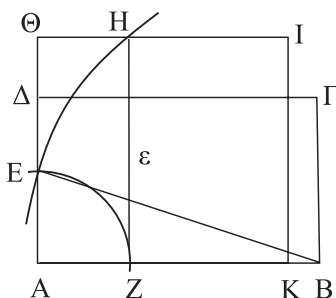
Ο σχολιαστής ερωτά πάλι, γιατί ο κύκλος δεν περνά από το Γ; Και απαντά ότι αν συνέβαινε αυτό, θα έπρεπε $ΟΓ = ΟΑ$, πράγμα άτοπο, γιατί $\hat{A} = 90^\circ$, ενώ $\hat{ΟΓΑ} < 90^\circ$.

Ο μεταφραστής των *Στοιχείων* R. Simson σε σχόλιό του αναφέρει ότι δε χρειάζεται να γίνει διάκριση, αν $BE > BG$, αφού και στην αντίθετη περίπτωση η κατασκευή είναι δυνατή. Θα συμφωνήσουμε βεβαίως και θα παρατηρήσουμε ότι μια τέτοια διάκριση είναι έξω από το πνεύμα του ευκλείδειου κειμένου και μάλλον είναι παρεμβολή, η οποία έγινε αργότερα.

Η πρόταση 14 μας δίνει μια έξοχη και πλήρη λύση του προβλήματος του τετραγωνισμού ευθυγράμμου σχήματος και προσδίδει στην πρόταση I. 45 μια εντελώς ειδική σημασία.

Πολλοί συγγραφείς του Μεσαίωνα και του τέλους του 16^{ου} αιώνα δίνουν και άλλες λύσεις της πρότασης 14. Θα δώσουμε την απόδειξη που έδωσε ο S. Marolois το 1572.

Έστω το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 34) με $AD < AB$ και E το μέσο του AD . Παίρνουμε $AZ = AE$ και φέρνουμε κάθετη ε στο Z πάνω στην AB . Ο κύκλος (B, BE) τέμνει την ε στο H . Το $A\Theta IK$ είναι το ζητούμενο τετράγωνο.



Σχήμα 34

Η "απόδειξη" που δίνει στη συνέχεια ο Marolois είναι αριθμητική. Θεωρεί ότι $AB = 12,5$, $AG = 4,5$ και υπολογίζει ότι $ZH \cong 7,5$. Τότε $(AB\Gamma\Delta) = 12,5 \cdot 4,5 = 56,25$ και $ZH^2 = 7,5 \cdot 7,5 = 56,25$.

Κεφάλαιο 3

BIBΛΙΟ III

Ο κύκλος και τα στοιχεία του

1. Εισαγωγή

Όπως διαπιστώσαμε μελετώντας τα δύο πρώτα βιβλία των *Στοιχείων*, δε συναντήσαμε πουθενά σ' αυτά πρόταση που να αναφέρεται σε κύκλο ή σε στοιχεία ενός κύκλου. Χρησιμοποιήσαμε μόνο την έννοια *κύκλος* για την επίλυση κάποιων κατασκευών, όπως π.χ. στις προτάσεις 1 και 2 του βιβλίου I.

Η μελέτη του κύκλου θα γίνει στα βιβλία III και IV, στα οποία οι 51 από τις 53 συνολικά προτάσεις αναφέρονται στον κύκλο και τα στοιχεία του.

Πάντως, το βιβλίο III δεν έχει τίποτα από την ομοιογένεια του βιβλίου II, ούτε από τη συνοχή των διάφορων μερών του βιβλίου I. Αναφέρεται σε βασικές γεωμετρικές ιδιότητες κύκλων που εφάπτονται, σε σχέσεις μεταξύ εγγεγραμμένων και επίκεντρων γωνιών, σε γωνίες μεταξύ χορδής και εφαπτομένης, σε σχέσεις μεταξύ των απέναντι γωνιών τετραπλεύρου εγγεγραμμένου σε κύκλο, σε μετρικές σχέσεις στον κύκλο κ.ά.

Το βιβλίο III περιέχει 37 προτάσεις, τις οποίες μπορούμε να διαιρέσουμε σε 4 μέρη:

- α) Το πρώτο μέρος περιέχει ό,τι έχει σχέση με χορδές τεμνόμενων ή εφαπτόμενων κύκλων και αποτελείται από τις προτάσεις 1 μέχρι 13.
- β) Το δεύτερο μέρος περιέχει σχέσεις σχετικά με χορδές και εφαπτομένες και αποτελείται από τις προτάσεις 14 μέχρι 19.
- γ) Το τρίτο μέρος περιέχει σχέσεις με επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες, καθώς και σχέσεις με γωνίες χορδής και εφαπτομένης (προτάσεις 20 μέχρι 34).
- δ) Το τέταρτο μέρος περιέχει μετρικές σχέσεις στον κύκλο (προτάσεις 35 μέχρι 37).

Μία πιο λεπτομερής, κατά τη γνώμη μας, ταξινόμηση των προτάσεων του βιβλίου ΙΙΙ είναι η εξής:

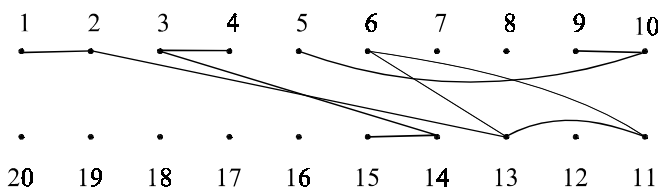
- α) Οι προτάσεις 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 14 και 15 αναφέρονται σε στοιχειώδεις ιδιότητες των ευθειών μέσα στον κύκλο και χαρακτηριστικές ιδιότητες του κέντρου του κύκλου.
- β) Οι προτάσεις 5, 6, 10, 11, 12 και 13 αναφέρονται στις ιδιότητες σχετικά με τα κέντρα και την **τομή ή την επαφή δύο κύκλων**.
- γ) Οι προτάσεις 16, 17, 18 και 19 έχουν σχέση με τις ιδιότητες και την κατασκευή μιας εφαπτομένης ενός κύκλου.
- δ) Οι προτάσεις 20, 21 και 22 αναφέρονται στις ιδιότητες των επίκεντρων και εγγεγραμμένων γωνιών σε κύκλο.
- ε) Στις στοιχειώδεις ιδιότητες των κυκλικών τμημάτων αναφέρονται οι προτάσεις 23, 24 και 25.
- στ) Οι προτάσεις 26, 27, 28, 29 και 30 ασχολούνται με τις σχέσεις μεταξύ γωνιών, τόξων, χορδών και τις εφαρμογές τους.
- ζ) Στις σχέσεις μεταξύ γωνιών και κυκλικών τμημάτων αναφέρονται οι προτάσεις 31, 32, 33 και 34.
- η) Τέλος, οι προτάσεις 35, 36 και 37 αναφέρονται στη δύναμη σημείου ως προς κύκλο.

Το βιβλίο ΙΙΙ των *Στοιχείων* έχει σε μεγάλο βαθμό επηρεασθεί από τους Πυθαγορείους. Μια ένδειξη γι’ αυτό είναι το γεγονός ότι ο Ιπποκράτης ο Χίος για να επιτύχει τον τετραγωνισμό των μηνίσκων χρησιμοποίησε αρκετές από τις προτάσεις που περιέχονται στο βιβλίο ΙΙΙ. Αλλά και ο Αυτόλυκος φαίνεται ότι στο βιβλίο του *"Περί κινουμένων σφαιρών"*

έχει χρησιμοποιήσει αρκετές από τις προτάσεις που υπάρχουν στο βιβλίο III. Εφόσον το βιβλίο του Αυτόλκου γράφτηκε πριν από τα *Στοιχεία*, αποδεικνύεται ότι οι προτάσεις αυτές των *Στοιχείων* ανήκουν σε προηγούμενους συγγραφείς.

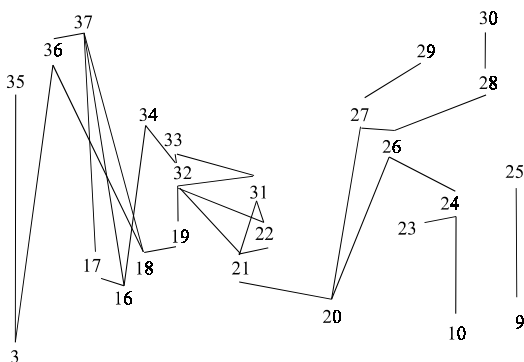
Το βιβλίο III έχει, όπως θα διαπιστώσουμε, πολύ χαλαρή διάρθρωση, σε αντίθεση με τα βιβλία I και II, όπου σχεδόν κάθε πρόταση έχει άμεση σχέση με τις αμέσως προηγούμενες και αμέσως επόμενες της.

Το διάγραμμα 1 μας δίνει τη λογική αλληλουχία των προτάσεων 1 μέχρι 20 του βιβλίου ΙΙΙ.



Διάγραμμα 1

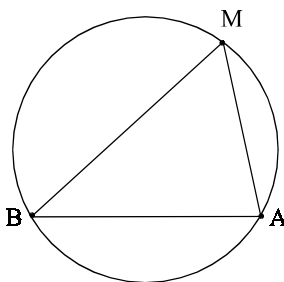
Το διάγραμμα 2 μας δείχνει τη δομή και τη λογική αλληλουχία των υπόλοιπων προτάσεων του βιβλίου ΙΙΙ.



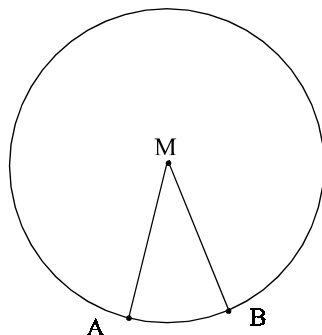
Διάγραμμα 2

Στα διαγράμματα 1 και 2 παρατηρούμε ότι οι 13 προτάσεις 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 23 είναι ανεξάρτητες από προηγούμενες προτάσεις του βιβλίου ΙΙΙ. Υπάρχουν επίσης 12 προτάσεις, οι 4, 7, 8, 12,

3. Δύο κύκλοι ονομάζονται εφαπτόμενοι, αν έχουν κοινό σημείο και δεν τέμνονται.
4. Ευθείες ονομάζονται ισαπέχουσες από το κέντρο κύκλου, αν τα κάθετα τμήματα από το κέντρο στις ευθείες είναι ίσα.
5. Μεγαλύτερη απόσταση θα λέμε ότι απέχει εκείνη η ευθεία, στην οποία αντιστοιχεί το μεγαλύτερο κάθετο τμήμα.
6. Τμήμα κύκλου είναι το σχήμα το περιεχόμενο μεταξύ ευθείας και τόξου κύκλου.
7. Γωνία τμήματος είναι η γωνία που περιέχεται μεταξύ ευθείας και κυκλικού τόξου.
8. Γωνία ενός κυκλικού τμήματος είναι η γωνία που σχηματίζεται, όταν επί του τόξου του τμήματος ληφθεί σημείο και το συνδέσουμε με τα άκρα της χορδής του τμήματος (Σχ. 1).
9. Όταν οι πλευρές της γωνίας αποκόπτουν τόξο του κύκλου, λέμε ότι η γωνία βαίνει στο τόξο αυτό.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

10. Τομέας ενός κύκλου είναι το σχήμα που περιέχεται μεταξύ των πλευρών μιας γωνίας που έχει κορυφή το κέντρο του κύκλου, και του τόξου του κύκλου που αποκόπτεται από τις πλευρές της γωνίας. (Σχ. 2).
11. Όμοια τμήματα κύκλων είναι εκείνα που δέχονται γωνίες ίσες, είτε εκείνα εντός των οποίων οι γωνίες είναι ίσες.

Σχόλια

Πολλοί εκδότες των *Στοιχείων* δεν περιλαμβάνουν τον ορισμό 1 στους ορισμούς του βιβλίου ΙΙΙ.

Οι παλαιότεροι θεωρούσαν ότι ο ορισμός 1 ήταν αίτημα ή αξίωμα (κοινή έννοια), ενώ κάποιοι άλλοι θεωρούσαν ότι είναι θεώρημα.

Όμως, από πολυάριθμους κώδικες προκύπτει αναμφίβολα ότι πρόκειται για ορισμό. Ο Heath [83] στα σχόλιά του αναφέρει ότι πρόκειται για ορισμό, στον οποίο, εκτός από το γεγονός (*το ότι*) υπάρχει και το αίτιο. Τέτοιους ορισμούς αναφέρει ο Αριστοτέλης (*Περί Ψυχής*“, Β2, 413).

Βέβαια, η ισότητα των κύκλων θα μπορούσε να μην ορισθεί ως ισότητα των ακτίνων και των διαμέτρων, αλλά να αποδεικνύεται *δι' επιθέσεως*. Είναι γνωστό όμως ότι ο Ευκλείδης αποφεύγει να χρησιμοποιήσει την επίθεση σχημάτων.

Αντίθετα, ο ορισμός του Ευκλείδη είναι ιδιαίτερα ευφυής, αφού η ύπαρξη ίσων κύκλων ανάγεται στην ισότητα ίσων τμημάτων.

Το ότι ο ορισμός 1 είναι αυθεντικός ορισμός του Ευκλείδη προκύπτει και από τις αραβικές μεταφράσεις των *Στοιχείων*. Ο al-Nayrizi [39] αναφέρει ότι ο Ήρων γράφει: *"Λέγει ο Ευκλείδης: Δύο κύκλοι είναι ίσοι, αν έχουν ίσες διαμέτρους είτε οι ακτίνες τους είναι ίσες"*. Τον ορισμό αυτό σχολιάζει ο Ήρων.

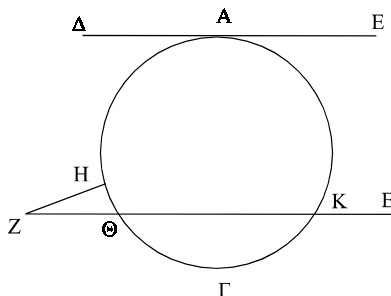
Οι ορισμοί 15 και 16 του βιβλίου Ι δε μας εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα του κέντρου ενός κύκλου. Αυτό προκύπτει μετά την πρόταση ΙΙΙ.1, οπότε γίνεται η κατασκευή του κέντρου ενός κύκλου.

Στα χρόνια μετά τον Ευκλείδη καθιερώθηκαν νέοι όροι. Αυτός της *διακέντρου* δύο κύκλων, δηλαδή του τμήματος που συνδέει τα κέντρα δύο κύκλων, της *χορδής* κύκλου, δηλαδή του τμήματος με άκρα δύο σημεία του κύκλου, καθώς και οι όροι της *επίκεντρης γωνίας* και της *εγγεγραμμένης γωνίας*, αλλά και της *ακτίνας*, του *τόξου* κ.ά.

Σε σχόλια του Παρισινού κώδικα για τον ορισμό 2 διαβάζουμε: *"Είναι διαφορετικό το "ἄπτεσθαι" από το "ἐφάπτεσθαι", αφού με τον όρο "ἄπτεσθαι" ο Ευκλείδης εννοούσε το τμήμα με άκρα τα Z, H (Σχ. 3), ενώ με το όρο "ἐφάπτεσθαι" εννοούσε την εφαπτομένη ΔΕ. Τέλος, ως τέμνουσα εννοούσε τη ΖΕ"*.

Ο σχολιαστής διευκρινίζει τη διαφορά μεταξύ του *"ἄπτεσθαι"* και του *"ἐφάπτεσθαι"* ευθείας και κύκλου. Έτσι η ΔΕ είναι εφαπτόμενη του

κύκλου (Σχ. 3), ενώ η ΖΗ άπτεται του κύκλου, δηλαδή έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, όπως και η ΖΘ. Όμως οι ευθείες αυτές δεν είναι εφαπτόμενες, γιατί αν προεκταθούν τέμνουν τον κύκλο.



Σχήμα 3

Στα "Μετεωρολογικά" του Αριστοτέλη υπάρχει η έκφραση "ἀπασῶν ἐφάπτεσθαι τῶν γωνιῶν" για τις γωνίες που είναι εγγεγραμμένες σε κύκλο. Στον Πάππο ("Συναγωγή" VII, (18).¹⁰ Ευκλείδου Πορίσματα) συναντάμε την έκφραση "ὅτι τόδε τό σημείον ἄπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας".

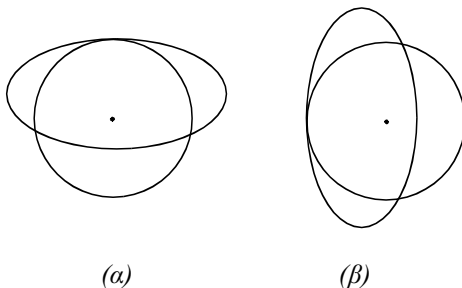
Στη σύγχρονη Γεωμετρία ο ορισμός 2 έχει τροποποιηθεί ελαφρά και λέμε ότι

η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου c , αν και μόνο αν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον κύκλο c .

Ουσιαστικά όμως οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Η πρώτη παρατήρηση σχετικά με τον ορισμό 3 είναι ότι ο Ευκλείδης δε διακρίνει περιπτώσεις, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ή εσωτερικά.

Είναι γνωστό, ότι σχετικά με το πλήθος των σημείων επαφής υπήρχε διάσταση απόψεων στους πρώτους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρους, μερικοί από τους οποίους θεωρούσαν ότι μια ευθεία που εφάπτεται σε κύκλο έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με τον κύκλο, όπως και δύο κύκλοι εφαπτόμενοι.



Σχήμα 4

Η σύγχρονη άποψη είναι:

Δύο κύκλοι ονομάζονται εφαπτόμενοι, αν και μόνο αν έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

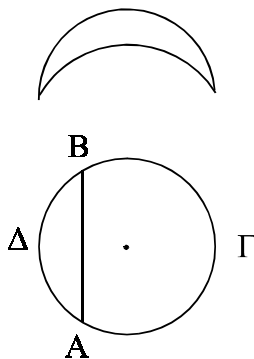
Ο σύγχρονος ορισμός παρουσιάζει μια μικρή διαφορά σε σχέση με τον ευκλείδειο, ο οποίος αναφέρει ότι οι κύκλοι έχουν κοινό σημείο και δεν τέμνονται. Υπάρχει ασάφεια στο τι ακριβώς εννοούσε ο Ευκλείδης λέγοντας ότι οι κύκλοι "δεν τέμνονται".

Ο Ευκλείδης με τους ορισμούς 2 και 3 πιθανόν να ήθελε να αποκλείσει καταστάσεις που δείχνουν τα σχήματα. 4α, 4β.

Σε σχόλια του Παρισινού κώδικα για τον ορισμό 6 διαβάζουμε: "ὁ καὶ μηνίσκος λέγεται, διότι ἔοικε τῇ σελήνῃ διχοτόμῳ οὔσῃ". Το σχόλιο είναι μάλλον ατυχές, αφού ως γνωστόν *μηνίσκος* ονομάζουμε το σχήμα που περικλείεται από κυκλικά τόξα.

Αλλά ο ορισμός 6 παρουσιάζει και άλλα προβλήματα. Π.χ. αφήνει να εννοηθεί ότι έχουμε ένα τμήμα που ορίζεται από την ευθεία AB, ενώ ορίζονται δύο τμήματα, επομένως υπάρχει αμφιβολία σε ποιο αναφέρεται ο ορισμός (Σχ. 5).

Αυτές οι παρατηρήσεις φαίνεται ότι είχαν επισημανθεί από τον καιρό του Ευκλείδη, γιατί ο Ήρων στα "Γεωμετρικά" του ορίζει: "Κοινῶς δέ τιμήμα κύκλου ἐστίν, ἂν τε



Σχήμα 5

μείζον ἂν τε ἔλαττον ἡμικυκλίου, τό περιεχόμενον σχῆμα ὑπό εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας".

Την ίδια εποχή σε κώδικες των *Στοιχείων* προστίθενται στον ορισμό 6 φράσεις, όπως "ἡ μείζονος ἡμικυκλίου ἢ ἐλάττονος ἡμικυκλίου", τις οποίες σωστά ο Heiberg αποδίδει σε κάποιους σχολιαστές.

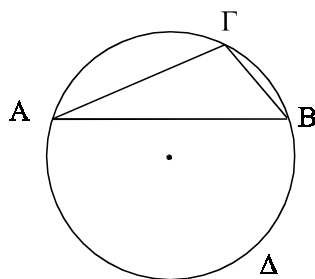
Υπάρχει τέλος η άποψη ότι η ασάφεια στη διατύπωση του ορισμού είναι αποτέλεσμα λογοτεχνικής επήρειας της εποχής.

Ο Heath παρατηρεί ότι ο ορισμός 7 έχει μόνο ιστορικό ενδιαφέρον, αφού φαίνεται ότι ανήκει σε παλαιότερη εποχή από αυτήν του Ευκλείδη. Η γωνία τμήματος που ορίζεται από τη χορδή και το τόξο είναι βέβαια μια *μεικτή γωνία* (βλέπε βιβλίο I), όπως την ονομάζει ο Πρόκλος, ενώ σύμφωνα με την ταξινόμηση του Γέμινου η γωνία κυρτού τόξου και χορδής ονομάζεται "*Κερατοειδής*".

Ο Ήρων [102] στα "*Γεωμετρικά*" του δεν ορίζει τη γωνία τμήματος. Όμως ο Πάππος στη "*Συναγωγή*" (VII (19) 20) αναφέρεται σε γωνίες ημικυκλίου, κυρίως στα λήμματα για *Νεύση*.

Σύμφωνα με τον ορισμό 8, η γωνία ενός τμήματος, είναι η γωνία η εγγεγραμμένη στο τόξο του άλλου τμήματος κύκλου με την ίδια χορδή (Σχ. 6). Στα σχόλια του κώδικα του Βατικανού διαβάζουμε:

"Πλήν τούτω διοίσει, ὅτι, εἰ μὲν ἐν ἡμικυκλίῳ γένηται ἡ γωνία, ὀρθή ἔσται, εἰ δὲ μείζονι, ὀξεία, εἰ δὲ ἐν ἐλάττονι, ἀμέλει οὖν".



Σχήμα 6

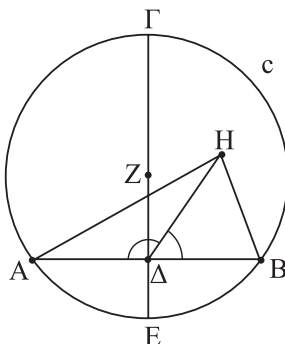
Ο A. de Morgan [42] στην έκδοση των *Στοιχείων* σχολιάζοντας τον ορισμό 11 παρατηρεί ότι με τον όρο "*όμοια σχήματα*" εννοούμε όμοια στη μορφή και όχι με την αυστηρή γεωμετρική σημασία, γιατί στην περίπτωση αυτή ο ορισμός θα ήταν θεώρημα.

3. Χορδές τεμνόμενων ή εφαπτόμενων κύκλων

Πρόταση 1 (III. 1)

Να ευρεθεί το κέντρο δεδομένου κύκλου.

Απόδειξη



Σχήμα 7

Έστω c ο κύκλος, AB τέμνουσά του και Δ το μέσο της. Φέρνουμε την $\Gamma\Delta$ κάθετη της AB στο Δ , που αν προεκταθεί, τέμνει τον κύκλο στο E (Σχ. 7).

Θα αποδείξουμε ότι το Z , (μέσο της ΓE), είναι το κέντρο του κύκλου c .

Αν υποθέσουμε ότι αυτό δε συμβαίνει, αλλά το κέντρο του c είναι το σημείο H και φέρουμε τις HA , $H\Delta$, HB τότε, αφού $A\Delta = \Delta B$ και $HA = HB$ τα τρίγωνα $HA\Delta$ και $HB\Delta$ είναι ίσα, οπότε $\hat{A}\hat{\Delta}H = \hat{B}\hat{\Delta}H$, επομένως (ορισμός 10 του βιβλίου I.), καθεμιά από αυτές είναι ορθή, όπως και οι $\hat{Z}\hat{\Delta}A$, $\hat{Z}\hat{\Delta}B$.

Άρα, αφού $\hat{H}\hat{\Delta}B = \hat{Z}\hat{\Delta}B$, καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε το H ταυτίζεται με το Z .

Το ίδιο συμβαίνει και για κάθε άλλη θέση του $H (H \neq Z)$.

Άρα το Z είναι το κέντρο του κύκλου c .

ὁ.ἔ.π.

Πόρισμα

Η μεσοκάθετος κάθε χορδής διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Σχόλια

Είναι χαρακτηριστική η στρατηγική που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης στην κατασκευή αυτή. Ενώ ακολουθεί την κλασική πορεία της αποδεικτικής διαδικασίας: **πρόταση, έκθεση, διορισμός, κατασκευή, απόδειξη**, εν τούτοις στην απόδειξη μας δίνει και τη μοναδικότητα του κέντρου που έχει ήδη κατασκευάσει. Στην αποδεικτική διαδικασία έχουμε μια ευφυή απόδειξη της μοναδικότητας του κέντρου ενός κύκλου. Ενώ δηλαδή ξεκινά θεωρώντας ένα τυχαίο σημείο H , ακολούθως αποδεικνύει ότι το H ταυτίζεται με το Z και συμπεραίνει ότι δεν υπάρχει άλλο κέντρο εκτός από το Z , (*"ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν τοῦ Ζ"*), δηλαδή καταλήγει σε ένα γενικό συμπέρασμα.

Το σημείο H μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στο εσωτερικό του κύκλου, αφού στην αποδεικτική διαδικασία σιωπηρά υποθέσαμε ότι το Δ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου c . Αυτό όμως αποδεικνύεται μόνο με τη βοήθεια της πρότασης III. 2.

Αν ανατρέξουμε στους ορισμούς 15 και 16 του βιβλίου I θα διαπιστώσουμε ότι αυτοί δε μας εξασφαλίζουν ότι ο κύκλος έχει ένα και **μοναδικό κέντρο** και **μοναδική ακτίνα**. Ο Ευκλείδης με την απόδειξη της πρότασης III. 1. θεωρεί ότι αυτό συμβαίνει.

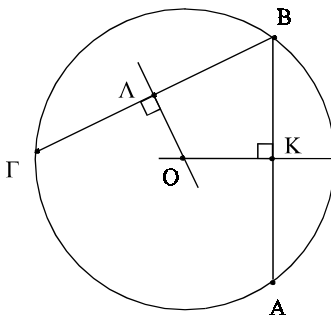
Βέβαια, στην απόδειξή του ο Ευκλείδης θεωρεί γνωστή την πρόταση: ***Η ευθεία ΓΔ και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία Γ, Ε***, δηλαδή χρησιμοποιεί χωρίς να το αναφέρει, αυτό που αργότερα ονομάστηκε *αρχή συνέχειας Jordan* ή πιο γενικά *αρχή Dedekind*.

Η απόδειξη που γίνεται με τη βοήθεια της απαγωγής σε άτοπο, θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί και με άμεση απόδειξη. Ο Πρόκλος θεωρεί την πρόταση 2 σαν παράδειγμα πρότασης που θα πρέπει να ήταν πόρισμα, ενώ το πόρισμα θα έπρεπε να ήταν θεώρημα, αφού με τη βοήθεια της πρότασης αυτής μπορούμε να αποδείξουμε άμεσα τις προτάσεις 1, 25, IV. 5 κ.ά.

Η πρόταση 1 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

"Να προσδιορισθεί το κέντρο κύκλου του οποίου είναι γνωστά τρία σημεία". (α)

Το κέντρο στην περίπτωση αυτή προσδιορίζεται ως τομή των μεσοκαθέτων των χορδών AB και $ΒΓ$ (Σχ. 8).



Σχήμα 8

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και το πρόβλημα:

Δίνεται τόξο $\overset{\cap}{AB}$. Να προσδιορίσετε το κέντρο του κύκλου στον οποίο ανήκει το τόξο.

Με τη βοήθεια της πρότασης (α) μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση:

Αν δύο κύκλοι τέμνονται και έχουν 3 τουλάχιστον σημεία κοινά, ταυτίζονται.

Το πόρισμα που αναφέραμε δεν υπάρχει σε όλους τους κώδικες.

Ο al-Nayrizi γράφει ότι ο Ήρων αναφέρει πως η πρόταση 1 από-δεικνύει και την πρόταση 2.

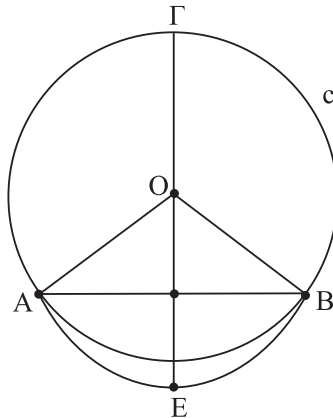
Η πρόταση 1 ισχύει όχι μόνο για την Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά και για την Ουδέτερη, δηλαδή τη Γεωμετρία στην οποία ισχύουν όλα τα αξιώματα πλην του 5^{ου} αιτήματος των παραλλήλων, άρα ισχύει και για τις γεωμετρίες των Λομπατσέφσκι – Bolyai και Riemann.

Πρόταση 2 (III. 2)

Το τμήμα που συνδέει δύο σημεία ενός κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.

Απόδειξη

Έστω κύκλος c και A, B δύο σημεία του. Θα αποδείξουμε ότι το AB βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου c (Σχ. 9). Ας υποθέσουμε ότι η AB βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου c , του οποίου το κέντρο είναι το σημείο O και φέρνουμε τις OA, OB και την OE , όπου E σημείο του τμήματος AB .



Σχήμα 9

Στο τρίγωνο OAB , επειδή $OA = OB$, θα είναι $\hat{OAE} = \hat{OBE}$.

Αφού η AEB είναι ευθεία, θα είναι $\hat{OEA} > \hat{OBE} = \hat{OAE}$.

Ωστε $\hat{OEA} > \hat{OAE}$ και άρα $OA = OB > OE$, άτοπο, γιατί το E βρίσκεται έξω από τον κύκλο και η OE πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα.

ὁ.ξ.δ.

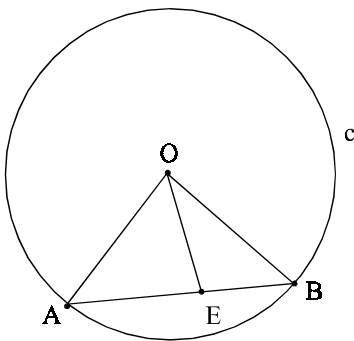
Σχόλια

Είναι προφανές ότι θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την πρόταση 2 χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έστω A, B σημεία του κύκλου c (O, OA) και E σημείο του τμήματος AB (Σχ. 10). Φέρουμε τις OA, OB, OE .

Επειδή $\hat{OEA} + \hat{OEB} = 2$ ορθές, μια από τις $\hat{OEA}, \hat{OEB}$ δεν είναι οξεία.

Έστω $\hat{OEB} \geq 1$ ορθής. Άρα στο τρίγωνο OEB θα είναι $\hat{OEB} > \hat{OBE}$, οπότε $OB > OE$, δηλαδή το E είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου c .



Σχήμα 10

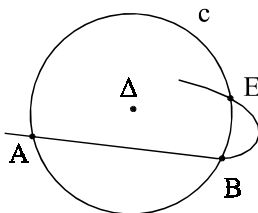
Εύκολα μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι η πρόταση 2 είναι ισοδύναμη με την πρόταση:

Το τμήμα που άγεται από την κορυφή ενός ισοσκελούς τριγώνου μέχρι τη βάση του είναι μικρότερο από τις ίσες πλευρές του.

Η απόδειξη αυτή μας υποβάλλει και ως πόρισμα την πρόταση:

Κάθε ευθεία ε έχει με έναν κύκλο το πολύ δύο κοινά σημεία.

Πράγματι, αν μια ευθεία ε έτεμνε τον κύκλο c στα σημεία A, B, E, τότε $\Delta A = \Delta B = \Delta E$, πράγμα άτοπο, αφού όπως δείξαμε $\Delta A = \Delta B > \Delta E$ (Σχ. 11).



Σχήμα 11

Η πραγματική σημασία της πρότασης 2 είναι ότι:

Το εσωτερικό κάθε κύκλου είναι κυρτό σύνολο.

Ένα σημειοσύνολο M ονομάζεται **κυρτό**, αν και μόνο αν για κάθε $A \in M$, και $B \in M$, θα είναι και $AB \subseteq M$. Ο κύκλος είναι κυρτό σχήμα.

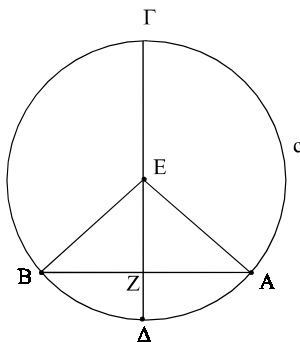
Μια καμπύλη ονομάζεται **κοίλη** ως προς ένα σημείο O , αν και μόνο αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει κάθε σημείο της καμπύλης με το O τέμνει τη χορδή της καμπύλης που συνδέει τα άκρα της, ενώ αν τα ευθύγραμμα τμήματα δεν τέμνουν τη χορδή, η καμπύλη ονομάζεται **κυρτή ως προς O** . Ο κύκλος λοιπόν είναι μια κοίλη καμπύλη ως προς το κέντρο O και οποιοδήποτε εσωτερικό του σημείο. Ο κύκλος και σαν σημειοσύνολο δεν είναι κυρτό.

Η πρόταση 2 ισχύει στην Ουδέτερη Γεωμετρία, αλλά και στα επίπεδα Hilbert.

Πρόταση 3 (III. 3)

Η ευθεία που συνδέει το κέντρο κύκλου με το μέσο μιας χορδής θα είναι κάθετη στη χορδή και η ευθεία που άγεται από το κέντρο ενός κύκλου κάθετη σε μια χορδή του, θα διέρχεται από το μέσο της χορδής.

Απόδειξη



Σχήμα 12

Έστω κύκλος c και ευθεία $ΓΔ$ που διέρχεται από το κέντρο E του c και το μέσο Z της χορδής AB (Σχ. 12). Θα αποδείξουμε ότι $ΓΔ \perp AB$.

Αν συνδέσουμε το κέντρο E του c (III. 1) με τα A, B , τότε $AZ = BZ$,

$EA = EB$, οπότε τα τρίγωνα EAZ, EBZ είναι ίσα και άρα $\hat{EZA} = \hat{EZB}$.

Τότε (I.10) θα είναι $\hat{EZA} = \hat{EZB} = 1$ ορθή. Άρα $ΓΔ \perp AB$.

Έστω τώρα ότι $\Gamma\Delta \perp AB$. Θα αποδείξουμε ότι η $\Gamma\Delta$ διέρχεται από σημείο Z του AB , τέτοιο ώστε $ZA = ZB$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα EAZ , EBZ έχουν $\hat{E}AZ = \hat{E}BZ$, $EZ = EZ$ επομένως είναι ίσα και $ZA = ZB$.

ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

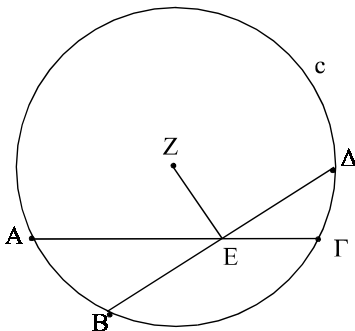
Η πρόταση αυτή έχει πολλές εφαρμογές και ισχύει και για την Ουδέτερη Γεωμετρία.

Ο al-Nayrizi γράφει ότι η πρόταση 3 αποδεικνύεται ουσιαστικά με τη βοήθεια της 2.

Πρόταση 4 (III. 4)

Αν δύο χορδές κύκλου που δε διέρχονται από το κέντρο του κύκλου τέμνονται, τότε δε διχοτομούνται.

Απόδειξη



Σχήμα 13

Έστω AG , BD δύο χορδές του κύκλου c που τέμνονται στο E (Σχ. 13). Θα αποδείξουμε ότι αν το E δεν είναι το κέντρο Z του κύκλου, τότε οι χορδές δε διχοτομούνται, δηλαδή δεν περνάει η μια από το μέσον της άλλης.

Πράγματι, αν το E ήταν το μέσο της AG και της BD , τότε:

$$ZE \perp AG \text{ και } ZE \perp BD$$

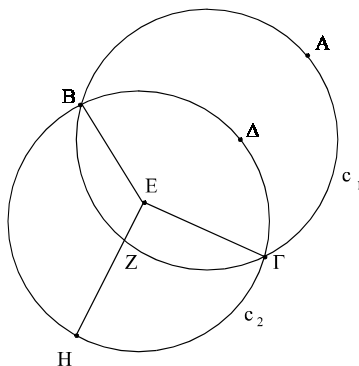
πράγμα άτοπο, αφού στο σημείο E της ZE , μια μόνο κάθετος άγεται στη ZE .

ὅ.ξ.δ.

Πρόταση 5 (III. 5)

Αν δύο κύκλοι τέμνονται, δεν έχουν το ίδιο κέντρο.

Απόδειξη



Σχήμα 14

Έστω ότι οι κύκλοι τέμνονται στα σημεία B, Γ (Σχ. 14). Θα αποδείξουμε ότι οι κύκλοι δεν έχουν το ίδιο κέντρο.

Έστω ότι οι κύκλοι c_1 και c_2 έχουν κοινό κέντρο E και ας φέρουμε μια τυχαία τέμνουσα EZH.

Τότε $EZ = EΓ$ και $EH = EΓ$, οπότε $EZ = EH$, που είναι άτοπο (ορισμός 15 του βιβλίου I).

Άρα το E δεν είναι κοινό κέντρο των κύκλων.

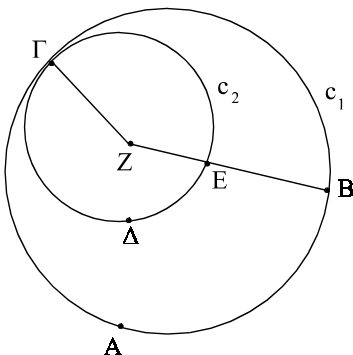
ὁ.ἔ.δ.

Πρόταση 6 (III. 6)

Αν δύο κύκλοι εφάπτονται, δεν έχουν το ίδιο κέντρο.

Απόδειξη

Έστω ότι οι εφάπτομενοι στο Γ κύκλοι c_1 και c_2 έχουν το ίδιο κέντρο Z (Σχ. 15). Φέρουμε την ZΓ και μια ευθεία ZEB, που τέμνει τους κύκλους στα E, B.



Σχήμα 15

Επειδή το Z είναι κέντρο των κύκλων, θα είναι $Z\Gamma = ZE$ και $Z\Gamma = ZB$, οπότε $ZE = ZB$, πράγμα άτοπο. Άρα το Z δεν είναι κοινό κέντρο των κύκλων.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Οι αποδείξεις των προτάσεων 5 και 6 είναι περίπου ίδιες και στηρίζονται στον ορισμό 15 του κεφαλαίου Ι και στην κοινή έννοια 1.

Στο Βατικανό κώδικα υπάρχει η φράση: "*Μερικοί, προσθέτουν στην πρόταση το "εντός", γιατί, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε το κέντρο του ενός θα βρίσκεται εκτός του άλλου...*"

Ο al-Nayrizi γράφει ότι η πρόταση 6 αποδεικνύεται με τη βοήθεια της πρότασης 2. ("*Omnes iste figurae declarantur et constant secundum dicta Euclides*"). Παρατηρούμε ότι η απόδειξη της πρότασης στηρίζεται στην υπόθεση ότι τα σημεία E, B είναι διαφορετικά, γιατί, αν ταυτίζονταν, οι κύκλοι θα είχαν δύο σημεία επαφής, πράγμα άτοπο (ορισμός 3).

Οι προτάσεις 5 και 6 λοιπόν θα μπορούσαν να αποτελέσουν μία πρόταση ως εξής:

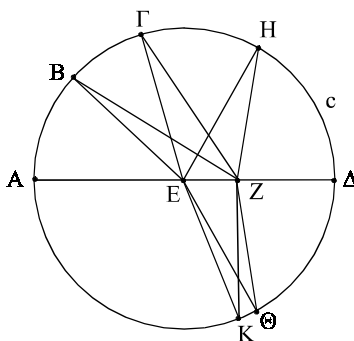
Αν δύο κύκλοι έχουν κοινό σημείο, χωρίς να έχουν τρία κοινά σημεία, δεν έχουν το ίδιο κέντρο.

Επίσης ισχύει η πρόταση:

Αν δύο κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο και ένα σημείο κοινό, τότε ταυτίζονται.

Πρόταση 7 (III. 7)

Αν από σημείο μιας διαμέτρου κύκλου που δεν είναι το κέντρο φέρουμε τέμνουσες του κύκλου, τότε το μεγαλύτερο από τα τμήματα με άκρα το σημείο είναι αυτό που περιέχει το κέντρο και ελάχιστο το συνευθιακό του. Από τα άλλα τμήματα με άκρο το σημείο μεγαλύτερο είναι αυτό που βρίσκεται πλησιέστερα¹ στο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο. Ενώ δύο μόνο ίσα τμήματα με άκρο το σημείο, εκατέρωθεν του ελαχίστου μπορούμε να φέρουμε.

Απόδειξη

Σχήμα 16

Έστω κύκλος c , AD διάμετρος και Z σημείο της διαφορετικό από το κέντρο E . (Σχ. 16).

Φέρουμε τα τμήματα ZB , $ZΓ$, ZH . Θα αποδείξουμε ότι το ZA είναι το μεγαλύτερο, το $ZΔ$ το ελάχιστο και ότι $ZB > ZΓ > ZH$.

Φέρουμε τις ακτίνες EB , $EΓ$ και EH . Τότε
 $ZB < BE + EZ = AE + EZ = AZ$.

Ακόμα, επειδή $BE = EΓ$ και EZ κοινή, αλλά $\hat{BΕΖ} > \hat{ΓΕΖ}$, θα είναι (I. 24) $BZ > ΓZ$. Ομοίως $ΓZ > HZ$.

Τέλος, $EZ + ZH > EH = EΔ = EZ + ZΔ$, οπότε $ZH > ZΔ$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι από το Z μπορούμε να φέρουμε μόνο δύο τμήματα ίσα (εκατέρωθεν της AD).

¹ Όταν ο Ευκλείδης αναφέρει ότι ένα τμήμα είναι πλησιέστερα στη διάμετρο, εννοεί ότι αυτό σχηματίζει μικρότερη γωνία με τη διάμετρο (έχει τη μικρότερη κλίση).

Με πλευρά την ZE και κορυφή το E κατασκευάζουμε γωνία $\hat{Z}\hat{E}\hat{\Theta} = \hat{H}\hat{E}\hat{Z}$. Τότε από τα ίσα τρίγωνα HEZ , ΘEZ θα έχουμε $ZH = Z\Theta$. Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλο τέτοιο τμήμα από το Z ίσο με το ZH .

Έστω ότι υπάρχει το ZK . Τότε $\hat{H}\hat{E}\hat{Z} = \hat{Z}\hat{E}\hat{K} = \hat{Z}\hat{E}\hat{\Theta}$, που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει άλλο τμήμα με άκρο το Z ίσο με το ZH .

Υπάρχει και άλλη απόδειξη της πρότασης 7:

Φέρουμε την KE . Τα τρίγωνα HEZ , KEZ έχουν

$$HE = KE, EZ = EZ, \hat{H}Z = \hat{Z}K,$$

οπότε $\hat{H}\hat{E}\hat{Z} = \hat{K}\hat{E}\hat{Z}$ (I. 8)

Αλλά $\hat{H}\hat{E}\hat{Z} = \hat{\Theta}\hat{E}\hat{Z}$, πράγμα άτοπο, αφού θα έπρεπε. $\hat{K}\hat{E}\hat{Z} = \hat{\Theta}\hat{E}\hat{Z}$ ὅ.ἔ.δ.

Σχόλια

Στον κώδικα του Βατικανού διαβάζουμε και τη γενικότερη πρόταση, η οποία διατυπώνεται ως εξής: “Αν στο εσωτερικό κύκλου ληφθεί σημείο από το οποίο φέρουμε τέμνουσες, τότε το μέγιστο τμήμα με ένα άκρο το σημείο είναι αυτό που περιέχει το κέντρο και το ελάχιστο είναι το υπόλοιπο της διαμέτρου που διέρχεται από το σημείο”.

Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι ίδια με την απόδειξη της πρότασης 7:

Έστω Z το σημείο εντός του κύκλου c , η διάμετρος AD και το τμήμα ZA που περιέχει το κέντρο. Έστω ZB το μεγαλύτερο τμήμα με άκρο το Z . Τότε $ZA = ZE + EA = ZE + EB > ZB$, που είναι άτοπο κ.λπ.

Η πρόταση 7 μοιάζει να μην είναι καλοδιατυπωμένη. Όμως, μια προσεκτικότερη ανάγνωση μας κάνει να εννοήσουμε ότι ο Ευκλείδης αναφέρεται στα μεγαλύτερα τμήματα και όταν αναφέρεται σε αποστάσεις **εννοεί γωνίες** και συγκεκριμένα τις **κλίσεις** των τμημάτων ZB , $Z\Gamma$, ZH ως προς τη διάμετρο AD . Οπότε, όσο μεγαλώνει η γωνία από 0 έως 2 ορθές, το τμήμα γίνεται από μέγιστο ελάχιστο.

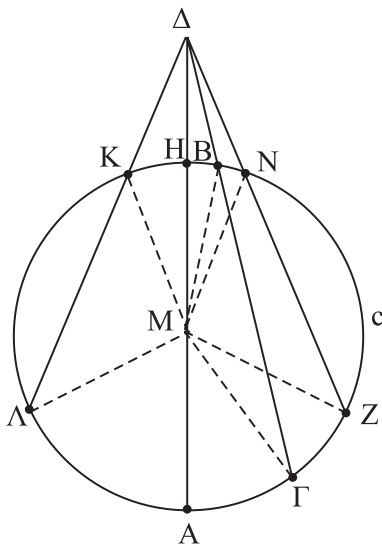
Ο Ευκλείδης είναι προσεκτικός και αναφέρεται στα άλλα τμήματα πλην του μέγιστου και του ελάχιστου, ώστε να μην αντιστοιχούν σε γωνίες 0 και 2 ορθών.

Βέβαια, αντί για τις κλίσεις των τμημάτων, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις επίκεντρες γωνίες $\hat{AEB}$, $\hat{AEG}$, όπως αντιμετώπιζαν την πρόταση στα αγγλικά εγχειρίδια το δεύτερο ήμισυ του 19^{ου} αιώνα.

Πρόταση 8 (III. 8)

Αν από σημείο εκτός κύκλου φέρουμε ευθείες προς τον κύκλο, τότε από τα τμήματα με άκρα το σημείο και τα σημεία του κύκλου, μέγιστο είναι εκείνο που διέρχεται από το κέντρο και ελάχιστο είναι το τμήμα του μέγιστου που βρίσκεται εκτός του κύκλου. Από τα υπόλοιπα τμήματα που έχουν τα άκρα τους στο κοίλο μέρος του κύκλου, μεγαλύτερο είναι εκείνο που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο. Από τα τμήματα που έχουν τα άκρα τους στο κυρτό μέρος του κύκλου, μεγαλύτερο είναι εκείνο που βρίσκεται μακρύτερα από το ελάχιστο τμήμα. Μόνο δύο τμήματα είναι ίσα και βρίσκονται εκατέρωθεν του ελάχιστου.

Απόδειξη



Σχήμα 17

Έστω κύκλος c και σημείο Δ εκτός του c . Φέρουμε τις τέμνουσες ΔA , $\Delta \Gamma$, ΔZ και $\Delta \Lambda$, εκ των οποίων η ΔA διέρχεται από το κέντρο M του κύκλου c (Σχ.17).

Θα αποδείξουμε ότι $\Delta A > \Delta \Gamma > \Delta H$.

Πράγματι, από το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ έχουμε

$$\Delta\Gamma < \Delta M + M\Gamma = \Delta M + MA = \Delta A.$$

Άρα το ΔA είναι το μέγιστο.

Ακόμα $|\Delta M - \Gamma M| < \Delta\Gamma$ ή $|\Delta M - HM| < \Delta\Gamma$ ή $\Delta H < \Delta\Gamma$.

Άρα το ΔH είναι το ελάχιστο.

Αποδεικνύουμε την περίπτωση του κοίλου. Έστω Γ σημείο του κοίλου μέρους του κύκλου c . Τα τρίγωνα ΔMZ και $\Delta M\Gamma$ έχουν $MZ = M\Gamma$, $M\Delta = M\Delta$ και $\hat{\Delta M\Gamma} > \hat{\Delta MZ}$. Άρα οι απέναντι πλευρές είναι ομοίως άνισες. Δηλαδή $\Delta\Gamma > \Delta Z$.

Ομοίως αποδεικνύουμε την περίπτωση του κυρτού, δηλαδή ότι $\Delta N > \Delta B$. Πράγματι, τα τρίγωνα ΔNM και ΔBM έχουν $NM = MB$ και $\hat{\Delta MN} > \hat{\Delta MB}$. Άρα $\Delta N > \Delta B$.

Αν $\hat{\Delta AM} = \hat{\Delta ZM}$, τότε αποδεικνύεται ότι τα τμήματα ΔK , $\Delta\Lambda$ και μόνο αυτά είναι ίσα με τα ΔN , ΔZ αντίστοιχα.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Με σύγχρονη ορολογία η διατύπωση της πρότασης 8 είναι:

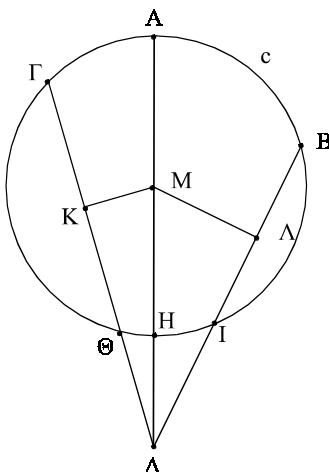
Από δύο ευθύγραμμα τμήματα με ένα άκρο σημείο εκτός κύκλου, που τέμνουν το κύκλο, μεγαλύτερο είναι εκείνο που απέχει από το κέντρο μικρότερη απόσταση, ενώ από τα τμήματα με άκρο το σημείο που έχουν ένα κοινό σημείο με τον κύκλο ισχύει το αντίστροφο.

Με σύγχρονη ορολογία το ΔA είναι η μέγιστη απόσταση του Δ από τον κύκλο c , ενώ το ΔH η ελάχιστη, δηλαδή

$$\Delta A = \sup_{K \in c} \Delta K, \Delta H = \inf_{K \in c} \Delta K$$

Όπως και στην πρόταση 7, έτσι και εδώ ισχύει η αντίστροφη πρόταση. Η απόδειξη μπορεί εύκολα να γίνει με την απαγωγή σε άτοπο. Ο Ήρων στα σχόλια του al-Nayrizi [39], πάλι θεωρεί τις αποστάσεις του κέντρου από τις τέμνουσες ΔB , $\Delta\Gamma$ (Σχ. 18). Αν $MK < M\Lambda$ τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα (I. 47) θα έχουμε $\Delta K > \Delta\Lambda$ και $K\Gamma > \Lambda B$, άρα $\Delta\Gamma > \Delta B$.

Στις προτάσεις 7 και 8 γίνεται χρήση της έννοιας *σχετική απόσταση* σημείου από τεμνόμενες ευθείες, η οποία όμως δεν έχει ορισθεί.



Σχήμα 18

Τόσο η πρόταση 7, όσο και η 8 δεν χρησιμοποιούνται στα *Στοιχεία*, όμως χρησιμοποιήθηκαν από τον Θεοδόσιο τον Κυρηναίο στο βιβλίο του "Σφαιρικά" και από τον Αρίσταρχο τον Σάμιο στο βιβλίο του "Περί μεγεθών και αποστάσεων από τον Ήλιο και τη Σελήνη".

Πρόταση 9 (III. 9)

Αν από σημείο στο εσωτερικό κύκλου μπορούμε να φέρουμε περισσότερα από δύο ίσα τμήματα που συνδέουν το σημείο με τον κύκλο, τότε αυτό είναι κέντρο του κύκλου.

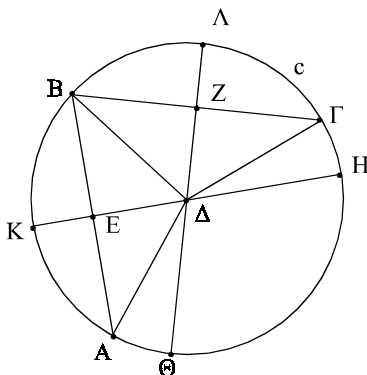
Απόδειξη

Έστω κύκλος c , σημείο Δ στο εσωτερικό του και $\Delta A = \Delta B = \Delta \Gamma$ (Σχ. 19). Θα αποδείξουμε ότι το Δ είναι κέντρο του κύκλου.

Φέρουμε τις AB , $B\Gamma$ και έστω E , Z τα μέσα των AB , $B\Gamma$. Φέρνουμε τις ΔE , ΔZ που τέμνουν τον c στα σημεία K , H , Λ , Θ .

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\Delta A E$, $\Delta B E$ είναι ίσα, αφού έχουν

$\Delta E = \Delta E$, $\Delta A = \Delta B$, $E A = E B$ (ΙΠΠΠ). Άρα $\hat{\Delta E A} = \hat{\Delta E B} = 1$ ορθή.



Σχήμα 19

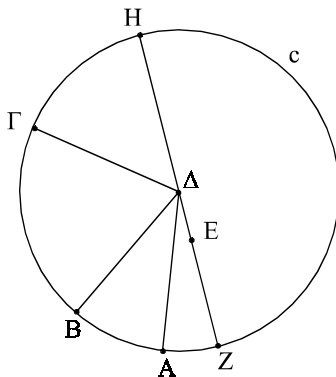
Οπότε η ΚΗ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ, επομένως διέρχεται από το κέντρο του κύκλου c (III.1, Πόρισμα). Ομοίως και η ΛΘ διέρχεται από το κέντρο, δηλαδή το κέντρο είναι το Δ. ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση υπάρχει και στα "Μετεωρολογικά" του Αριστοτέλη. Η απόδειξη που δώσαμε εδώ στηρίζεται στην πρόταση 1.

Απόδειξη της πρότασης αυτής όμως μπορούμε να δώσουμε και με τη βοήθεια της πρότασης 7:

Έστω Ε το κέντρο του κύκλου c . Φέρουμε την ΔΕ, που τέμνει τον κύκλο στα Ζ, Η (Σχ. 20).



Σχήμα 20

Επειδή το Δ βρίσκεται στο εσωτερικό του c και δεν είναι το κέντρο, και ισχύει $\hat{Z}\Delta A < \hat{Z}\Delta B$, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 7, θα είναι και $\Delta A > \Delta B$, πράγμα άτοπο. Και αφού καταλήγουμε σε άτοπο για κάθε σημείο $E \neq \Delta$, τότε το κέντρο είναι το σημείο Δ .

Και οι δύο αποδείξεις που αναφέραμε υπάρχουν σε διάφορους κώδικες και αποδίδονται στον Ευκλείδη, ενώ η δεύτερη υπάρχει στην έκδοση των *Στοιχείων* από τον Simpson.

Ο Camerer επισημαίνει ότι η ευφυής αυτή απόδειξη πρέπει να συμπληρωθεί με την περίπτωση που η AB ή η AG διέρχεται από το Δ .

Ο Heiberg την αναφέρει στο παράρτημα του βιβλίου III. [87]

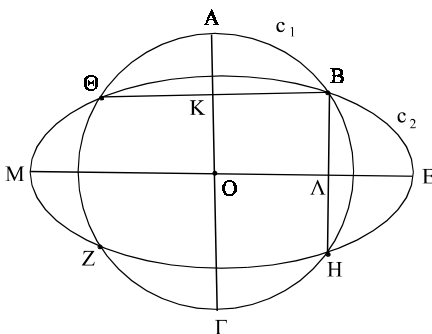
Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την πρόταση 9 μόνο μια φορά στα *Στοιχεία* και συγκεκριμένα στην πρόταση 25. Αρκετοί μελετητές του Ευκλείδη προβληματίζονται με τη θέση της πρότασης 9, που θα μπορούσε να τοποθετηθεί μετά την πρόταση 1.

Οπωσδήποτε, η πρόταση 9 αποκαλύπτει μια άγνωστη ιδιότητα του κέντρου ενός κύκλου και φαίνεται να συμπληρώνει τις προτάσεις 7 και 8 που έχουν σχέση με το κέντρο ενός κύκλου.

Πρόταση 10 (III. 10)

Ένας κύκλος δεν είναι δυνατό να τέμνει άλλον σε περισσότερα από δύο σημεία.

Απόδειξη



Σχήμα 21

Έστω ότι ο κύκλος c_1 τέμνει τον κύκλο c_2 στα σημεία Β, Η, Ζ, Θ (Σχ. 21).

Φέρνουμε τις ΒΘ, ΒΗ που έχουν μέσα τα Κ, Λ και τις μεσοκάθετες ΑΓ, ΕΜ των ΒΘ, ΒΗ που τέμνονται στο Ο.

Το Ο λοιπόν είναι κέντρο (πρόταση 5) και των δύο κύκλων, πράγμα άτοπο, αφού (III. 5) οι κύκλοι τέμνονται και έχουν κοινό κέντρο.

ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τον όρο *κύκλος* με την έννοια της *περιφέρειας κύκλου*.

Επειδή δεν είναι δυνατό να υπάρξουν διαφορετικοί κύκλοι που να έχουν 3 κοινά σημεία, στο αρχαίο κείμενο, όπως μας έχει παραδοθεί, θεωρείται το διάγραμμα της πρότασης με σχήματα που να ικανοποιούν τις απαιτήσεις της πρότασης, αλλά διαφορετικά από τα αναφερόμενα. Π.χ. εδώ στη θέση του κύκλου θεωρείται ένα οβάλ (κυρτό καμπυλόγραμμο σχήμα). Έτσι η απαγωγή σε άτοπο ξεκινά από το διάγραμμα.

Στην προηγούμενη απόδειξη υπάρχει ένα κενό, αφού δε δικαιολογείται γιατί οι μεσοκάθετοι των ΒΗ, ΒΘ θα τέμνονται στο Ο. Αυτό δικαιολογεί την πρόταση 5. Αυτή είναι και η μόνη φορά που χρησιμοποιείται η πρόταση 5 στα *Στοιχεία*.

Επίσης η πρόταση 10 δεν μας κατοχυρώνει ότι δύο κύκλοι τέμνονται, αλλά μόνο ότι δεν είναι δυνατό να έχουν περισσότερα από δύο κοινά σημεία.

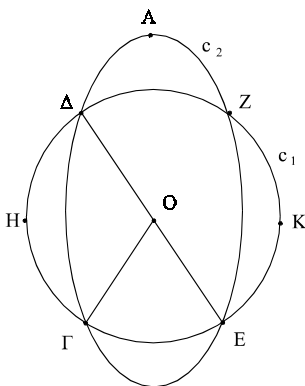
Υπάρχει και μια άλλη απόδειξη της πρότασης 10, που αναφέρει ο Ήρων, καθώς και άλλοι όπως οι Heiberg, Simson, Hall-Stevens κλπ.

Είναι χαρακτηριστικό ότι ο al-Nayrizi δεν αναφέρει την κλασική φράση "*Dixit Yrinus*" ("*λέγει ο Ήρων*"), αλλά τη φράση "*De decima vero dixit*" (*για τη δεκάτη πράγματι λέγει*) υπονοώντας τον Ευκλείδη. Η απόδειξη έχει ως εξής:

Έστω ότι οι κύκλοι τέμνονται στα Δ, Γ, Ε και Ο το κέντρο του κύκλου c_1 (Σχ.22). Τότε ΟΔ = ΟΓ = ΟΕ, οπότε το Ο είναι και το κέντρο του κύκλου c_2 , δηλαδή οι κύκλοι έχουν κοινό κέντρο, πράγμα άτοπο, αφού έχουν κοινά σημεία.

Και η απόδειξη αυτή παρουσιάζει κενό, αφού υποθέσαμε ότι το κέντρο Ο του κύκλου c_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου c_2 . Μπορεί

όμως να συμπληρωθεί με τη βοήθεια της πρότασης 8 και της πρότασης I. 4. Τότε, αν το O βρίσκεται στον κύκλο c_2 έχουμε άτοπο. Αν πάλι το O είναι εκτός του κύκλου c_2 , έχουμε άτοπο, λόγω της πρότασης 8.



Σχήμα 22

Σε διάφορους άλλους κώδικες υπάρχουν και άλλες παρόμοιες αποδείξεις. Η πρόταση 10 χρησιμοποιείται μόνο στην πρόταση 24, της οποίας φαίνεται ότι είναι λήμμα.

Πρόταση 11 (III. 11)

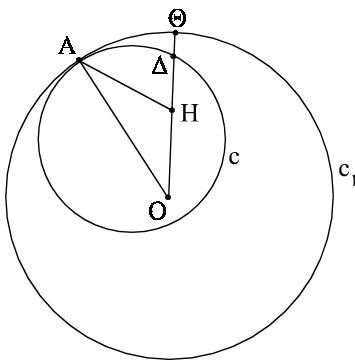
Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε η ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους περνά από το σημείο επαφής των κύκλων.

Απόδειξη

Έστω ότι έχουμε δύο κύκλους c , c_1 που εφάπτονται στο σημείο A (Σχ. 23). Αν O , H τα κέντρα τους, θα αποδείξουμε ότι η OH διέρχεται από το A .

Έστω ότι η OH δε διέρχεται από το A , αλλά τέμνει τους κύκλους c , c_1 στα Δ , Θ αντίστοιχα. Τότε (πρόταση I. 20), $HO + HA > OA = O\Theta = OH + H\Theta$. Άρα $AH > H\Theta$, πράγμα άτοπο.

ὅ.ξ.δ.



Σχήμα 23

Σχόλια

Υπάρχει και δεύτερη απόδειξη, η οποία ελάχιστα διαφέρει από αυτή που ήδη παρουσιάσαμε και την οποία αναφέρουν και άλλοι, π.χ. ο Heiberg.

Στην προηγούμενη απόδειξη, έχοντας εξασφαλίσει ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο επαφής (ορισμός 3), υποθέσαμε σιωπηρά ότι το H βρίσκεται μεταξύ των O , Θ . Η απόδειξη όμως είναι ανάλογη και όταν το O βρίσκεται μεταξύ των H και Θ , αρκεί βέβαια να προεκτείνουμε την HO εκατέρωθεν.

Η ίδια απόδειξη ισχύει και όταν το O βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου c .

Ο Camerer [83] για να απαλείψει τα κενά αυτής της έξοχης απόδειξης του Ευκλείδη, ακολουθεί προσεκτικά τα ακόλουθα βήματα:

1. Οι δύο κύκλοι εφάπτονται στο σημείο επαφής, οπότε δεν είναι δυνατό να τέμνονται σε ένα σημείο.
2. Αφού οι κύκλοι δεν τέμνονται, ο ένας θα βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου.
3. Άρα ο κύκλος που περιέχεται θα έχει ακτίνα μικρότερη από την ακτίνα αυτού που τον περιέχει.
4. Τώρα, αν O το κέντρο του μεγαλύτερου και K το κέντρο του μικρότερου, τότε η διάκεντρος OK είτε (α) θα διέρχεται από το σημείο επαφής A , αν προεκταθεί προς το μέρος του K , είτε (β) η OK θα διέρχεται από το σημείο A , αν προεκταθεί προς το μέρος του O .

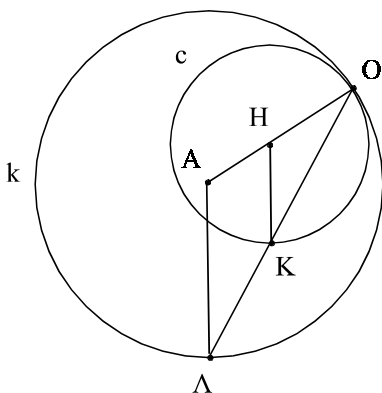
Εξετάζοντας τις περιπτώσεις αυτές έχουμε μια πλήρη απόδειξη της πρότασης, όμως, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο Ευκλείδης δεν ενδιαφερόταν για τις επιμέρους περιπτώσεις.

Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση της 11, δηλαδή, *αν η διάκεντρος δύο κύκλων που ο ένας περιέχει τον άλλο είναι ίση με τη διαφορά των ακτίνων, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά*.

Η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται μόνο στην απόδειξη της πρότασης 14.

Στη σύγχρονη Ευκλείδεια Γεωμετρία η πρόταση 11 και η αντίστροφή της είναι ισοδύναμες με την πρόταση:

Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, η διάκεντρος ισούται με τη διαφορά των ακτίνων και αντίστροφα.



Σχήμα 24

Όπως παρατηρούν πολλοί νεότεροι εκδότες των *Στοιχείων*, το σημείο επαφής Ο έχει μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα:

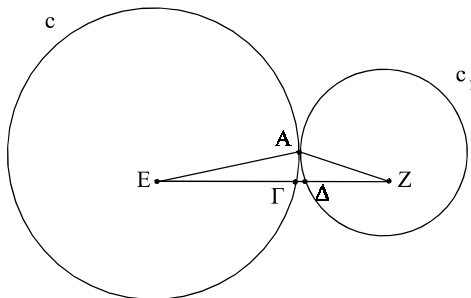
Αν φέρουμε μια τέμνουσα ΟΚΛ των κύκλων που δε διέρχεται από τα κέντρα Α, Η τότε ΑΛ // ΗΚ (Σχ. 24).

Πρόταση 12 (III. 12)

Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε η διάκεντρος διέρχεται από το σημείο επαφής.

Απόδειξη

Έστω ότι οι κύκλοι εφάπτονται σε σημείο A και έστω E, Z τα κέντρα τους (Σχ. 25). Θα αποδείξουμε ότι η EZ διέρχεται από το A.



Σχήμα 25

Ας υποθέσουμε ότι η ΕΖ δε διέρχεται από το Α, αλλά τέμνει τους κύκλους στα Γ, Δ. Φέρουμε τα ΑΕ και ΑΖ. Έχουμε $EA = EG$ και $ZA = ZΔ$.

Άρα $EA + ZA = EG + ZΔ$. Επομένως $EA + ZA < EZ = EG + ΓΔ + ΔΖ$ και συγχρόνως (I. 20) $EZ < EA + AZ$, που είναι άτοπο.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Ο al-Nayrizi αναφέρει ότι ο Ήρων γράφει: *"Ο Ευκλείδης στην πρόταση 11 υποθέτει ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. Όμως εγώ θα αποδείξω την πρόταση και όταν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά"*.

Φαίνεται επομένως ότι το κείμενο των *Στοιχείων* του Ήωνα δεν περιέχει την πρόταση 12, η οποία ίσως να μην υπήρχε αρχικά στα *Στοιχεία*.

Στη θέση της πρότασης 12 ο al-Nayrizi αναφέρει την πρόταση:

Μια ευθεία γραμμή δεν τέμνει έναν κύκλο σε περισσότερα από δύο μέρη. (*"Linea recta non secat circulum in pluribus notis quam duabus"*).

Πολλοί εκδότες πιστεύουν ότι η πρόταση 12 προστέθηκε από το Θέωνα αργότερα.

Και στην πρόταση αυτή υπάρχει έντονη η διαίσθηση, αφού δέχεται ότι η διάκεντρος ΕΖ τέμνει τους κύκλους στα Γ, Δ.

Στη σύγχρονη ευκλείδεια Γεωμετρία η πρόταση έχει την ισοδύναμη μορφή:

Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, η διάκεντρος ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους.

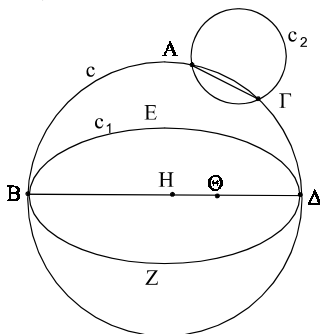
Ο A. de Moivre [83] επισημαίνει το γεγονός ότι ο Ευκλείδης δεν κάνει χρήση της ισοδυναμίας: $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (-Y \Rightarrow -X)$, δηλαδή της μεθόδου της **αντιθετοαντιστροφής**. Τέτοιες μέθοδοι, που αναφέρει ο Αριστοτέλης ήταν έξω από το πνεύμα του Ευκλείδη.

Πρόταση 13 (III. 13)

Δύο εφαπτόμενοι κύκλοι (εσωτερικά ή εξωτερικά) έχουν ένα κοινό σημείο.

Απόδειξη

Έστω κύκλος c και κύκλος c_1 , ο οποίος εφάπτεται εσωτερικά στον c στα σημεία B, Δ (Σχ. 26).



Σχήμα 26

Έστω ακόμα H το κέντρο του κύκλου c και Θ το κέντρο του c_1 . Η ευθεία $H\Theta$ θα διέρχεται από τα σημεία B, Δ (πρόταση 11). Επειδή H το κέντρο του c τότε $HB = H\Delta$ και αφού $HB > \Theta\Delta$, θα είναι $B\Theta > \Theta\Delta$. Ακόμη, αφού Θ κέντρο του c_1 , θα είναι $B\Theta = \Delta\Theta$, πράγμα άτοπο.

ὅ.ξ.δ.

Επίσης και όταν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, θα αποδείξουμε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Έστω c_2 κύκλος που εφάπτεται στον c εξωτερικά και έχει με τον c κοινά τα σημεία A, Γ . Τότε η χορδή $A\Gamma$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό καθενός κύκλου (πρόταση 2). Αλλά θα πρέπει να βρίσκεται και στο εξωτερικό καθενός από τους κύκλους (πρόταση 3), πράγμα άτοπο.

ὅ.ξ.δ.

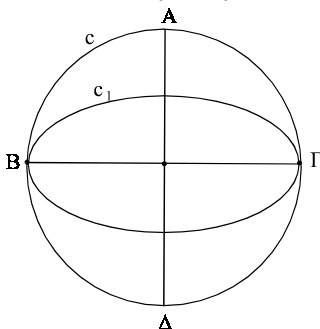
Σχόλια

Παραδόξως, ο Ήρων δε σχολιάζει την υπόθεση του Ευκλείδη για το ότι η διάκεντρος διέρχεται από τα δύο σημεία επαφής, αν μπορούν δύο κύκλοι να εφάπτονται σε δύο σημεία. Μάλιστα, αφιερώνει κάποιες γραμμές για να αποδείξει ότι το κέντρο του μεγάλου κύκλου θα βρίσκεται στο εσωτερικό του μικρού, όπως λέει και ο Ευκλείδης (*sicut dixit Euclides*). Αυτό δε φαίνεται στο κείμενό μας, πράγμα που βεβαιώνει ότι ο Ήρων είχε άλλη έκδοση των *Στοιχείων*.

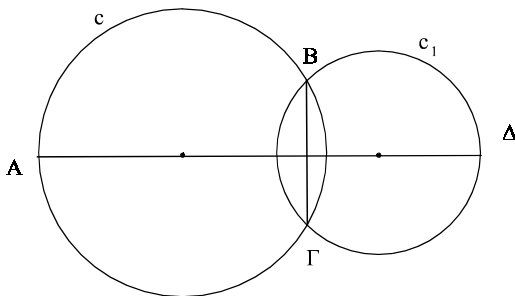
Σε αρκετούς κώδικες υπάρχουν και άλλες αποδείξεις, όπου αντιμετωπίζονται ενιαία οι δύο περιπτώσεις.

Στα σχόλια του Παρισινού κώδικα διαβάζουμε: "νῦν δέ κατὰ ταῦτα μίξας ἅμα δείκνυσιν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ προβλήματι".

Η λύση αυτή, που στηρίζεται στις προτάσεις 11 και 12 είναι:



Σχήμα 27



Σχήμα 28

Έστω c, c_1 οι δύο εφαπτόμενοι κύκλοι στα σημεία B, Γ (Σχ. 27, 28).

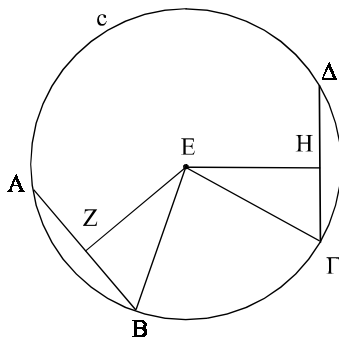
Επειδή η BΓ είναι χορδή και των δύο κύκλων, τα κέντρα τους θα βρίσκονται στη μεσοκάθετη ΑΔ της BΓ, πράγμα άτοπο, αφού τα B, Γ βρίσκονται εκτός της ΑΔ.

4. Σχέσεις με χορδές και εφαπτόμενες

Πρόταση 14 (III. 14)

Σε κύκλο δύο ίσες χορδές ισαπέχουν από το κέντρο και δύο χορδές που ισαπέχουν από το κέντρο είναι ίσες.

Απόδειξη



Σχήμα 29

Έστω κύκλος c και δύο χορδές AB , $\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ (Σχ. 29). Από το κέντρο E φέρουμε κάθετες προς τις AB , $\Gamma\Delta$, οι οποίες διέρχονται από τα μέσα τους Z , H .

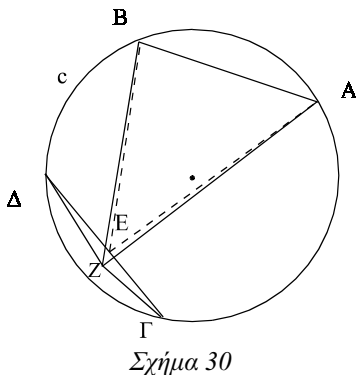
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα (I. 47) προκύπτει ότι $EZ = EH$, δηλαδή οι ίσες χορδές ισαπέχουν από το κέντρο.

Αντιστρόφως, αν οι χορδές AB , $\Gamma\Delta$ ισαπέχουν από το κέντρο E , δηλαδή $EZ = EH$, από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι οι χορδές AB , $\Gamma\Delta$ είναι ίσες.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η απόδειξη που αναφέραμε είναι χαρακτηριστική του ευκλείδειου πνεύματος της λιτότητας και της αποφυγής χάραξης βοηθητικών γραμμών. Πράγματι, αν $AB = \Gamma\Delta$, τα τρίγωνα AEB και $\Gamma E\Delta$ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και τα ορθογώνια τρίγωνα BEZ και ΓEH είναι ίσα. Επειδή όμως στην αντίστροφη πρόταση έχουμε να αντιμετωπίσουμε μια "αμφισβητούμενη" περίπτωση, ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε το Πυθαγόρειο θεώρημα.



Σχήμα 30

Ο al-Nayrizi αναφέρει ότι: "ο Ήρων αποδεικνύει πρώτον με απαγωγή σε άτοπο και ακολούθως απ' ευθείας ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται μεταξύ των δύο χορδών AB και $\Gamma\Delta$ ".

Η απόδειξη αυτή του Ήωνα έχει ως εξής:

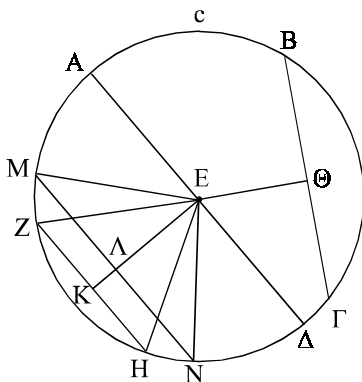
Έστω AB , $\Gamma\Delta$ ίσες χορδές του κύκλου και έστω E το κέντρο του κύκλου που ανήκει π.χ. στην $\Gamma\Delta$ (Σχ. 30).

Τότε $EA = EG = EA = EB$ και $EA + EB = \Gamma\Delta = AB$, που είναι άτοπο. Επίσης, αν το Z είναι το κέντρο, τότε τα τρίγωνα AZB , $\Gamma Z\Delta$ είναι ίσα (ΠΠΠ), άτοπο. Ὡστε το Z βρίσκεται μεταξύ των AB , $\Gamma\Delta$.

Πρόταση 15 (III. 15)

Σε κάθε κύκλο η μεγαλύτερη χορδή είναι η διάμετρος, ενώ από τις άλλες χορδές μεγαλύτερη είναι αυτή που απέχει μικρότερη απόσταση από το κέντρο.

Απόδειξη



Σχήμα 31

Έστω κύκλος c με κέντρο E , διάμετρο AD και χορδές $B\Gamma$ και ZH (Σχ. 31) που απέχουν την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση από το κέντρο E , δηλαδή $E\Theta < EK$ (ορ. 5).

Επί της EK θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = E\Theta$. Από το Λ φέρουμε χορδή $MN \perp EA$ στο Λ . Φέρουμε ακόμα τις EM , EN , EZ , EH και αφού $E\Theta = E\Lambda$, θα είναι και $B\Gamma = MN$ (πρόταση 14).

Ακόμα, αφού $EA = EM$, $ED = EN$, θα είναι

$EA + ED = AD = EM + EN > MN = B\Gamma$, άρα $AD > B\Gamma$.

Τα τρίγωνα EMN , EZH έχουν $EM = EZ$, $EN = EH$ και

$\hat{M}EN > \hat{Z}EH$. Άρα $ZH < MN = B\Gamma$.

Άρα η διάμετρος κύκλου είναι μεγαλύτερη, ενώ και $B\Gamma > ZH$.

ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Ο Heath παρατηρεί ότι η απόδειξη του Ευκλείδη είναι διαφορετική από την απόδειξη που υπήρχε στα εγχειρίδια της εποχής του (Simpson, Hall-Stevens κ.ά.), τα οποία ακολουθούν μια απόδειξη που μοιάζει με αυτή του Θεοδοσίου.

Ο Θεοδόσιος ($1^{\text{ος}}$ - $2^{\text{ος}}$ π.Χ. αιώνας), ένας αστρονόμος και μαθηματικός από την Βιθυνία, έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο "Σφαιρικά", στο οποίο αναφέρει και αποδεικνύει την πρόταση 15, χωρίς να χρησιμοποιεί τη χορδή MN, πράγμα που γίνεται και σε διάφορες εκδόσεις των *Στοιχείων*.

Προφανώς, ισχύει και η αντίστροφη της πρότασης 15, οπότε μπορούμε να γράψουμε $B\Gamma > ZH \Leftrightarrow E\Theta < EK$ και ακόμα $B\Gamma \leq 2R = 2EA$.

Η πρόταση 15 ισχύει και για την Ουδέτερη Γεωμετρία.

Πρόταση 16 (III. 16)

Η κάθετη στο άκρο διαμέτρου του κύκλου θα πέσει εκτός του κύκλου.

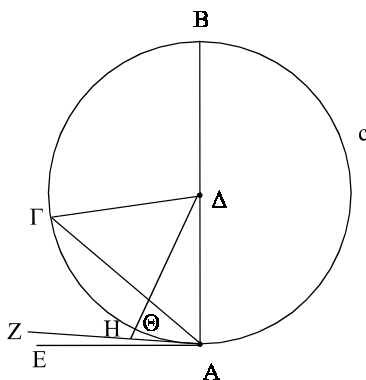
Μεταξύ του κύκλου και της ευθείας δεν είναι δυνατό να αχθεί ημιευθεία με αρχή το άκρο της διαμέτρου.

Η γωνία με πλευρά τη διάμετρο και το ημικύκλιο είναι μεγαλύτερη από κάθε οξεία γωνία με πλευρά τη διάμετρο, ενώ η γωνία με πλευρά την εφαπτόμενη και το ημικύκλιο είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη γωνία.

Απόδειξη

Έστω κύκλος c με κέντρο Δ και διάμετρο AB (Σχ. 32). Θα αποδείξουμε ότι η κάθετος στο A επί την AD βρίσκεται εκτός του κύκλου c .

Έστω ότι αυτό δε συμβαίνει, αλλά ότι η AE έχει κοινό σημείο με το εσωτερικό του κύκλου, όπως η AG . Φέρουμε την $\Delta\Gamma$. Αφού $\Delta A = \Delta\Gamma$, θα έχουμε $\hat{\Delta A\Gamma} = \hat{\Delta\Gamma A} = 1$ ορθή, πράγμα άτοπο (I. 17). Άρα η κάθετη από το A στην AB θα πέσει εκτός κύκλου, έστω στη θέση AE .



Σχήμα 32

Θα αποδείξουμε ότι μεταξύ της ημιευθείας AE και του τόξου $\overset{\frown}{A\Theta\Gamma}$ δε θα υπάρχει άλλη ημιευθεία με αρχή το A .

Έστω ότι υπάρχει τέτοια ημιευθεία, π.χ. η AZ . Αν φέρουμε $\Delta H \perp AZ$, τότε $\Delta H < \Delta A$, και αφού $\Delta A = \Delta\Theta$, θα είναι $\Delta H < \Delta\Theta$, δηλαδή το μικρότερο

ευθύγραμμο τμήμα είναι μεγαλύτερο του μεγαλύτερου, πράγμα άτοπο. Άρα δεν υπάρχει ημιευθεία από το Α μεταξύ της ΑΕ και του τόξου $\overset{\cap}{A\Theta\Gamma}$.

Θα αποδείξουμε ακόμα ότι η γωνία με πλευρά την ΑΒ και το τόξο $\overset{\cap}{A\Gamma B}$ είναι μεγαλύτερη από κάθε οξεία γωνία με πλευρά την ΑΒ.

Πράγματι, αν υπήρχε οξεία γωνία μεγαλύτερη, η πλευρά της ΑΖ θα έπρεπε να βρίσκεται μεταξύ της εφαπτομένης ΑΕ και του τόξου $\overset{\cap}{A\Gamma B}$, πράγμα που δεν είναι δυνατό να συμβαίνει, όπως δείξαμε.

Τέλος, η γωνία με πλευρές την εφαπτομένη ΑΕ και το τόξο $\overset{\cap}{A\Gamma B}$ είναι μικρότερη κάθε οξείας γωνίας $\overset{\wedge}{E\hat{A}Z}$, αφού η ΑΖ θα τέμνει το τόξο $\overset{\cap}{A\Gamma B}$.
 ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 16 αποτελεί την αρχή της ομάδας (γ) της οποίας οι προτάσεις αφορούν εφαπτόμενες σε σημείο του κύκλου (προτάσεις 16 μέχρι 19). Οι 16, 17 αναφέρονται στην ύπαρξη και οι 18, 19 στη μοναδικότητα.

Ο Heath στα σχόλιά του αναφέρει ότι η πρόταση 16 αποκτά ιστορική σημασία, γιατί υπήρξε αφορμή αντιπαράθεσων κατά το διάστημα από το 13^ο έως το 17^ο αιώνα. Αυτή η αντιπαράθεση φαίνεται πως είχε τις ρίζες της στην προευκλείδεια εποχή και αφορούσε τη φύση της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη στο άκρο της διαμέτρου ενός ημικυκλίου και του ημικυκλίου. Δηλαδή, της μεικτής γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο άκρο της διαμέτρου και του τόξου του ημικυκλίου.

Η αντιπαράθεση αυτή αφορούσε την ισότητα και το λόγο των μεικτών γωνιών π.χ. των κερατοειδών. Αν π.χ. οι κερατοειδείς γωνίες είναι μεγέθη, όπως οι ευθύγραμμες γωνίες, τότε, όπως όλα τα πεπερασμένα μεγέθη του αυτού είδους, θα είχαν κάποιο λόγο. Επομένως, θα υπήρχε ο λόγος μιας κερατοειδούς γωνίας $\hat{k}$ προς μια ευθύγραμμη γωνία $\overset{\wedge}{\omega}$. Άρα θα υπήρχε αριθμός $n \in \mathbb{N}$, ώστε $n \cdot \overset{\wedge}{\omega} = \hat{k}$.

Αυτό όμως λόγω της πρότασης 16 είναι άτοπο, αφού για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει το αξίωμα του Αρχιμήδη.

Πάντως τον 16^ο αιώνα οι μαθηματικοί είχαν διαιρεθεί σε δύο στρατόπεδα για το αν μια κερατοειδής γωνία είναι πράγματι γωνία.

Στη διαμάχη αναμείχθηκαν και οι Cardano, Peletier, Clavius, Viète, Γαλλιλαιός, Wallis. Οι Viète και Γαλλιλαιός, που θεωρούσαν τον κύκλο σαν ένα κανονικό n -γωνο με άπειρο πλήθος πλευρών, πίστευαν ότι η κερατοειδής γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη του κύκλου με τον κύκλο ήταν πραγματική γωνία. Την ίδια άποψη είχε και ο Νεύτων, όπως προκύπτει από τα σχόλιά του στο λήμμα XI του πρώτου βιβλίου των "*Principia Mathematica*".

Φαίνεται όμως ότι η διαμάχη είχε αρχίσει από την εποχή του Δημοκρίτου, όπως μας πληροφορεί ο Διογένης ο Λαέρτιος, ενώ στο ίδιο θέμα αναφέρεται και ο Αριστοτέλης.

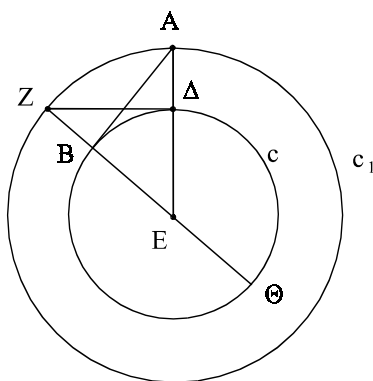
Πόρισμα:

Η κάθετος στο άκρο διαμέτρου ενός κύκλου, εφάπτεται στον κύκλο.

Πρόταση 17 (III. 17)

Από δοθέν σημείο να αχθεί εφαπτομένη σε δοθέντα κύκλο.

Απόδειξη



Σχήμα 33

Έστω c ο κύκλος με κέντρο E και A το σημείο (Σχ. 33). Θέλουμε από το A να φέρουμε εφαπτομένη του c . Φέρουμε την AE και γράφουμε τον κύκλο $c_1(E, AE)$.

Αν Δ είναι η τομή της AE με τον c , φέρουμε στο Δ κάθετη στην AE , έστω ΔZ .

Φέρουμε την EZ που τέμνει τον c στο B . Θα αποδείξουμε ότι η AB είναι η ζητούμενη εφαπτομένη του κύκλου c .

Πράγματι, επειδή $EA = EZ$ και $EB = ED$ και $\hat{AEB} = \hat{ZED}$ τα τρίγωνα ABE , ZDE είναι ίσα, οπότε $\hat{ABE} = \hat{ZDE} = 1$ ορθή, άρα $AB \perp BE$.

Αφού λοιπόν η AB είναι κάθετη στο άκρο της διαμέτρου $B\Theta$, θα είναι εφαπτόμενη του c από το σημείο A .

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Από την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ότι από σημείο εκτός κύκλου μπορούμε να φέρουμε δύο ακριβώς εφαπτόμενες του κύκλου, οι οποίες είναι και ίσες και σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ευθεία που συνδέει το κέντρο του κύκλου με το σημείο, όπως αναφέρει ο Ήρων. Επομένως από σημείο εκτός κύκλου δεν είναι δυνατόν να φέρουμε τρεις ή περισσότερες εφαπτόμενες του κύκλου.

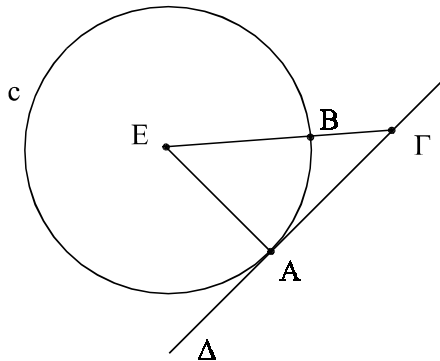
Η πρόταση 17 ισχύει και για μια Ουδέτερη Γεωμετρία, δηλαδή μια Γεωμετρία στην οποία ισχύουν τα αξιώματα εκτός από το αξίωμα των παραλλήλων.

Ο Ευκλείδης κατά την πάγια τακτική του δεν εξετάζει την περίπτωση που το σημείο A ανήκει στον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή βέβαια μπορούμε να φέρουμε ακριβώς μια εφαπτομένη του κύκλου.

Σε μια μετρική Γεωμετρία με μετρική $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ όπου $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ η πρόταση δεν ισχύει, αφού σε κάθε κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ υπάρχουν μόνο 4 σημεία από τα οποία μπορούμε να φέρουμε εφαπτόμενες στον κύκλο και μάλιστα άπειρες.

Πρόταση 18 (III. 18)

Αν ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, τότε η ευθεία που συνδέει το κέντρο με το σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Απόδειξη

Σχήμα 34

Έστω ότι η ευθεία $\Delta\Gamma$ εφάπτεται του κύκλου c στο σημείο A (Σχ. 34). Συνδέουμε το κέντρο E με το A . Θα αποδείξουμε ότι $EA \perp \Delta\Gamma$.

Έστω ότι αυτό δε συμβαίνει, αλλά ότι $EG \perp \Delta\Gamma$.

Επειδή λοιπόν $\angle E\hat{A} = 1$ ορθή, θα είναι $EA = EB > EG$, πράγμα άτοπο.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει άλλη κάθετη από το E στην $\Delta\Gamma$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Και η πρόταση 18 ισχύει για την Ουδέτερη Γεωμετρία, ενώ γενικά δεν ισχύει για μετρικές γεωμετρίες.

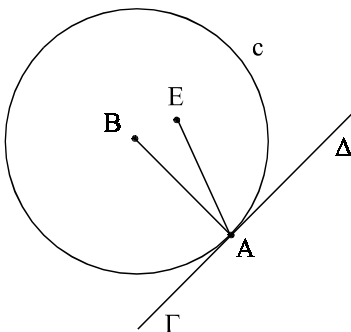
Από την πρόταση 18 προκύπτουν άμεσα οι προτάσεις:

- (α) *Οι εφαπτόμενες ενός κύκλου στα άκρα μιας διαμέτρου είναι παράλληλες.*
- (β) *Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά ή εξωτερικά, μπορούμε να φέρουμε από το σημείο επαφής μια κοινή εφαπτομένη αυτών.*

Πρόταση 19 (III. 19)

Αν ευθεία είναι εφαπτομένη κύκλου και από το σημείο επαφής φέρουμε κάθετη στην εφαπτομένη, τότε αυτή διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Απόδειξη



Σχήμα 35

Έστω ευθεία ΓΔ εφαπτομένη του κύκλου c στο σημείο Α και ας φέρουμε κάθετη ΑΒ στο σημείο Α της ΓΔ (Σχ. 35). Θα αποδείξουμε ότι το κέντρο Ε βρίσκεται επί της ΑΒ.

Έστω ότι αυτό δε συμβαίνει, δηλαδή το Ε δεν ανήκει στην ΑΒ. Τότε, αν φέρουμε την ΕΑ, θα είναι $EA \perp \Gamma\Delta$, οπότε

$$1 \text{ ορθή} = \hat{E\Delta\Gamma} > \hat{\Gamma\Delta\text{B}} = 1 \text{ ορθή, που είναι άτοπο.}$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Προφανώς, οι προτάσεις 18 και 19 είναι αντίστροφες. Μάλιστα σε πολλούς κώδικες οι δύο προτάσεις αναφέρονται σαν μία.

Ως πορίσματα των προτάσεων 19, 20 μπορούμε να θεωρήσουμε τις προτάσεις:

- (α) *Αν δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι και μια χορδή του μεγαλύτερου εφάπτεται στο μικρότερο, το σημείο επαφής διχοτομεί τη χορδή.*
- (β) *Αν δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι, τότε οι χορδές του μεγαλύτερου που εφάπτονται στο μικρότερο είναι ίσες.*

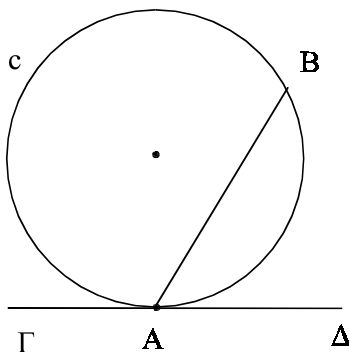
Όπως αναφέραμε, οι προτάσεις 16 μέχρι 19 αποτελούν ένα κομβικό σημείο του βιβλίου ΙΙΙ και αφορούν σε σχέσεις μεταξύ εφαπτομένων κύκλων και εφαπτομένης ευθείας σε κύκλο. Τις προτάσεις αυτές μπορούμε να τις ενσωματώσουμε στην παρακάτω πρόταση:

Αν AB μια χορδή του κύκλου c και $\Gamma A \Delta$ μια ευθεία, τότε, αν ισχύουν δύο από τις παρακάτω προτάσεις, θα ισχύει και η τρίτη:

α) Η AB είναι κάθετη στην $\Gamma A \Delta$

β) Η AB είναι διάμετρος του κύκλου.

γ) Η $\Gamma A \Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Σχ. 36).



Σχήμα 36

Στα σχόλια πολλών κωδίκων αναφέρεται και η πρόταση:

Αν από το κέντρο ενός κύκλου φέρουμε κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου, τότε αυτή διέρχεται από το σημείο επαφής.

Στις σύγχρονες γεωμετρίες γενικεύουμε την έννοια της εφαπτομένης, με εκείνη της **ευθείας στήριξης** ή της **υποεφαπτομένης**.

Έστω σχήμα F και ευθεία ε . Θα ονομάζουμε την ε **ευθεία στήριξης** ή **υποεφαπτομένη** του σχήματος F , αν:

α) $F \cap \varepsilon \neq \emptyset$,

β) $[\text{int}(F)] \cap \varepsilon = \emptyset$.

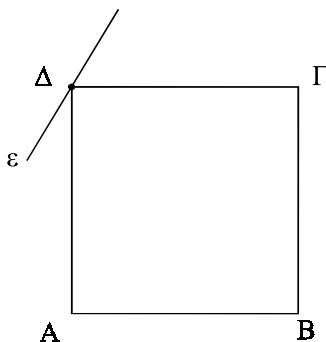
Προφανώς, μια εφαπτομένη είναι και **ευθεία στήριξης** του σχήματος, ενώ το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές.

Π.χ. η πλευρά AB είναι **ευθεία στήριξης** του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, αλλά δεν είναι εφαπτομένη του τετραγώνου.

Η ευθεία όμως ε που είναι εφαπτομένη του τετραγώνου είναι και **ευθεία στήριξης** (Σχ.37).

Για την ευκλείδεια και μερικές μετρικές Γεωμετρίες ισχύει:

α) Από κάθε σημείο ενός κύκλου μπορούμε να φέρουμε **υποεφαπτομένη** του κύκλου.



Σχήμα 37

β) Από κάθε σημείο εκτός κύκλου μπορούμε να φέρουμε δύο υπογεγραπτόμενες του κύκλου.

Παρατηρώντας το διάγραμμα 2 της § 1 κατανοούμε ότι οι προτάσεις 16 μέχρι 19, μαζί με το πόρισμα της πρότασης 16, αποτελούν ένα κομβικό σημείο για το βιβλίο αυτό και ότι από αυτές, καθώς και από την 20, μπορούν να προκύψουν οι επόμενες προτάσεις του βιβλίου αυτού.

Θα παρατηρήσουμε τέλος ότι οι προτάσεις 2 μέχρι 19 ισχύουν και στην Ουδέτερη Γεωμετρία.

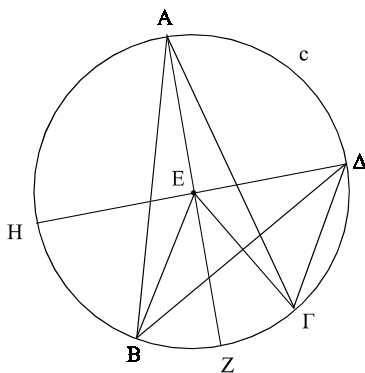
5. Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες

Οι προτάσεις 20 μέχρι 34 που αποτελούν το τρίτο μέρος του βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, αποδεικνύεται ότι ισχύουν και στο ευκλείδειο επίπεδο. Στο βιβλίο ΙΙΙ για πρώτη φορά κάνουμε χρήση του 5^{ου} αξιώματος, αφού για την απόδειξη της πρότασης 20 κάνουμε χρήση της Ι. 32, που εξαρτάται από το 5^ο αξίωμα.

Πρόταση 20 (ΙΙΙ. 20)

Σε κύκλο η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια κάθε εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει στο τόξο της επίκεντρης.

Απόδειξη



Σχήμα 38

Έστω κύκλος c με κέντρο E , γωνία $\hat{BEG}$ επίκεντρη και $\hat{BAG}$ εγγεγραμμένη (Σχ. 38). Θα αποδείξουμε ότι η $\hat{BEG} = 2\hat{BAG}$.

Φέρουμε την AE , που τέμνει τον c στο Z . Παρατηρούμε ότι αφού $EB = EA = EG$, θα είναι $\hat{BEZ} = 2\hat{BAE}$ και $\hat{ZEG} = 2\hat{EAG}$.

Άρα $\hat{BEG} = 2\hat{BAG}$.

Στην περίπτωση που το κέντρο E δε βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας, π.χ. αν αυτή είναι η $\hat{BAG}$, τότε φέρνουμε τη ΔEH , οπότε $\hat{HEG} = 2\hat{HAG}$, $\hat{HEB} = 2\hat{HAB}$.

Άρα $\hat{HEG} - \hat{HEB} = 2(\hat{HAG} - \hat{HAB})$ ή $\hat{BEG} = 2\hat{BAG}$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Ο al-Nayrizi αναφέρει ότι ο Ήρων εξετάζει και την περίπτωση που η εγγεγραμμένη γωνία βαίνει σε τόξο μεγαλύτερο ημιπεριφερείας, γενικεύοντας την πρόταση του Ευκλείδη και εκφράζοντας τη μεγαλύτερη των 2 ορθών αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ως άθροισμα γωνιών που έχουν έννοια κατά Ευκλείδη.

Η πρόταση λοιπόν ισχύει και στην περίπτωση που το τόξο $\overset{\cap}{AB}$ είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές. Μάλιστα, πολλοί από τους πρώτους εκδότες των *Στοιχείων* περιείχαν στην απόδειξη της πρότασης 20 και την περίπτωση αυτή, που μάλλον δε θα υπήρχε στο αυθεντικό κείμενο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, αφού όπως έχουμε πολλές φορές αναφέρει, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν ενδιαφέρονταν για προτάσεις χωρίς ουσιαστικό περιεχόμενο. Την άποψη ενισχύει και το γεγονός ότι η περίπτωση αυτή δεν περιέχεται στη λατινική μετάφραση από την αραβική, που πιθανόν έκανε ο H. von Carinthia.

Η πρόταση 20 παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για τον κύκλο, καθώς και για τα εγγράψιμα και περιγράψιμα πολύγωνα. Είναι μια βασική πρόταση, που μας επιτρέπει να βρούμε σχέσεις μεταξύ εγγεγραμμένων

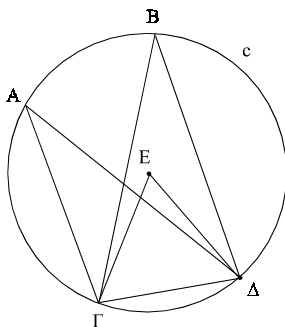
σε κύκλο γωνιών και των αντίστοιχων τόξων. Για το λόγο αυτό έχει σημαντική θέση στη σύγχρονη Ευκλείδεια Γεωμετρία, καθώς και στα *Στοιχεία*, όπου αναφέρεται πάρα πολλές φορές.

Αναφέρουμε, τέλος, ότι σε μια Ουδέτερη Γεωμετρία η πρόταση 20 δεν ισχύει, γιατί είναι ισοδύναμη με το αξίωμα των παραλλήλων, αφού όπως ήδη αναφέραμε στην απόδειξη της πρότασης 20, χρησιμοποιήσαμε την πρόταση I. 32 η οποία εξαρτάται από το 5^ο αίτημα, δηλαδή ισχύει μόνο στο ευκλείδειο επίπεδο.

Πρόταση 21 (III. 21)

Οι γωνίες του ίδιου τμήματος κύκλου είναι ίσες.

Απόδειξη



Σχήμα 39

Έστω κύκλος c , τμήμα $\Gamma A B \Delta$ και οι γωνίες $\hat{\Gamma A \Delta}$, $\hat{\Gamma B \Delta}$ του τμήματος (Σχ. 39). Θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{\Gamma B \Delta}$.

Πράγματι, αν E το κέντρο του c , τότε $2\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{\Gamma E \Delta}$ και $2\hat{\Gamma B \Delta} = \hat{\Gamma E \Delta}$.

Άρα $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{\Gamma B \Delta}$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

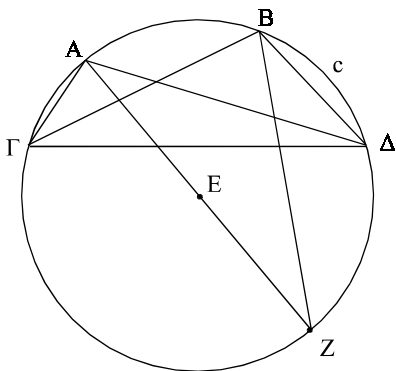
Προφανώς, η πρόταση 21 θα μπορούσε να θεωρηθεί πόρισμα της πρότασης 20.

Η πρόταση μας καθορίζει μια *αναλλοίωτη*, που είναι το μέτρο των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

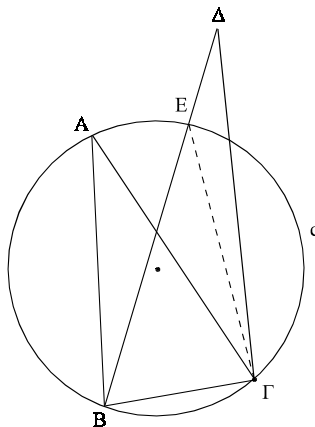
Η απόδειξη ισχύει εφ' όσον η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο τμήμα είναι μικρότερη από 2 ορθές, δηλαδή έχει έννοια ως ευκλείδεια γωνία. Αν αυτό δεν συμβαίνει, χρησιμοποιούμε μια απόδειξη που υπάρχει σε πολλούς κώδικες, αλλά και σε πολλές μεταφράσεις: π.χ. Hall-Stevens, R. Simson.

Η απόδειξη έχει ως εξής:

Αν Ε το κέντρο του κύκλου c , φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τον κύκλο στο Ζ (Σχ. 40).



Σχήμα 40



Σχήμα 41

Τότε $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{Z}$ και $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{Z}$ άρα $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta}$.

Με τη βοήθεια της απαγωγής σε άτοπο μπορούμε να αποδείξουμε την αντίστροφη πρόταση της πρότασης 21, μια εξαιρετικά χρήσιμη πρόταση, που έχει ως εξής:

Αν δύο τρίγωνα έχουν την ίδια βάση και τις απέναντι γωνίες ίσες, τότε οι κορυφές των γωνιών βρίσκονται στο τόξο ενός κύκλου που έχει ως χορδή τη βάση των τριγώνων.

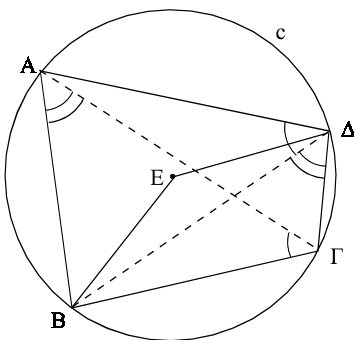
Έστω $\triangle B\Lambda\Gamma$, $\triangle B\Delta\Gamma$ δύο τρίγωνα με κοινή βάση $B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$ (Σχ. 41).

Περιγράφουμε κύκλο c περί το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Έστω ότι ο κύκλος αυτός δε διέρχεται από το Δ , αλλά τέμνει την $B\Delta$ στο E . Τότε $\hat{B\Lambda\Gamma} = \hat{B\hat{E}\Gamma} = \hat{B\Delta\Gamma}$, που είναι άτοπο, αφού η $\hat{B\hat{E}\Gamma}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle E\Delta\Gamma$, άρα $\hat{B\hat{E}\Gamma} > \hat{B\Delta\Gamma}$. Επομένως το Δ ταυτίζεται με το E .

Πρόταση 22 (III. 22)

Το άθροισμα των απέναντι γωνιών εγγεγραμμένου σε κύκλο τετραπλεύρου είναι ίσο με δύο ορθές.

Απόδειξη



Σχήμα 42

Έστω κύκλος c και τετράπλευρο $\triangle AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σ' αυτόν (Σχ. 42).

Θα αποδείξουμε ότι

$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Delta} = 2 \text{ ορθές.}$$

Φέρνουμε τις διαγώνιες AG , BD . Τότε $\hat{A\Delta B} = \hat{A\Gamma B}$ και

$$\hat{\Gamma\Delta B} = \hat{\Gamma\Delta B}. \text{ Έχουμε } \hat{A\Delta\Gamma} = \hat{A\Gamma B} + \hat{\Gamma\Delta B}.$$

Τότε $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} + \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ή

$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 2$ ορθές ή $\hat{B} + \hat{\Delta} = 2$ ορθές.

Ομοίως και $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Μια άλλη απόδειξη προκύπτει άμεσα από την πρόταση 20.

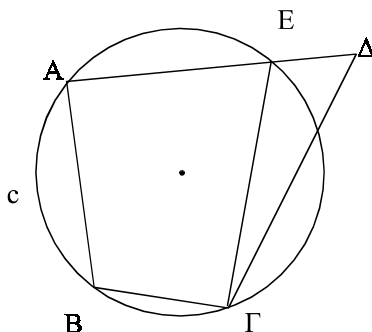
Πράγματι, $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2} \hat{\Delta}\hat{E}\hat{B}$ και $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{B} = \frac{1}{2} \hat{\Delta}\hat{E}\hat{B}$, (η $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{B}$ είναι η μη κυρτή γωνία), οπότε $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{B} = \frac{1}{2} \hat{\Delta}\hat{E}\hat{B} + \frac{1}{2} \hat{\Delta}\hat{E}\hat{B} = \frac{1}{2} (4 \text{ ορθές}) = 2$ ορθές.

Σε πολλούς κώδικες υπάρχει και η αντίστροφη πρόταση της πρότασης 22, που είναι εξαιρετικά χρήσιμη στη σύγχρονη Γεωμετρία του κύκλου.

Η αντίστροφη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Αν το άθροισμα των απέναντι γωνιών κυρτού τετραπλεύρου είναι 2 ορθές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Πράγματι, θεωρούμε το κύκλο c που διέρχεται από τα A, B, Γ και έστω ότι ο κύκλος δεν περνά από το Δ , αλλά τέμνει την $A\Delta$ στο E (Σχ. 43).



Σχήμα 43

Τότε $\hat{B} + \hat{E} = \hat{B} + \hat{\Delta} = 2$ ορθές,

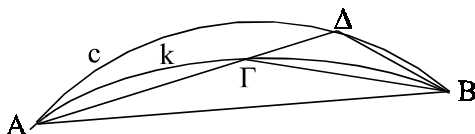
άρα $\hat{E} = \hat{\Delta}$, που είναι άτοπο. Άρα ο κύκλος διέρχεται από το Δ .

Και η πρόταση 22 δεν ισχύει για μια Ουδέτερη Γεωμετρία, δηλαδή είναι ισοδύναμη με το αξίωμα των παραλλήλων.

Πρόταση 23 (III. 23)

Δεν είναι δυνατό να κατασκευασθούν δύο τμήματα άνισα και όμοια με κοινή χορδή και προς το ίδιο μέρος της χορδής.

Απόδειξη



Σχήμα 44

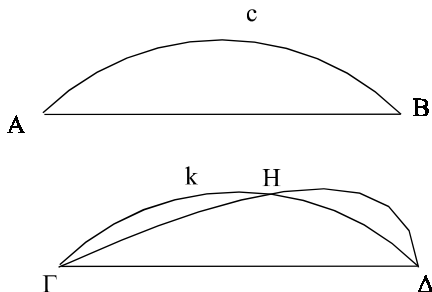
Έστω ότι είναι δυνατό να κατασκευασθούν δύο τμήματα κύκλων με κοινή χορδή, όμοια (ορισμός 11) και άνισα, τα c, k με κοινή χορδή AB και προς το ίδιο μέρος της AB (Σχ. 44). Επειδή τα κυκλικά τμήματα έχουν δύο κοινά σημεία, δεν είναι δυνατόν να έχουν και τρίτο, οπότε το ένα τμήμα θα βρίσκεται εντός του άλλου.

Τότε όμως οι γωνίες $\hat{AGB}$ και $\hat{ADB}$ θα πρέπει να είναι ίσες, γιατί τα τμήματα είναι όμοια, πράγμα άτοπο, αφού $\hat{AGB} > \hat{ADB}$ ως εξωτερική του τριγώνου $\Gamma\Delta B$ (πρόταση I. 16).

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η συνθήκη "προς το ίδιο μέρος" προφανώς δεν είναι απαραίτητη, αφού θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τα τμήματα εκατέρωθεν της AB και ακολούθως να πάρουμε το συμμετρικό του ενός τμήματος ως προς τη χορδή AB , οπότε τα νέα τμήματα θα βρίσκονταν προς το ίδιο μέρος του AB .

Πρόταση 24 (III. 24)*Όμοια τμήματα κύκλων με ίσες χορδές είναι ίσα.***Απόδειξη**

Σχήμα 45

Έστω τα όμοια τμήματα c , k με ίσες χορδές AB , $\Gamma\Delta$ (Σχ. 45). Εφαρμόζουμε το τμήμα k πάνω στο τμήμα c ώστε το σημείο A να συμπίπτει με το Γ και η AB με τη $\Gamma\Delta$, οπότε, αφού $AB = \Gamma\Delta$, το σημείο B θα συμπίπτει με το Δ . Τότε και το τμήμα c θα ταυτισθεί με το k , γιατί, αφού το τμήμα AB θα ταυτισθεί με το $\Gamma\Delta$, τότε, αν το τμήμα c δεν ταυτισθεί με το τμήμα k , θα πέσει εντός ή εκτός του k ή θα "παραλλάξει" όπως το $\Gamma H \Delta$, δηλαδή ένα μέρος του θα βρίσκεται στο εσωτερικό και ένα άλλο στο εξωτερικό του τμήματος k . Τότε το c θα τέμνει το k και οι κύκλοι θα είχαν τρία κοινά σημεία, πράγμα άτοπο (πρόταση 10).

Οπότε, αν εφαρμόσει το AB με το $\Gamma\Delta$, θα εφαρμόσει και το τμήμα c με το k .

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Σε σχόλια του Παρισινού κώδικα διαβάζουμε: "Ἄμα γάρ ἐφ' ἑκάτερα μέρη δύναται συσταθῆναι, τό μὲν ἐν ἐπὶ τοῦ ἑνὸς μέρους, τό δ' ἕτερον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου". Δεν είναι δηλαδή απαραίτητο τα δύο τμήματα να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος ως προς τις χορδές.

Παρατηρούμε ακόμα ότι το λεξιλόγιο του κειμένου του Ευκλείδη έχει στο σημείο αυτό κοινά με το λεξιλόγιο του Αυτόλυκου της Πιτάνης στο βιβλίο "Περὶ κινουμένων σφαιρῶν", όπως π.χ τη λέξη "παρὰλλάξει" κ.ά.

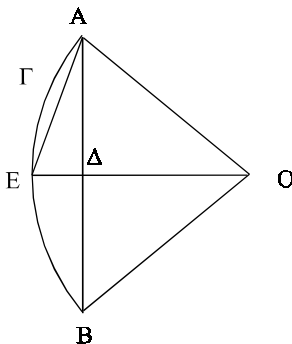
Πολλοί από τους πρώτους εκδότες αναφέρουν σαν σχόλιο ότι άμεση συνέπεια της πρότασης 24 είναι η πρόταση:

Αν δύο άνισα τόξα έχουν κοινή χορδή (βάση), το εξωτερικό δέχεται μεγαλύτερη γωνία από το εσωτερικό.

Πρόταση 25 (III. 25)

Αν δοθεί κυκλικό τμήμα, να κατασκευάσετε τον κύκλο στον οποίο ανήκει το τμήμα.

Απόδειξη



Σχήμα 46

Έστω κυκλικό τμήμα ΑΓΒ. Θέλουμε να κατασκευάσουμε τον κύκλο ϵ στον οποίο ανήκει το κυκλικό τμήμα.

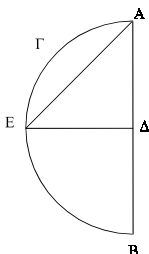
Από το μέσο Δ της AB φέρνουμε την κάθετη στην AB , η οποία τέμνει το τμήμα στο E . Φέρνουμε και την AE . Η γωνία $\hat{AEO}$ θα είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη από την $\hat{EAD}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

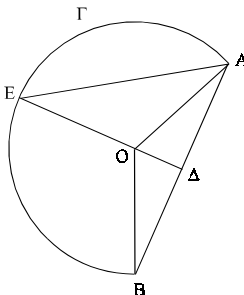
α) $\hat{AEO} > \hat{EAD}$ (Σχ. 46).

Με πλευρά EA κατασκευάζουμε γωνία $\hat{EAO} = \hat{AEO}$. Προεκτείνουμε την ED μέχρι το O και φέρνουμε την OB . Αφού $\hat{AEO} = \hat{EAO}$, θα είναι $OA = OE$ και αφού $A\Delta = \Delta B$ και η OD κοινή, θα είναι $\hat{ADO} = \hat{BDO} = 1$ ορθή.

Άρα $OA = OE = OB$. Επομένως ο κύκλος που έχει κέντρο O και ακτίνα OA θα είναι ο κύκλος στον οποίο ανήκει το τμήμα $ΑΓΒ$, που είναι και μικρότερο από ημικύκλιο, αφού το κέντρο O βρίσκεται εκτός αυτού.



Σχήμα 47



Σχήμα 48

β) $\hat{AED} = \hat{EAD}$ (Σχ. 47). Τότε $DA = DE = DB$, δηλαδή το D είναι το κέντρο του κύκλου στον οποίο ανήκει το τμήμα που είναι ημικύκλιο.

γ) $\hat{AED} < \hat{EAD}$ (Σχ. 48). Κατασκευάζουμε με πλευρά AE γωνία $\hat{EAO}$ ίση με τη γωνία $\hat{AED}$. Τότε $OA = OB = OE$, δηλαδή το O είναι το κέντρο του κύκλου (πρόταση 9).

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Ο Ευκλείδης με τη βοήθεια της πρότασης 9 κάνει εδώ μια κατασκευή που ουδέποτε θα χρησιμοποιήσει στα *Στοιχεία*. Μάλιστα, θα μπορούσε να τοποθετήσει τις προτάσεις 9 και 25 αμέσως μετά την πρόταση 1. Φαίνεται όμως να υπάρχει κάποια λογική για την τοποθέτησή της μετά τις προτάσεις 23 και 24.

Παρατηρούμε ότι ο Ευκλείδης προϋποθέτει την ύπαρξη του κύκλου στον οποίο ανήκει το δοσμένο τόξο, χωρίς να αποδεικνύει κάτι τέτοιο.

Κατά την πάγια τακτική του, στην απόδειξη δε διακρίνει όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις για τις γωνίες $\hat{AED}$. Η μελέτη όλων αυτών των περιπτώσεων έγινε αργότερα.

Υπάρχουν όμως και ιστορικοί που πιστεύουν ότι η μελέτη όλων των περιπτώσεων της πρότασης 25 ήταν αναγκαία και οφείλεται στον

Ευκλείδη, γιατί η κατασκευή εξαρτάται από τη σχέση των γωνιών $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$, $\hat{E}\hat{A}\hat{\Delta}$.

Ο Heath θεωρεί την πρόταση 25 ως πραγματικό πόρισμα (*real porism*).

Πολλοί από τους μεταφραστές του Ευκλείδη δίνουν άλλη λύση, θεωρώντας δύο (όχι κάθετες) διαδοχικές χορδές του τόξου $\overset{\cap}{A}\Gamma B$ και τις μεσοκάθετες στις χορδές. Η τομή των μεσοκαθέτων ορίζει το κέντρο του κύκλου.

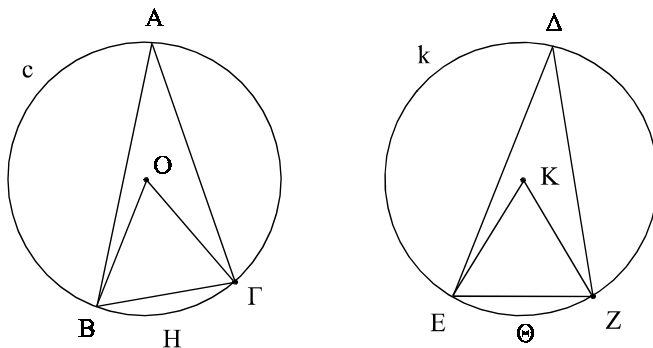
Η πρόταση 25 στα σημερινά εγχειρίδια έχει την ακόλουθη μορφή:

Να κατασκευασθεί ένας κύκλος του οποίου δίνεται ένα τόξο.

Πρόταση 26 (III. 26)

Σε ίσους κύκλους, ίσες γωνίες επίκεντρες ή εγγεγραμμένες βαίνουν σε ίσα τόξα.

Απόδειξη



Σχήμα 49

Έστω c , k δύο ίσοι κύκλοι και $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{K}\hat{Z}$ (οπότε και $\hat{A} = \hat{\Delta}$) (Σχ. 49). Θα αποδείξουμε ότι τα τόξα $\overset{\cap}{B}\hat{H}\hat{\Gamma}$ και $\overset{\cap}{E}\hat{\Theta}\hat{Z}$ είναι ίσα.

Πράγματι, τα τρίγωνα $\triangle BOΓ$, $\triangle EKZ$ έχουν $OB = KE$, $OG = KZ$ και $\hat{BOΓ} = \hat{EKZ}$, άρα και $BΓ = EZ$. Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{\Delta}$, το τμήμα $BΗΓ$ θα είναι όμοιο με το τμήμα $EΘZ$. Αλλά τα τμήματα αυτά έχουν ίσες χορδές $BΓ$, EZ , επομένως είναι ίσα. Συνεπώς, αφού και οι κύκλοι c , k είναι ίσοι και τα τόξα $\overset{\cap}{BΗΓ}$ $\overset{\cap}{EΘZ}$ είναι ίσα.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Επειδή για τον Ευκλείδη οι επίκεντρες γωνίες δεν έχουν νόημα αν δεν είναι μικρότερες από 2 ορθές, δεν εξετάστηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες συμβαίνει αυτό. Προφανώς λοιπόν θα πρέπει να εξετασθούν και άλλες περιπτώσεις, πράγμα που γίνεται αργότερα.

Κατά τη γνώμη μας, η απόδειξη των *Στοιχείων* είναι κάπως ανορθόδοξη, γιατί στην υπόθεση θεωρείται ότι και οι επίκεντρες και οι εγγεγραμμένες γωνίες στα τόξα είναι ίσες. Λόγω της πρότασης 20 όμως μπορούμε να δικαιολογήσουμε αυτή την απόδειξη. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι δεν υπάρχει σχολιαστής, από όσο τουλάχιστον γνωρίζουμε, που να ασχολήθηκε με τη λύση αυτή.

Ούτε είναι η πρώτη "διπλή" πρόταση των *Στοιχείων* (βλέπε π.χ. XIII. 8)

Επίσης, πρέπει να δεχθούμε ότι στην εκφώνηση των προτάσεων 26 μέχρι 29 αντί για "*ίσους κύκλους*", θα πρέπει να αναφερόμαστε σε κύκλους με ίσες ακτίνες.

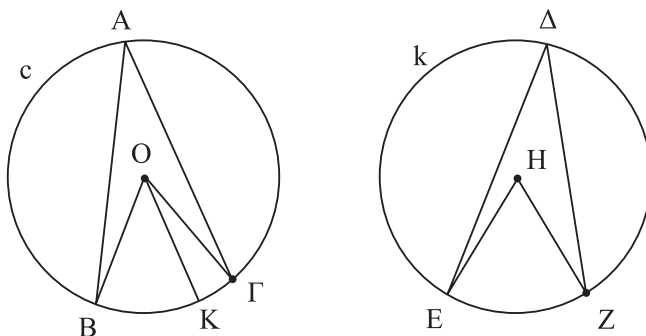
Στα σχόλια του Βατικανού κώδικα αναφέρεται ότι η πρόταση 26 προκύπτει άμεσα από τις προτάσεις 24 και 25.

Η πρόταση 26 χρησιμοποιείται πολλές φορές στα *Στοιχεία*.

Πρόταση 27 (III. 27)

Σε ίσους κύκλους, σε ίσα τόξα, βαίνουν ίσες γωνίες επίκεντρες είτε εγγεγραμμένες.

Απόδειξη



Σχήμα 50

Έστω κύκλοι c, k ίσοι μεταξύ τους και τα ίσα τόξα τους $\overset{\cap}{B\Gamma} = \overset{\cap}{E\Z}$ (Σχ. 50). Αν $\hat{B\O\Gamma}$, $\hat{E\H\Z}$ οι επίκεντρες και $\hat{B\A\Gamma}$, $\hat{E\Delta\Z}$ οι εγγεγραμμένες γωνίες θα αποδείξουμε ότι $\hat{B\O\Gamma} = \hat{E\H\Z}$.

Αν υποθέσουμε ότι π.χ. $\hat{B\O\Gamma} > \hat{E\H\Z}$ και κατασκευάσουμε γωνία $\hat{B\O\K} = \hat{E\H\Z}$, τότε θα είναι $\overset{\cap}{B\K} = \overset{\cap}{E\Z} = \overset{\cap}{B\Gamma}$ (πρόταση 26), πράγμα άτοπο. Επομένως $\hat{B\O\Gamma} = \hat{E\H\Z}$. Και αφού $\hat{B\A\Gamma} = \frac{1}{2} \hat{B\O\Gamma}$, $\hat{E\Delta\Z} = \frac{1}{2} \hat{E\H\Z}$, οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{B\A\Gamma}$ και $\hat{E\Delta\Z}$, που βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\cap}{B\Gamma}$, $\overset{\cap}{E\Z}$ είναι ίσες.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλιο

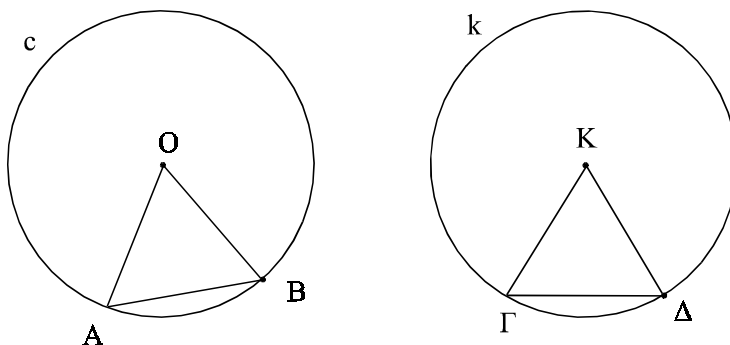
Η πρόταση 27 είναι αντίστροφη της πρόταση 26, επομένως και στην πρόταση αυτή θα πρέπει να εξετασθούν οι αντίστοιχες περιπτώσεις.

Πρόταση 28 (III. 28)

Σε ίσους κύκλους ίσες χορδές ορίζουν ίσα τόξα (μείζονα ή ελάσσονα).

Απόδειξη

Έστω c και k δύο ίσοι κύκλοι και $AB, \Gamma\Delta$ ίσες χορδές τους. Θα αποδείξουμε ότι τα μείζονα και τα ελάσσονα τόξα $\widehat{AB}, \widehat{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα (Σχ. 51).



Σχήμα 51

Συνδέουμε τα κέντρα O, K των κύκλων με τα A, B, Γ, Δ . Τα τρίγωνα $AOB, \Gamma K\Delta$ έχουν $OA = K\Gamma, OB = K\Delta$ και $AB = \Gamma\Delta$. Άρα (I.8) $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma K\Delta}$, οπότε και τα ελάσσονα τόξα $\widehat{AB}, \widehat{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα (πρόταση 26). Επομένως και τα μείζονα τόξα είναι ίσα.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Στην απόδειξη ο Ευκλείδης ακολουθώντας την πάγια τακτική του δεν εξετάζει μερικές περιπτώσεις, όπως π.χ. την περίπτωση που οι χορδές γίνονται διάμετροι.

Σε σχόλια του Βατικανού κώδικα υπάρχουν και ανισοτικές σχέσεις αντίστοιχες με την πρόταση 27.

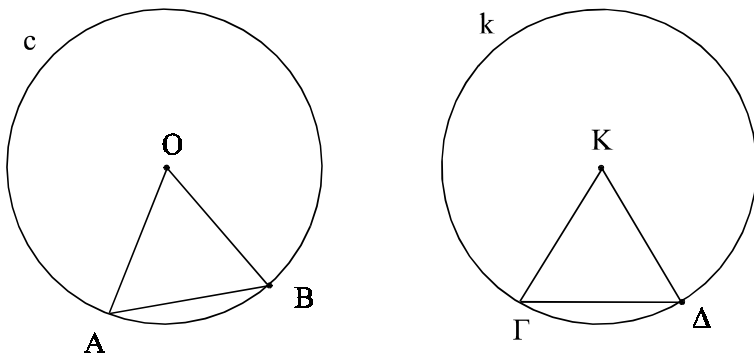
Τέλος, πολλοί από τους πρώτους εκδότες αναφέρουν την παρακάτω πρόταση ως συνέπεια των προτάσεων 26 και 27:

Στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους δυο τομείς είναι ίσοι, αν οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες.

Πρόταση 29 (III. 29)

Σε ίσους κύκλους ίσα τόξα ορίζουν ίσες χορδές.

Απόδειξη



Σχήμα 52

Έστω ίσοι κύκλοι c και k και έστω ίσα τόξα $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$. Φέρνουμε τις χορδές AB , $\Gamma\Delta$. Θα αποδείξουμε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

Έστω O , K τα κέντρα των κύκλων c , k και ας φέρουμε τις OA , OB , $K\Gamma$, $K\Delta$ (Σχ. 52).

Επειδή $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, τότε (πρόταση 27) θα είναι $\hat{AOB} = \hat{K\Gamma\Delta}$. Ακόμα $OA = K\Gamma$, $OB = K\Delta$, άρα (Π Γ Π) τα τρίγωνα είναι ίσα.

Επομένως $AB = \Gamma\Delta$.

ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

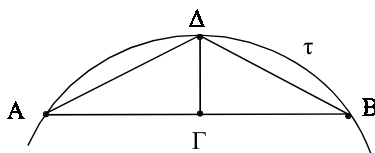
Η πρόταση 29 είναι αντίστροφη της πρότασης 28. Όπως και στην απόδειξη της πρότασης 28, δεν έχει ληφθεί υπόψη η περίπτωση κατά την οποία τα ίσα τόξα είναι ημικύκλια, αφού στην περίπτωση αυτή, εφόσον οι κύκλοι είναι ίσοι, οι χορδές είναι διάμετροι και ίσες μεταξύ τους.

Οι παραπάνω προτάσεις ισχύουν και όταν αντί για ίσους κύκλους, θεωρήσουμε τον ίδιο κύκλο.

Πρόταση 30 (III. 30)

Να διχοτομηθεί δοθέν τόξο.

Απόδειξη



Σχήμα 53

Έστω τ τόξο με χορδή AB και Γ το μέσο της (I. 10). Από το σημείο Γ φέρνουμε την $\Gamma\Delta \perp AB$ και συνδέουμε το Δ με τα A, B (Σχ. 53).

Επειδή $\Gamma A = \Gamma B$ και η $\Gamma\Delta$ κοινή, τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Gamma A, \Delta\Gamma B$ είναι ίσα (Π Γ Π), άρα και $\Delta A = \Delta B$ (I. 4) Οι ίσες χορδές $\Delta A, \Delta B$ ορίζουν ίσα τόξα (μείζονα και ελάσσονα), δηλαδή το Δ διχοτομεί το τόξο $\overset{\cap}{AB}$. ὅ.ἔ.π.

Σχόλια

Η λύση είναι ανεξάρτητη, αν το τόξο $\overset{\cap}{AB}$ είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο του ημικυκλίου.

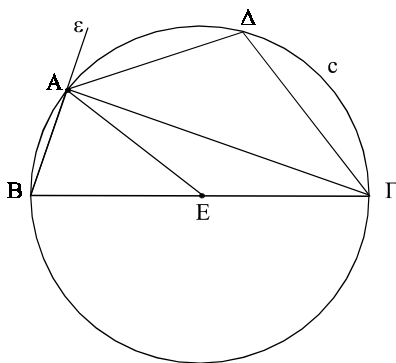
Σχετικές παρατηρήσεις με τις περιπτώσεις αυτές κάνει ο Ήρων, όπως αναφέρει στα σχόλιά του ο al-Nayrizi.

Η πρόταση 30 είναι εξαιρετικά χρήσιμη, γιατί μας δίνει μια γενική (και απλή) μέθοδο που μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε και να μελετούμε ένα κανονικό $2n$ -γωνο όταν γνωρίζουμε το κανονικό n -γωνο.

Στα βιβλία Στερεομετρίας η πρόταση 30 χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην IV.16.

Πρόταση 31 (III. 31)

Η γωνία που αντιστοιχεί¹ σε ημικύκλιο είναι ορθή, ενώ η γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο μεγαλύτερο ημικυκλίου είναι οξεία και η γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο μικρότερο ημικυκλίου είναι αμβλεία.

Απόδειξη

Σχήμα 54

Έστω κύκλος c κέντρου E και διάμετρος $BΓ$. Φέρνουμε τις AB , AE , AG και προεκτείνουμε την BA κατά την ημιευθεία Be (Σχ. 54).

Επειδή $EB = EA$ και $EA = EG$, θα είναι $\hat{ABE} = \hat{BAE}$ και

$$\hat{AGE} = \hat{EAG} \text{ αλλά και}$$

$$\varepsilon\hat{AG} = \hat{ABE} + \hat{EGA} \text{ ή}$$

$$\varepsilon\hat{AG} = \hat{BAG}.$$

Επομένως $\hat{BAG} = \hat{GA\varepsilon} = 1$ ορθή. Τότε όμως οι γωνίες $\hat{ABG}$, $\hat{AGB}$ οι οποίες αντιστοιχούν στα μεγαλύτερα του ημικυκλίου τόξα $\overset{\cap}{ABG}$ και $\overset{\cap}{AGB}$, είναι μικρότερες της ορθής. Θα αποδείξουμε ότι η γω-

¹ Όταν ο Ευκλείδης γράφει ότι η γωνία $\hat{AAG}$ αντιστοιχεί σε τόξο εννοεί το $\overset{\cap}{AAG}$, ενώ σήμερα λέμε ότι η γωνία $\hat{AAG}$ βαίνει στο τόξο $\overset{\cap}{ABG}$.

νία $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ που αντιστοιχεί στο μικρότερο ημικυκλίου τόξο $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, άρα (πρόταση 22) $\hat{\Delta} + \hat{B} = 2$ ορθές. Οπότε, αφού $\hat{B} < 1$ ορθή τότε $\hat{\Delta} > 1$ ορθής.
 ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Σύμφωνα με τον Εύδημο, το μέρος της πρότασης 31 που αναφέρεται στη γωνία που αντιστοιχεί σε ημικύκλιο ήταν γνωστή στον Θαλή, ο οποίος μάλιστα την είχε αποδείξει με κάποια άγνωστη σε μας διαδικασία. Το δεύτερο μέρος της πρότασης 31 χρησιμοποιείται και στο πόρισμα της IV. 5 χωρίς να αναφέρεται.

Αρκετοί ιστορικοί πιστεύουν ότι ο Θαλής χρησιμοποιούσε μια κινητική μέθοδο, που ελάχιστα απείχε από τις πρακτικές μεθόδους, ενώ άλλοι εκφράζουν έντονη αμφισβήτηση της θεωρίας αυτής.

Από εδάφια του Αριστοτέλη προκύπτει ότι η απόδειξη του πρώτου μέρους της πρότασης 31 ήταν γνωστή πριν από τον Ευκλείδη. Συγκεκριμένα στα *"Αναλυτικά Ύστερα"* (B94a 26–33) ο Αριστοτέλης ερωτά: *"διά τί ὀρθή ἢ ἐν ἡμικυκλίῳ; τίνας ὄντως ὀρθή"*; (Γιατί είναι ορθή η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο; Ποιου πράγματος είναι ορθή;) Και ο Αριστοτέλης συνεχίζει σκιαγραφώντας τη λύση που έδωσε εδώ ο Ευκλείδης. Ένα άλλο σχετικό εδάφιο του Αριστοτέλη προέρχεται από τα *"Μετά τα Φυσικά"* (1051).

Στα βιβλία της επίπεδης Γεωμετρίας η πρόταση 31 χρησιμοποιείται στις προτάσεις των διαφόρων θεωρημάτων με ελεύθερη απόδοση.

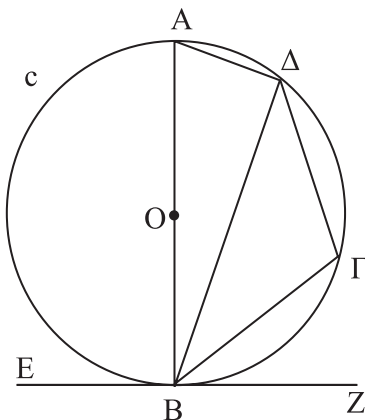
Της πρότασης 31 υπάρχει πόρισμα που περιέχεται σε διάφορες εκδόσεις των *Στοιχείων*. Το πόρισμα πρέπει να δημιουργήθηκε μετά το Θέωνα τον Αλεξανδρινό: [83]

Πόρισμα

Αν σε τρίγωνο μια γωνία του ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου, τότε η γωνία είναι ορθή.

Πρόταση 32 (III. 32)

Αν μία ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, και από το σημείο επαφής φέρουμε τέμνουσα του κύκλου, οι γωνίες που σχηματίζει η ευθεία με την εφαπτομένη θα είναι ίσες με τις γωνίες που είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο και βαίνουν στο τόξο της χορδής.

Απόδειξη

Σχήμα 55

Έστω EZ εφαπτομένη κύκλου c στο σημείο B και ευθεία BΔ τέμνουσα τον κύκλο (Σχ. 55). Θα αποδείξουμε ότι οι γωνίες $\hat{\Delta B E}$, $\hat{\Delta B Z}$ είναι ίσες με τις γωνίες που αντιστοιχούν στα τμήματα του κύκλου τα οποία βρίσκονται εναλλάξ της χορδής BΔ. (Με σύγχρονη ορολογία θα γράφαμε $\hat{\Delta B E} = \hat{\Delta \Gamma B}$, $\hat{\Delta B Z} = \hat{\Delta A B}$).

Φέρουμε $BA \perp EZ$ και από σημείο Γ του τόξου $\overset{\cap}{B\Delta}$ φέρουμε τις BΓ, ΓΔ και την ΔΑ. Επειδή η EZ εφάπτεται του κύκλου στο B, η κάθετος BA πάνω στην EZ θα διέρχεται από το κέντρο O και θα είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα $\hat{A\Delta B} = 1$ ορθή και $\hat{\Delta A B} + \hat{A B \Delta} = 1$ ορθή (I. 32).

Όμως και $\hat{A B Z} = 1$ ορθή, οπότε $\hat{A B Z} = \hat{A B \Delta} + \hat{\Delta A B}$ ή $\hat{\Delta A B} = \hat{\Delta B Z}$.

Και επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο, θα έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές (πρόταση 22), θα είναι επομένως

$$\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 2 \text{ ορθές} \quad \text{ή} \quad \hat{\Delta}\hat{B}\hat{Z} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 2 \text{ ορθές.}$$

$$\text{Αλλά } \hat{\Delta}\hat{B}\hat{Z} + \hat{E}\hat{B}\hat{\Delta} = 2 \text{ ορθές, άρα } \hat{E}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}.$$

ὁ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Με σύγχρονη απόδοση η πρόταση 32 γίνεται:

Σε κάθε κύκλο η γωνία που σχηματίζει μια χορδή με την εφαιπτομένη στο άκρο της χορδής είναι ίση με την εγγεγραμμένη στο τόξο της χορδής.

Σχόλια

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι και η αντίστροφη της πρότασης 32 προφανώς ισχύει. Δηλαδή να αποδείξουμε την πρόταση:

Αν μια ευθεία που άγεται από το άκρο μιας χορδής ενός κύκλου σχηματίζει γωνίες ίσες με τις εγγεγραμμένες στα τόξα της χορδής, τότε η ευθεία εφάπτεται του κύκλου.

Αν και η πρόταση 32 ελάχιστα σχολιάστηκε από τους αρχαίους σχολιαστές (ο al-Nayrizi αναφέρει ότι ο Ήρων γράφει πως η πρόταση δεν παρουσιάζει αδυναμίες), σήμερα θα μπορούσαμε δικαιολογημένα να πούμε ότι είναι μια πολύ σημαντική πρόταση, ειδικά για τη "Γεωμετρία του κύκλου", που τόσο πολύ αναπτύχθηκε τον 18^ο και 19^ο αιώνα.

Με τη βοήθεια της πρότασης 32 μπορούμε να αποδείξουμε μεγάλο αριθμό πολύ σημαντικών προτάσεων, όπως π.χ.

1. *Οι εφαπτόμενες που άγονται από σημείο εξωτερικό του κύκλου είναι ίσες.*
2. *(Πάππου) Αν δύο κύκλοι εφάπτονται (εσωτερικά ή εξωτερικά) και μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο επαφής τέμνει τους κύκλους, τα τμήματα που ορίζονται έχουν σταθερό λόγο.*

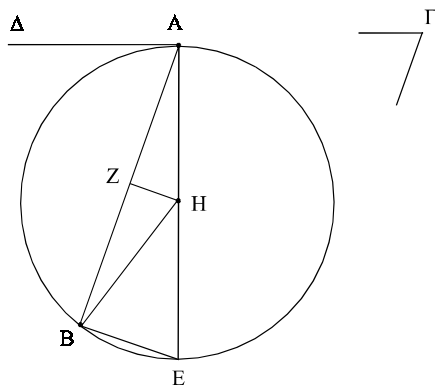
3. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται (εσωτερικά ή εξωτερικά) και από το σημείο επαφής A φέρουμε τέμνουσες $BA\Gamma$ και $ΔAE$, τότε $BA \parallel GE$.

Τέλος, η πρόταση 32 έχει εφαρμογές σε αρκετές προτάσεις των *Στοιχείων*, π.χ. στην πρόταση 33, καθώς και σε κατασκευές στο IV βιβλίο, όπως IV. 2, IV.11 κ.ά.

Πρόταση 33 (III. 33)

Επί δοθέντος τμήματος να γράψετε κυκλικό τμήμα, που να δέχεται γωνία ίση προς δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.

Απόδειξη



Σχήμα 56

Έστω τμήμα AB και δοθείσα γωνία $\hat{\Gamma}$, η οποία μπορεί να είναι αμβλεία, ορθή ή οξεία.

Έστω ότι η $\hat{\Gamma}$ είναι οξεία (Σχ. 56). Κατασκευάζουμε γωνία $\hat{BA\Delta}$ ίση με $\hat{\Gamma}$, με πλευρά AB και κορυφή A . (I.23). Ωστε $\hat{BA\Delta} = \hat{\Gamma} < 1$ ορθής.

Φέρουμε την $AE \perp AD$ και τη μεσοκάθετο HZ του AB , που τέμνει την AE στο H . Φέρουμε την HB και παρατηρούμε ότι $HB = HA$, αφού ZH μεσοκάθετος της AB (I.4).

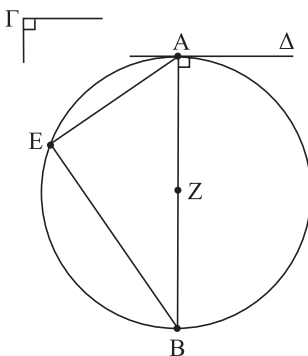
Άρα ο κύκλος με κέντρο H και ακτίνα HA θα περάσει από το B . Γράφουμε τον κύκλο και φέρνουμε την BE . Επειδή $\Delta A \perp AE$, η AD ε-

φάπτεται του κύκλου (πρόταση 16) και τότε $\hat{B\hat{A}\Delta} = \hat{\Gamma} = \hat{B\hat{E}A}$ (πρόταση 32).

Επομένως το τμήμα BEA του κύκλου είναι το ζητούμενο.

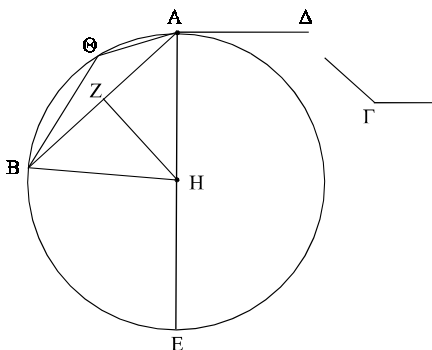
Αν $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, τότε κατασκευάζουμε γωνία $\hat{B\hat{A}\Delta} = \hat{\Gamma} = 1$ ορθή και γράφουμε κύκλο με κέντρο το μέσο Z του AB και ακτίνα ZA (Σχ. 57).

Αν E σημείο του τόξου AEB, τότε $\hat{A\hat{E}B} = 1$ ορθή. Άρα το τόξο $\overset{\cap}{A\hat{E}B}$ δέχεται γωνία ίση με $\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 57

Τέλος, αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία κατασκευάζουμε με πλευρά την AB και κορυφή το A γωνία $\hat{B\hat{A}\Delta}$ ίση με $\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $AE \perp AD$ και τη μεσοκάθετο ZH του AB που τέμνει την AE στο H (Σχ. 58).



Σχήμα 58

Επειδή $HA = HB$, ο κύκλος με κέντρο H και ακτίνα HA θα περνά από το B και θα τέμνει την AH στο E , ενώ η $A\Delta$ θα εφάπτεται του κύκλου. Αν Θ σημείο του τμήματος που βρίσκεται εκτός της γωνίας $\hat{\Delta AB}$, τότε $\hat{A\Theta B} = \hat{\Delta AB}$. Δηλαδή το τμήμα $A\Theta B$ είναι το ζητούμενο.
 ὁ.ξ.π.

Σχόλια

Κατά τη γνώμη μας η κατασκευή της β' περίπτωσης για την ορθή γωνία δεν πρέπει να ανήκει στον Ευκλείδη, που ήταν τόσο λιτός στις αποδείξεις και τις κατασκευές.

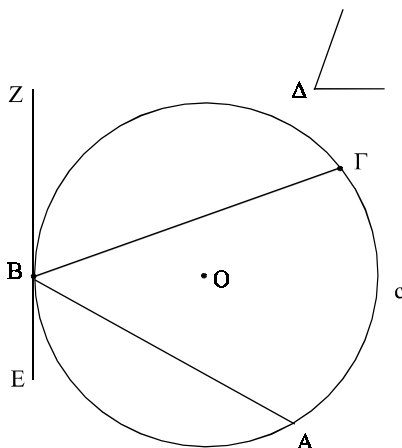
Πράγματι, για οποιοδήποτε σημείο E του τόξου $\hat{AB}$ (Σχ. 57) ισχύει (πρόταση 31) $\hat{AEB} = 1$ ορθή και δεν απαιτείται η κατασκευή της εφαπτόμενης $A\Delta$ κλπ.

Ο Simson επισημαίνει ότι μόνο οι κατασκευές της α' και γ' περίπτωσης μπορεί να είναι ευκλείδειες.

Πρόταση 34 (III. 34)

Από δοθέντα κύκλο να αφαιρεθεί τμήμα το οποίο να δέχεται γωνία ίση με δοθείσα γωνία.

Απόδειξη



Σχήμα 59

Έστω κύκλος c και γωνία $\hat{\Delta}$. Ζητάμε να αφαιρέσουμε από τον κύκλο τμήμα που να δέχεται γωνία $\hat{\Delta}$ (Σχ. 59). Φέρνουμε εφαπτομένη ΕΖ του κύκλου στο σημείο του Β και κατασκευάζουμε με πλευρά τη ΒΖ και κορυφή το Β γωνία ίση με τη $\hat{\Delta}$, τη γωνία $\hat{ZBG}$ (I. 23). Επειδή η ΒΖ εφάπτεται του κύκλου, η γωνία $\hat{ZBG}$ θα είναι ίση προς τη γωνία που δέχεται το εναλλάξ τμήμα ΒΑΓ (πρόταση 32).

Άρα από τον κύκλο θα πρέπει να αφαιρεθεί το τμήμα ΒΑΓ.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Η πρόταση 34 θα μπορούσε να αντιμετωπισθεί και με τον ακόλουθο τρόπο:

Συνδέουμε σημείο Β του κύκλου με το κέντρο Ο και κατασκευάζουμε επίκεντρη γωνία $\hat{BOG} = 2\hat{\Delta}$. Τότε το τμήμα ΒΑΓ είναι αυτό που πρέπει να αφαιρεθεί.

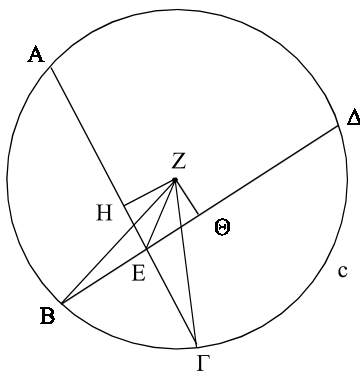
Η πρόταση 34 δεν έχει τη σπουδαιότητα της πρότασης 32 ή της πρότασης 33. Θα μπορούσε μάλιστα να θεωρηθεί πόρισμα της πρότασης 33 και για τον λόγο αυτό δεν αναφέρεται στα παλαιότερα και τα σημερινά εγχειρίδια της ευκλείδειας Γεωμετρίας.

6. Μετρικές σχέσεις στον κύκλο

Οι προτάσεις 35, 36, 37 αναφέρονται σε μετρικές σχέσεις στον κύκλο και ισχύουν και στο ευκλείδειο επίπεδο. Είναι από τις περισσότερες χρήσιμες προτάσεις στη σύγχρονη "Γεωμετρία του κύκλου", αφού με τη βοήθειά τους ορίζονται βασικές έννοιες, όπως *δύναμη σημείου* κλπ., που αναπτύχθηκαν τον 18^ο και 19^ο αιώνα.

Πρόταση 35 (III. 35)

Αν σε κύκλο δύο χορδές τέμνονται, τότε το ορθογώνιο το περιεχόμενο από τα τμήματα της μιας είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που περιέχεται στα τμήματα της άλλης.

Απόδειξη

Σχήμα 60

Έστω κύκλος c και δύο χορδές $ΑΓ$, $ΒΔ$ που τέμνονται στο E (Σχ. 60). Θα αποδείξουμε ότι τα ορθογώνια που ορίζουν τα τμήματα $ΕΑ$, $ΕΓ$ και $ΕΒ$, $ΕΔ$ είναι ισοδύναμα.

Αν το E είναι το κέντρο του κύκλου, η πρόταση είναι φανερή.

Αν το E δεν είναι το κέντρο του κύκλου, τότε συνδέουμε το κέντρο Z με τα σημεία B , E , $Γ$ και φέρνουμε τις κάθετες ZH , $ZΘ$ στις $ΑΓ$, $ΒΔ$ αντίστοιχα.

Τότε (πρόταση 3) $AH = HΓ$, $BΘ = ΘΔ$ και επειδή η $ΑΓ$ έχει τμηθεί σε ίσα και άνισα μέρη, τότε (Π. 5) το ορθογώνιο που περιέχουν τα $ΑΕ$, $ΕΓ$ μαζί με το τετράγωνο πλευράς $ΗΕ$ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο της $ΗΓ$, δηλαδή

$$ΑΕ \cdot ΕΓ + ΗΕ^2 = ΗΓ^2 \quad \text{ή}$$

$$ΑΕ \cdot ΕΓ + ΗΕ^2 + ΗΖ^2 = ΗΓ^2 + ΗΖ^2 = ΖΓ^2 \quad \text{ή}$$

$$ΑΕ \cdot ΕΓ + ΕΖ^2 = ΖΓ^2 \quad (1)$$

και ομοίως

$$ΒΕ \cdot ΕΔ + ΕΖ^2 = ΖΒ^2 \quad (2).$$

Από τις (1), (2) προκύπτει $ΑΕ \cdot ΕΓ = ΒΕ \cdot ΕΔ$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Το σταθερό γινόμενο $AE \cdot EG$ ονομάζεται *δύναμις* του σημείου E ως προς τον κύκλο και έχει πολλές και σημαντικές εφαρμογές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση:

Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα AG, BA τέμνονται σε σημείο E και ισχύει $AE \cdot EG = BE \cdot EA$, τότε τα σημεία A, B, G, A είναι ομοκυκλικά.

Και η πρόταση αυτή έχει πολλές εφαρμογές, κυρίως στην Γεωμετρία του κύκλου.

Στην απόδειξη που αναφέραμε, ο Ευκλείδης διακρίνει δύο περιπτώσεις, ενώ σε διάφορες εκδόσεις διακρίνονται τέσσερις. Υπάρχουν αμφιβολίες αν και οι δύο επιπλέον περιπτώσεις ανήκουν στον Ευκλείδη ή σε κάποιους σχολιαστές, ή στο Θέωνα.

Πρόταση 36 (III. 36)

Αν από σημείο εκτός κύκλου φέρουμε μια τέμνουσα και μια εφαπτομένη του κύκλου, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται από την τέμνουσα και το μέρος της τέμνουσας που βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου είναι ισοδύναμο του τετραγώνου με πλευρά την εφαπτομένη.

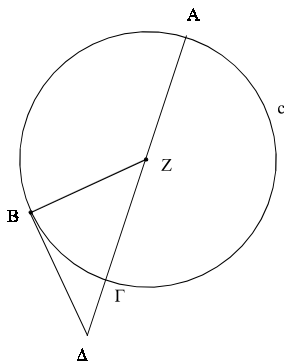
Απόδειξη

Έστω σημείο Δ εκτός του κύκλου c , τέμνουσα $\Delta\Gamma A$ και εφαπτομένη ΔB του κύκλου. Θα αποδείξουμε ότι $\Delta\Gamma \cdot \Delta A = \Delta B^2$.

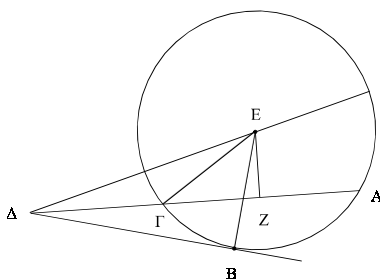
Έστω ότι η τέμνουσα διέρχεται από το κέντρο Z του κύκλου (Σχ.

61). Τότε $\hat{ZB\Delta} = 1$ ορθή και

$$\begin{aligned}\Delta B^2 &= \Delta Z^2 - ZB^2 = \Delta Z^2 - Z\Gamma^2 = \\ &= (\Delta Z + Z\Gamma)(\Delta Z - Z\Gamma) = \\ &= (\Delta Z + ZA)(\Delta Z - Z\Gamma) = \\ &= \Delta A \cdot \Delta\Gamma.\end{aligned}$$



Σχήμα 61



Σχήμα 62

Έστω ότι η τέμνουσα δε διέρχεται από το κέντρο E του κύκλου (Σχ. 62).

Τότε, αν $EZ \perp \Gamma A$, το Z είναι μέσο της ΓA , οπότε:

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma \cdot \Delta A &= (\Delta Z - \Gamma Z) \cdot (\Delta Z + ZA) = \\ &= \Delta Z^2 - \Gamma Z^2 = \Delta Z^2 - (\Gamma E^2 - ZE)^2 = \\ &= \Delta Z^2 + ZE^2 - \Gamma E^2 = \Delta E^2 - EB^2 = \Delta B^2. \end{aligned}$$

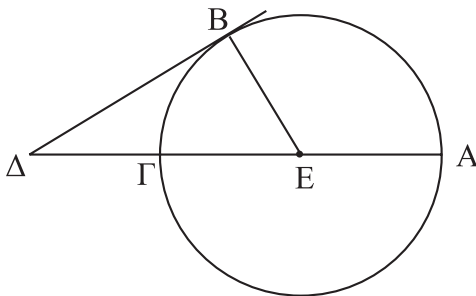
ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί δύο περιπτώσεις που τις αποδεικνύει ανεξάρτητα την μια από την άλλη:

α) Όταν η τέμνουσα διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

β) Όταν η τέμνουσα δε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

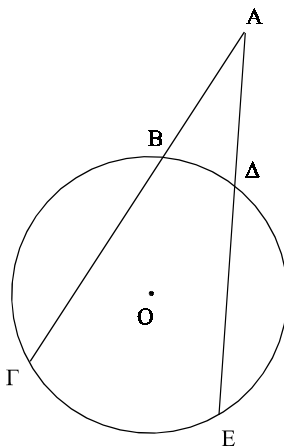


Σχήμα 63

Το γινόμενο $\Delta\Gamma \cdot \Delta A = \Delta B^2 = \Delta E^2 - R^2$, όπου R η ακτίνα του κύκλου (Σχ. 63), ονομάζεται επίσης *δύναμις* του σημείου Δ ως προς τον κύκλο.

Προφανώς, ισχύει και η εξής πρόταση:

Αν από σημείο A εκτός κύκλου c φέρουμε τέμνουσες $AB\Gamma$, $A\Delta E$, τότε $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$ (Σχ. 64).



Σχήμα 64

Ισχύει όμως και η αντίστροφη πρόταση:

Αν από σημείο A φέρουμε δύο ημιευθείες και πάνω σ' αυτές πάρουμε σημεία B, Γ και Δ, E ώστε $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$, τότε τα σημεία B, Γ, Δ, E είναι ομοκυκλικά.

Η πρόταση 36 από την αρχαιότητα ακόμα εθεωρείτο πολύ σημαντική, αφού χρησίμευε στην απόδειξη μιας σειράς προβλημάτων, όπως π.χ. στο πρόβλημα των επαφών του Απολλωνίου.

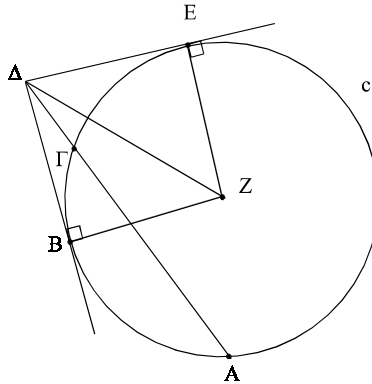
Στα Στοιχεία όμως χρησιμοποιείται μόνο στην πρόταση 37. Στη σύγχρονη στοιχειώδη Γεωμετρία η πρόταση 36 έχει περίοπτη θέση.

Πρόταση 37 (III. 37)

Αν από σημείο εκτός κύκλου φέρουμε μια τέμνουσα και μια προσπίπτουσα και το ορθογώνιο των δύο τμημάτων της τέμνουσας

είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο της προσπίπτουσας, τότε η προσπίπτουσα εφάπτεται του κύκλου.

Απόδειξη



Σχήμα 65

Έστω σημείο Δ εκτός κύκλου c , τέμνουσα $\Delta\Gamma\Lambda$ και προσπίπτουσα ΔB τέτοια ώστε $\Delta\Gamma \cdot \Delta\Lambda = \Delta B^2$. (Σχ. 65). Θα αποδείξουμε ότι η ΔB εφάπτεται του κύκλου.

Φέρουμε την εφαπτομένη ΔE του κύκλου (πρόταση 27) και τα τμήματα $ZE, ZB, Z\Delta$, όπου Z το κέντρο του κύκλου c .

Τότε $\angle ZE\Delta = 1$ ορθή (πρόταση 28) και $\Delta\Gamma \cdot \Delta\Lambda = \Delta E^2$ (πρόταση 36).

Άρα $\Delta E = \Delta B$ και τα τρίγωνα $\Delta EZ, \Delta BZ$ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε και $\angle \Delta BZ = 1$ ορθή.

Επομένως, η προσπίπτουσα ΔB εφάπτεται του κύκλου, γιατί είναι κάθετη στο άκρο της ακτίνας BZ .

ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Όπως έχουν παρατηρήσει πολλοί σχολιαστές, η προηγούμενη απόδειξη έχει το μειονέκτημα να μην κάνει γνωστό αν οι $\Delta E, \Delta B$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΔZ . Θα μπορούσαμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι θα πρέπει τα B, E να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ΔZ .

Ο Campanus [83] δίνει μιαν άλλη απόδειξη αποδεικνύοντας ότι

$$\Delta B^2 = \Delta Z^2 - BZ^2, \text{ οπότε (I. 48) } \Delta B \perp BZ.$$

Επίσης, είναι προφανής μια απόδειξη με την απαγωγή σε άτοπο.

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι προτάσεις 36 και 37 είναι αντίστροφες. Η πρόταση 37 χρησιμοποιείται μόνο στην IV.10

Πολλοί σύγχρονοι ερευνητές (π.χ. R. Herz - Fischler) πιστεύουν ότι οι προτάσεις 36 και 37 έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον κυρίως λόγω της χρησιμοποίησης στην απόδειξη της πρότασης IV. 10, που έχει κομβικό ρόλο στην κατασκευή του κανονικού 5-γώνου και στη γενικότερη θεωρία της διαίρεσης τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο.

Κεφάλαιο 4

BIBΛΙΟ IV

Εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα

1. Εισαγωγή

Το βιβλίο IV των *Στοιχείων* είναι πολύ σημαντικό, αφού περιλαμβάνει κάποια θέματα που ακόμα και σήμερα προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθηματικών.

Το βιβλίο περιλαμβάνει 7 ορισμούς και 16 προτάσεις (προβλήματα) γεωμετρικών κατασκευών. Αυτό είναι το κύριο χαρακτηριστικό του. Όπως αναφέρουν και τα σχόλια του κώδικα της Βενετίας, "...*ιστέον, ότι τό τέταρτον βιβλίον όλον προβληματικόν ἐστίν*".

Όπως παρατηρούν πολλοί ιστορικοί, π.χ. οι Michel [111], von Fritz [158], Neuenschwander [116], Artmann [6], το βιβλίο IV έχει μια αυστηρή και συμπαγή δομή, πράγμα που δείχνει ότι είναι έργο ενός μόνο ατόμου, μάλλον του Ευκλείδη.

Στο βιβλίο αυτό γίνεται εκτενής χρήση του 5^{ου} αιτήματος των παραλλήλων, της πρότασης I.1 και της ευκλείδειας θεωρίας των εμβαδών, π.χ. στις προτάσεις 10 και 11. Η σπουδαιότερη πρόταση του βιβλίου IV, (που είναι η πρόταση 11 και όχι η τελευταία πρόταση 16), απαιτεί ουσιαστικά όλες τις βασικές θεωρίες των βιβλίων I - IV για την κατασκευή κανονικού 5-γώνου.

Το περιεχόμενο του βιβλίου IV θεματολογικά θα μπορούσε να διαιρεθεί στις παρακάτω κατηγορίες:

- (α) Στις προτάσεις που αφορούν εγγεγραμμένα σχήματα σε κύκλο.
- (β) Στις προτάσεις που αφορούν περιγεγραμμένα σχήματα σε κύκλο.

Το βιβλίο IV θα μπορούσε επίσης να διαιρεθεί σε δύο άλλες κατηγορίες, ανάλογα με το αν τα σχήματα είναι κανονικά ή όχι:

- (α) Εγγραφή και περιγραφή σε κύκλο ευθύγραμμων σχημάτων (προτάσεις 1 μέχρι 5).
- (β) Εγγραφή και περιγραφή σε κύκλο κανονικών πολυγώνων (προτάσεις 6 έως 16).

Από τα περιεχόμενα του βιβλίου IV συμπεραίνουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί σχετικά με τις κατασκευές κανονικών πολυγώνων:

- (i) Γνώριζαν την κατασκευή κανονικού 2^v - γώνου, όπου $v \geq 2$.
- (ii) Γνώριζαν ότι, αν το κανονικό v -γωνο ($v \geq 3$) είναι κατασκευάσιμο και k/v , όπου $k \in \mathbb{N}$, τότε και το κανονικό k -γωνο είναι κατασκευάσιμο.

Οι περιπτώσεις (i) και (ii) είναι προφανείς. Η τελευταία κατασκευή είναι μερική περίπτωση μιας γενικότερης πρότασης:

Αν $v, k \in \mathbb{N}$ και τα κανονικά v -γωνο και k -γωνο είναι κατασκευάσιμα τότε, αν $(v, k) = 1$, είναι κατασκευάσιμο και το κανονικό vk -γωνο.

Για $v = 3, k = 5$ κατασκευάζεται το κανονικό 15-γωνο.

Το γενικό πρόβλημα:

Να ευρεθούν οι τιμές του v , ώστε το κανονικό v -γωνο να είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη

δεν επιλύθηκε πλήρως από τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρους. Γνώριζε ο Ευκλείδης ότι το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί; Με βεβαιότητα μπορούμε να πούμε ότι γνώριζε. Πράγματι, όπως ήδη αναφέραμε στην εισαγωγή, ο Ευκλείδης δεν αναφέρει τίποτα για τα τρία μεγάλα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, ενώ δεν κάνει το ίδιο για το πρόβλημα κατασκευής v -γώνου.

Τέλος, αναφέρουμε ότι όλες οι προτάσεις IV. 1 – IV. 16 ισχύουν σε ένα ευκλείδειο επίπεδο.

2. Ορισμοί

- 1) *Λέμε ότι ένα ευθύγραμμο σχήμα είναι εγγεγραμμένο σε άλλο ευθύγραμμο σχήμα, όταν κάθε κορυφή του ανήκει σε μία πλευρά του άλλου σχήματος.*
- 2) *Λέμε ότι ένα ευθύγραμμο σχήμα είναι περιγεγραμμένο σε άλλο ευθύγραμμο σχήμα, αν κάθε πλευρά του περιέχει κορυφή του άλλου σχήματος.*
- 3) *Λέμε ότι ένα ευθύγραμμο σχήμα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, όταν κάθε κορυφή του είναι σημείο του κύκλου.*
- 4) *Λέμε ότι ένα ευθύγραμμο σχήμα είναι περιγεγραμμένο περί κύκλο, όταν κάθε πλευρά του εφάπτεται στον κύκλο.*
- 5) *Λέμε ότι ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε σχήμα, όταν εφάπτεται σε κάθε πλευρά του σχήματος.*
- 6) *Λέμε ότι ένας κύκλος είναι περιγεγραμμένος σε σχήμα, όταν διέρχεται από κάθε κορυφή του σχήματος.*
- 7) *Λέμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι χορδή του κύκλου, όταν τα άκρα του βρίσκονται πάνω στον κύκλο.*

Σχόλια

Οι όροι "εγγράφεται", "εγγραφόμενον σχήμα", "περιγράφεται", "περιγραφόμενον σχήμα" είναι παλαιότεροι του Ευκλείδη. Στο Σιμπλικίο συναντούμε αναφορά του Εύδημου για τον μείζονα κύκλο εγγραφομένου, όπως και για τα περιγραφόμενα σχήματα: "περιγράψας καί περί τήν βάσιν τμήμα κύκλου", "περιγραφέν ἴσου συμβαίνει τοῖς . . ."

Οι ίδιοι όροι χρησιμοποιούνται και για τα στερεά. Π.χ. στον Αρχιμήδη διαβάζουμε: "Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τήν σφαῖραν ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, . . ." και "δυνατόν ἐστὶ στερεόν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο δυνατόν ἐστι περιγράψαι".

Οι όροι αυτοί αναφέρονται επίσης και από τους Αυτόλυκο, Ἡρώνα, Πάππο κ.ά. Ἐφθασαν μάλιστα ως τις μέρες μας. Στον Ευτόκιο διαβάζουμε: “οὕτως ἡ πλευρά τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου”.

Στους ορισμούς 1 και 2 ο Ευκλείδης προφανώς αναφέρεται σε ευθύγραμμα σχήματα με τον ίδιο αριθμό πλευρών. Σήμερα δύο τέτοια σχήματα μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουν και διαφορετικό αριθμό πλευρών.

Οι ορισμοί 1-7 με ελάχιστες διαφορές χρησιμοποιούνται και σήμερα.

Η μελέτη των μετρικών ιδιοτήτων των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σχημάτων άρχισε από τον Αρχιμήδη και συνεχίζει μέχρι και τις μέρες μας.

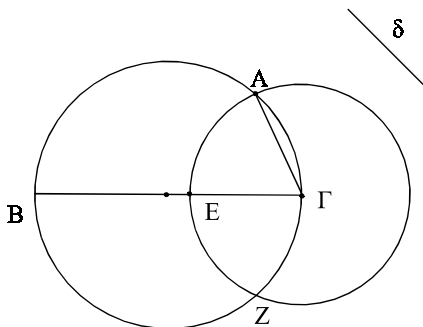
3. Εγγραφή και περιγραφή σε κύκλο ευθύγραμμων σχημάτων.

Πρόταση 1 (IV. 1)

Αν δοθούν κύκλος και ευθύγραμμο τμήμα μικρότερο ή ίσο από τη διάμετρο του κύκλου, να κατασκευαστεί χορδή του κύκλου ίση προς το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.

Απόδειξη

Ἐστω κύκλος (Ο, ρ) και το ευθύγραμμο τμήμα δ μικρότερο ή ίσο από τη διάμετρο του κύκλου (Σχ. 1).



Σχήμα 1

Φέρνουμε μία διάμετρο ΒΓ του κύκλου. Τότε:

- Αν $BΓ = \delta$, τότε η ΒΓ είναι η ζητούμενη χορδή.

• Αν $B\Gamma > \delta$, τότε παίρνουμε σημείο E του $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $GE = \delta$ και στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο (Γ, GE) , που τέμνει τον δοθέντα στα σημεία A και Z . Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα GA . Επειδή το Γ είναι κέντρο του κύκλου (Γ, GE) και τα E και A σημεία του κύκλου, θα είναι $GE = GA = \delta$.

Επομένως, κατασκευάσαμε χορδή του δοθέντος κύκλου, τη GA , ίση με το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα δ .

Ὡς.π.

Σχόλια

Αν το άκρο της χορδής δεν είναι καθορισμένο, τότε προφανώς έχουμε άπειρες λύσεις της πρότασης 1, ενώ αν το άκρο της είναι καθορισμένο ως άκρο της διαμέτρου, θα έχουμε το πολύ δύο λύσεις.

Το ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι μικρότερο ή ίσο της διαμέτρου προκύπτει από την πρόταση III. 15 των *Στοιχείων*.

Η κατασκευή 1 δεν "ταιριάζει" με τις άλλες κατασκευές του βιβλίου και μάλλον θα πρέπει να είναι του ίδιου του Ευκλείδη, ο οποίος τη χρησιμοποίησε σαν λήμμα σε μια σειρά προτάσεων, όπως τις IV.16, XII.16 και αλλού.

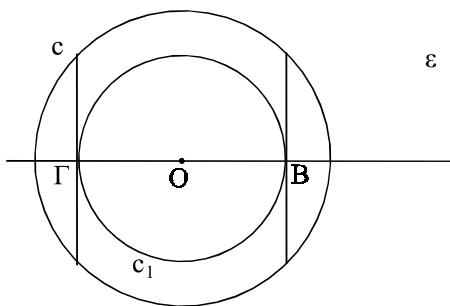
Μετά τον Ευκλείδη ο Πάππος κατασκεύασε δυσκολότερες κατασκευές, όπως:

(α) Να εγγραφεί σε κύκλο χορδή σταθερού μήκους, παράλληλη προς δοσμένη ευθεία ε.

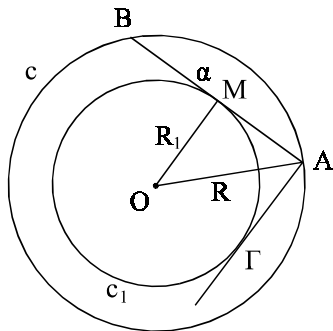
(β) Να εγγραφεί σε κύκλο χορδή σταθερού μήκους, η οποία, αν προεκταθεί, διέρχεται από δοθέν σημείο Α, το οποίο βρίσκεται εκτός του κύκλου.

Και τα δύο προβλήματα αντιμετωπίζονται αν παρατηρήσουμε ότι τα μέσα των χορδών σταθερού μήκους α κύκλου c με ακτίνα R βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο c_1 με κέντρο το O και ακτίνα $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \alpha^2}$ (Σχ. 3).

Έτσι, για το (α) αρκεί από το κέντρο O να φέρουμε κάθετη στην ε ,



Σχήμα 2



Σχήμα 3

που τέμνει τον c_1 στα B, Γ και από τα B, Γ να φέρουμε τις εφαπτόμενες του c_1 (Σχ. 2).

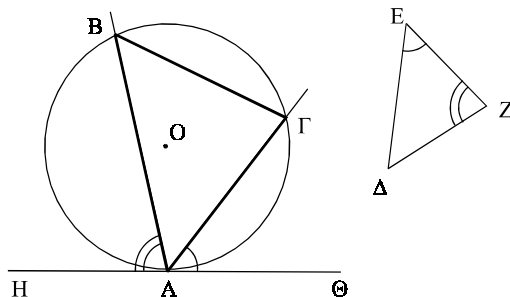
Για το (β) αρκεί από το σημείο A να φέρουμε εφαπτόμενες στον c_1 (Σχ. 3).

Σε σχόλια του Βατικανού κώδικα, ο υπομνηματιστής προσπαθεί να δικαιολογήσει τη δυνατότητα της κατασκευής 1 γράφοντας: "Ἐπί παντός σχήματος ἀπλουστέρα ἐστὶ γραμμὴ διὰ τό ἐξ αὐτῆς ἢ αὐτῶν πᾶν εἶναι σχῆμα".

Πρόταση 2 (IV. 2)

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο ΔEZ .

Απόδειξη



Σχήμα 4

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και τρίγωνο ΔEZ (Σχ. 4). Θέλουμε να εγγράψουμε στον κύκλο, τρίγωνο $AB\Gamma$ ισογώνιο με το ΔEZ .

Σε σημείο A του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη $H\Theta$ και με κορυφή A και πλευρές $A\Theta$ και AH κατασκευάζουμε γωνίες $\hat{\Theta}A\Gamma$ και $\hat{H}AB$ με $\hat{\Theta}A\Gamma = \hat{\Delta}EZ$ και $\hat{H}AB = \hat{\Delta}ZE$ (B και Γ σημεία του κύκλου).

Φέρουμε το $B\Gamma$.

Επειδή η $A\Theta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και η $A\Gamma$ είναι χορδή με άκρο το σημείο επαφής A , έχουμε ότι $\hat{\Theta}A\Gamma = \hat{A}B\Gamma$.

Αλλά $\hat{\Theta}A\Gamma = \hat{\Delta}EZ$, άρα $\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}EZ$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}\Gamma B = \hat{\Delta}ZE$.

Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν δύο γωνίες ίσες ($\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}EZ$ και $\hat{B}\Gamma A = \hat{E}Z\Delta$), τότε και οι τρίτες γωνίες τους $\hat{B}A\Gamma$ και $\hat{E}\Delta Z$ είναι ίσες.

Άρα στον δοθέντα κύκλο (O, ρ) εγγράφουμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισογώνιο με το δοθέν τρίγωνο ΔEZ .

Ὡ.ἔ.π.

Σχόλια

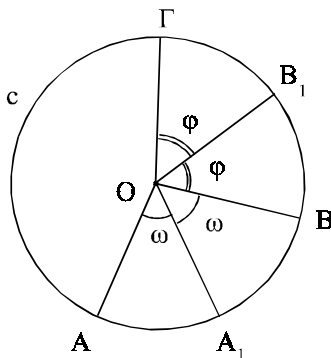
Ὅπως και στην πρόταση 1, αν το σημείο A είναι ορισμένο, τότε υπάρχει μια μόνο λύση, αν όχι υπάρχουν άπειρες, στις οποίες όμως όλα τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

Πράγματι, αν R είναι η ακτίνα του κύκλου c , τότε οι πλευρές των τριγώνων είναι $\alpha = 2R \eta\mu A$, $\beta = 2R \eta\mu B$, $\gamma = 2R \eta\mu \Gamma$.

Εκτός από την απόδειξη του Ευκλείδη που δώσαμε εδώ, μια άλλη απόδειξη θα μπορούσε να δοθεί με τη βοήθεια της πρότασης III. 34.

Τέλος, ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης της κατασκευής είναι να διαιρέσουμε τον κύκλο c σε τρία τόξα $\overset{\cap}{AB}$, $\overset{\cap}{B\Gamma}$, $\overset{\cap}{\Gamma A}$ ώστε:

$$\overset{\cap}{A\hat{O}B} = 2\hat{A}, \overset{\cap}{B\hat{O}\Gamma} = 2\hat{B}, \overset{\cap}{A\hat{O}\Gamma} = 2\hat{C} \quad (\text{Σχ. 5})$$



Σχήμα 5

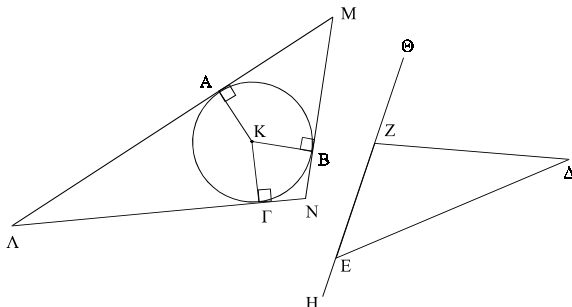
Ο γνωστός Άγγλος μαθηματικός και μεταφραστής των *Στοιχείων* Α. De Morgan [42], αφού παρατήρησε ότι στην περίπτωση που το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο, τα τόξα στα οποία τα σημεία Α, Β, Γ διαιρούν το κύκλο c σε τρία μέρη είναι ίσα, συμπεραίνει ότι το πρόβλημα της εγγραφής κανονικού n -γώνου σε κύκλο c ουσιαστικά είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα διαίρεσης του c σε n ίσα τόξα.

Η πρόταση αυτή χρησιμεύει και στην κατασκευή κανονικού 5-γώνου (πρόταση 11), όπου αρκεί να εγγράψουμε σε δοσμένο κύκλο ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες 36° , 72° , 72° .

Πρόταση 3 (IV. 3)

Σε δοθέντα κύκλο να περιγραφεί τρίγωνο ισογώνιο προς δοθέν τρίγωνο ΔΕΖ.

Απόδειξη



Σχήμα 6

Έστω ο κύκλος (K, ρ) και το τρίγωνο ΔEZ (Σχ. 6). Θέλουμε να περιγράψουμε περί τον κύκλο τρίγωνο ΛMN ισογώνιο με το ΔEZ .

Προεκτείνουμε την πλευρά EZ , κατά τις ημιευθείες EH και $Z\Theta$.

Με κορυφή το κέντρο K και ακτίνα KB (όπου B σημείο του κύκλου (K, ρ)) κατασκευάζουμε γωνίες $\hat{BKA}$ και $\hat{BKG}$ έτσι ώστε $\hat{BKA} = \hat{\Delta EH}$ και $\hat{BKG} = \hat{\Delta Z\Theta}$ (A, B, Γ σημεία του κύκλου).

Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A, B, Γ , που τέμνονται στα Λ, M, N . Τότε, $KA \perp MA$, $KB \perp MN$ και $K\Gamma \perp \Lambda N$, αφού τα τμήματα $KA, KB, K\Gamma$ είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Στο τετράπλευρο $AMBK$ έχουμε ότι $\hat{KAM} + \hat{KBM} = 2$ ορθές, επομένως θα είναι και $\hat{AKB} + \hat{AMB} = 2$ ορθές.

Επίσης, $\hat{\Delta EH} + \hat{\Delta EZ} = 2$ ορθές και αφού $\hat{AKB} = \hat{\Delta EH}$, θα είναι $\hat{AMB} = \hat{\Delta EZ}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\hat{BNG} = \hat{\Delta ZE}$.

Αρα, αφού τα τρίγωνα ΔZE και ΛMN έχουν δύο γωνίες τους ίσες, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους, $\hat{MAN}$ και $\hat{E\Lambda Z}$ ίσες.

Επομένως, περί δοθέντα κύκλο περιγράψαμε τρίγωνο ισογώνιο προς δοθέν τρίγωνο.

Ὁ.Ἑ.π.

Σχόλιο

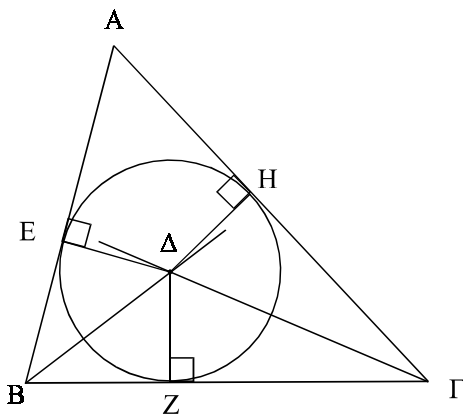
Ὅπως παρατηρεί ο Πρόκλος, η ισότητα $\hat{MAN} = \hat{E\Lambda Z}$ μπορεί να γενηκευθεί και για κυρτά n -γωνα, αφού αν το πλήθος των πλευρών κυρτού πολυγώνου είναι n , τότε το άθροισμα των γωνιών του είναι $2(n-2)$ ορθές.

Πρόταση 4 (IV. 4)

Σε δοθέν τρίγωνο $AB\Gamma$ να εγγραφεί κύκλος.

Απόδειξη

Δίνεται τρίγωνο και θέλουμε να εγγράψουμε κύκλο στο τρίγωνο αυτό.



Σχήμα 7

Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}B\Gamma$ και $\hat{B}\Gamma\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, που τέμνονται στο Δ και στη συνέχεια φέρουμε τα τμήματα ΔE , ΔZ και ΔH με $\Delta E \perp AB$, $\Delta Z \perp B\Gamma$ και $\Delta H \perp A\Gamma$ (Σχ. 7).

Τα τρίγωνα $E\Delta B$ και $Z\Delta B$ είναι ίσα, αφού: $\hat{B}\hat{E}\Delta = \hat{B}\hat{Z}\Delta = 1$ ορθή, $\hat{E}\hat{B}\Delta = \hat{Z}\hat{B}\Delta$ και $B\Delta$ κοινή πλευρά, άρα θα έχουν και $\Delta E = \Delta Z$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\Delta H = \Delta Z$.

Άρα $\Delta Z = \Delta E = \Delta H = \rho$.

Επομένως ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το Δ και ακτίνα ρ διέρχεται από τα σημεία E , Z , H και αφού $\Delta E \perp AB$, $\Delta Z \perp B\Gamma$ και $\Delta H \perp A\Gamma$, ο κύκλος (Δ, ρ) εφάπτεται στις ευθείες AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ στα σημεία τους E , Z , H αντίστοιχα. Διότι, εάν ο κύκλος έτεμνε τις ευθείες, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία τομής θα βρισκόταν εντός του κύκλου (III. 2), που είναι άτοπο, γιατί η κάθετη στο άκρο της ακτίνας του κύκλου βρίσκεται εκτός του κύκλου (III. 16).

Άρα ο κύκλος (Δ, ρ) δεν τέμνει τις ευθείες AB , $B\Gamma$, ΓA , επομένως θα εφάπτεται σ' αυτές και θα είναι ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο $AB\Gamma$ κύκλος.

Επομένως στο δοθέν τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγράφουμε κύκλο.

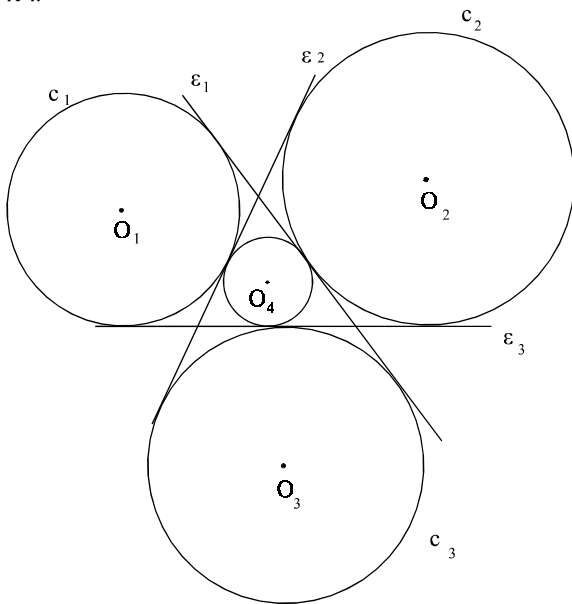
ὅ.ἔ.π.

Σχόλια

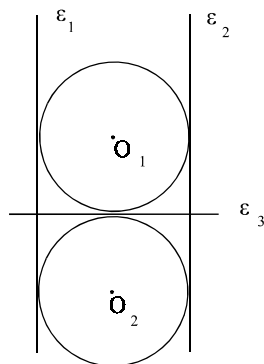
Στις προηγούμενες προτάσεις 2 και 3 δινόταν ο κύκλος, ενώ εδώ δίνεται το τρίγωνο και ζητείται να εγγραφεί ο κύκλος. Μια γενικότερη πρόταση είναι η εξής:

Δίνονται τρεις ευθείες που δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο και ζητείται να κατασκευασθεί κύκλος που να εφάπτεται σ' αυτές.

Η πρόταση αυτή έχει γενικά τέσσερις λύσεις. Η μία είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος, όπως αποδείχθηκε στην πρόταση 4. Οι άλλες τρεις λύσεις είναι οι παρεγγεγραμμένοι στο τρίγωνο κύκλοι, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.



Σχήμα 8



Σχήμα 9

Αν όμως δύο από τις ευθείες αυτές είναι παράλληλες, το πρόβλημα έχει μόνο δύο λύσεις (Σχ. 9).

Η απόδειξη της πρότασης 4 θα μπορούσε να διαιρεθεί σε δυο μέρη. Το πρώτο μέρος της απόδειξης τελειώνει όταν καθορίζεται το σημείο Δ, δηλαδή το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με την πάγια τακτική του, ο Ευκλείδης δεν υπεισέρχεται σε λεπτομέρειες που μπορούν εύκολα να αποδειχθούν. Έτσι π.χ. δεν αποδεικνύει γιατί οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ τέμνονται, αφού αυτό είναι σχεδόν προφανές, επειδή $\hat{\Delta B\Gamma} + \hat{\Delta \Gamma B} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2$ ορθές (I. 17 και 5° αίτημα).

Στο δεύτερο μέρος αποδεικνύει ότι ο κύκλος (Δ , ΔE) εφάπτεται στις πλευρές AB , AG , $B\Gamma$.

Παρατηρούμε ακόμα ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί στην απόδειξη την απαγωγή σε άτοπο, προκειμένου να αποδείξει ότι ο κύκλος εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, αν και θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει άμεση απόδειξη, όπως κάνει άλλωστε με τις προτάσεις 8 και 13. Ωστε ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές στρατηγικές για παραπλήσια θέματα.

Η σημασία της πρότασης 4 είναι σημαντική για τη σύγχρονη γεωμετρία του τριγώνου. Αλλά και κατά την αρχαιότητα η πρόταση ήταν στενά συνδεδεμένη με κάποια σπουδαία θεωρήματα π.χ. τον τύπο του Αρχιμήδη (Ηρώνα) που μας εκφράζει το εμβαδόν του $AB\Gamma$ ως $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$. Φυσικά, για τον Ευκλείδη ένας τέτοιος τύπος δεν έχει έννοια, αφού δε χρησιμοποιεί εμβαδά.

Για τους 4 κύκλους (3 παρεγγεγραμμένους και έναν εγγεγραμμένο με ακτίνες έστω ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ρ) ισχύουν ακόμα οι σχέσεις

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}, \quad E = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3}, \quad 4R = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - \rho,$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου (πρόταση 5) στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Υπάρχει ακόμα ο τύπος: $E = \rho \cdot \tau = \left(\frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)$ για το εμβαδόν τριγώνου, όπου π η περίμετρος και δ η διάμετρος του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου. Τη σχέση αυτή χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης, που θεώρησε ότι το εμβαδόν ενός κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τριγώνου, το οποίο έχει πλευρά $\frac{\pi}{2}$ και ύψος τη διάμετρο δ .

Μια χρήσιμη πρόταση που οφείλεται στον Gergone αναφέρει ότι οι ευθείες AZ , BH , $ΓΕ$ συντρέχουν (Σχ. 7).

Τέλος, να αναφέρουμε ότι η πρόταση 4 ισχύει και για μη ευκλείδειες Γεωμετρίες, π.χ. τη Γεωμετρία της σφαίρας.

Πρόταση 5 (IV. 5)

Περί δοθέν τρίγωνο να περιγραφεί κύκλος.

Απόδειξη

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και θέλουμε να περιγράψουμε κύκλο περί το τρίγωνο αυτό, δηλαδή να κατασκευάσουμε κύκλο που να διέρχεται από τις κορυφές A , B , $Γ$ του τριγώνου.

Παίρνουμε τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $AΓ$ αντίστοιχα και φέρουμε κάθετες στις AB και $AΓ$ στα σημεία Δ και E .

Οι κάθετες αυτές τέμνονται ή εντός του τριγώνου $ABΓ$ ή σε σημείο $ο$ της $BΓ$ ή εκτός του τριγώνου $ABΓ$.

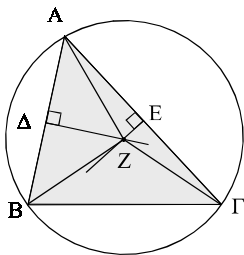
- Έστω ότι τέμνονται πρώτα σε σημείο Z εσωτερικό του τριγώνου (Σχ. 10). Φέρουμε τα τμήματα ZB , $ZΓ$ και ZA . Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAZ και ΔBZ έχουν $A\Delta = \Delta B$ και ΔZ κοινή πλευρά, άρα είναι ίσα, επομένως και $AZ = BZ$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και $\Gamma Z = AZ$. Άρα $ZA = ZB = Z\Gamma = \rho$. Επομένως ο κύκλος (Z, ρ) διέρχεται από τα σημεία A , B , $Γ$ και είναι ο περιγεγραμμένος περί το τρίγωνο $ABΓ$ κύκλος.

- Έστω ότι οι κάθετες αυτές τέμνονται σε σημείο Z της $BΓ$ (Σχ. 11). Φέρουμε το AZ . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το σημείο Z είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου περί το τρίγωνο κύκλου.

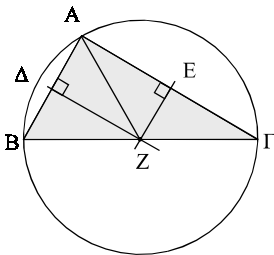
- Τέλος, έστω ότι οι ΔZ και EZ τέμνονται εκτός του τριγώνου $ABΓ$ (Σχ. 12). Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AZ , BZ και ΓZ και επειδή πάλι τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAZ και ΔBZ είναι ίσα (αφού $A\Delta = \Delta B$ και η κάθετη πλευρά ΔZ είναι κοινή), θα είναι και $AZ = BZ$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $AZ = \Gamma Z$. Άρα $AZ = BZ = \Gamma Z = \rho$. Επομένως ο κύκλος (Z, ρ) διέρχεται από τα σημεία A , B , $Γ$. Άρα είναι ο περιγεγραμμένος περί το τρίγωνο $ABΓ$ κύκλος.

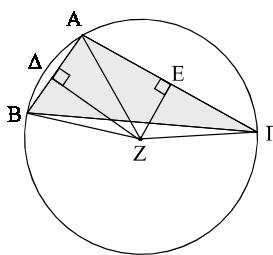
ὁ.ἔ.π.



Σχήμα 10



Σχήμα 11



Σχήμα 12

Είναι φανερό ότι:

Πόρισμα

Όταν το κέντρο του περιγεγραμμένου περί το τρίγωνο $AB\Gamma$ κύκλου είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου, η γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, την οποία δέχεται το τόξο $\overset{\cap}{BA\Gamma}$ που είναι μεγαλύτερο του ημικυκλίου, είναι μικρότερη της ορθής.

Όταν το κέντρο του κύκλου είναι σημείο της $B\Gamma$, τότε η γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ την οποία δέχεται το ημικύκλιο $\overset{\cap}{BA\Gamma}$ είναι ορθή.

Τέλος, όταν το κέντρο του κύκλου βρίσκεται εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε η $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, την οποία δέχεται το τόξο $\overset{\cap}{BA\Gamma}$ που είναι μικρότερο του ημικυκλίου, είναι μεγαλύτερη της ορθής.

Επομένως, όταν οι γωνίες του τριγώνου είναι οξείες, οι ευθείες ΔZ και EZ τέμνονται εντός του τριγώνου $AB\Gamma$, αν $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 1$ ορθή τότε οι ΔZ και EZ τέμνονται επί της $B\Gamma$ και τέλος αν $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} > 1$ ορθής, τότε οι ΔZ και EZ τέμνονται εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή συμπληρώνει την πρόταση 31 του βιβλίου III. Σε σχόλια του Βατικανού κώδικα αναφέρεται: "Ένταυθα συμπληροῖ τό λα' τοῦ γ' βιβλίου".

Στην απόδειξη ο Ευκλείδης προσδιορίζει το κέντρο Z με τη βοήθεια των προτάσεων I. 10 και I. 11 και ακολούθως χρησιμοποιεί την πρόταση I. 4 για να πιστοποιήσει ότι το Z είναι το κέντρο του κύκλου. Είναι

μάλιστα μια από τις λίγες φορές που ο Ευκλείδης διακρίνει περιπτώσεις σχετικά με το αν οι μεσοκάθετες των πλευρών AB , AG "συμπεσοῦνται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ἢ ἐπὶ τῆς $BΓ$ εὐθείας ἢ ἐκτὸς τῆς $BΓ$ ", όπως γράφει. Δεν αποδεικνύει ότι οι μεσοκάθετες των AB , AG τέμνονται, γιατί το θεωρεί πολύ απλό.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι μεσοκάθετες είναι παράλληλες, τότε είναι παράλληλες και οι πλευρές AB , AG που είναι κάθετες σ' αυτές. Αυτό όμως είναι άτοπο. Η πρόταση ότι δύο ευθείες κάθετες σε δύο παράλληλες είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δεν αναφέρεται στα *Στοιχεία*, προκύπτει όμως εύκολα από την I. 28.

Μια άλλη (ευθεία) απόδειξη για το αν οι μεσοκάθετες τέμνονται προκύπτει, αν φέρουμε την $ΔΕ$.

Τότε, επειδή $\hat{Z}ΔΕ + \hat{Z}ΕΔ < \hat{A}ΔΖ + \hat{A}ΕΖ = 2$ ορθές, οι μεσοκάθετες των AB και AG τέμνονται (5^ο αίτημα). Θα μπορούσαμε επίσης να το αποδείξουμε αυτό όπως και την πρόταση 4.

Υπάρχουν πολλές αμφιβολίες για την αυθεντικότητα του κειμένου της απόδειξης της πρότασης 5. Ο R. Simson παρατήρησε ότι η απόδειξη της πρότασης δεν είναι αυθεντική, γιατί δεν υπάρχει απόδειξη του ότι οι μεσοκάθετες των πλευρών AB , AG τέμνονται. Επιπλέον, όπως είχε παρατηρήσει και ο Campanus [83], η διάκριση τριών περιπτώσεων στην απόδειξη που δεν είναι απαραίτητο να γίνει, αποτελεί άλλη μια ένδειξη ότι η απόδειξη δεν είναι αυθεντική.

Στις παρατηρήσεις αυτές ο Heiberg [86] απαντά ότι ο διαχωρισμός σε περιπτώσεις είναι αναγκαίος, αφού οι αποδείξεις δεν είναι ίδιες. Π.χ. όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, φέρνουμε μόνο μια μεσοκάθετο για να προσδιορίσουμε το κέντρο του κύκλου. Στην περίπτωση αυτή, κέντρο είναι το μέσο της υποτείνουσας.

Όπως πολλοί νεότεροι εκδότες έχουν παρατηρήσει, ο όρος "*πόρισμα*" για όσα ακολουθούν την απόδειξη, δεν ανταποκρίνεται στον ορισμό του "*πορίσματος*" που έχουμε δώσει (βιβλίο I) και για το λόγο αυτό εκδότες το αναφέρουν σαν "*παρατήρηση*".

Η πρόταση 5 είναι πολύ σημαντική για τη σύγχρονη Γεωμετρία του κύκλου και συνδέεται με μια σειρά προτάσεων πολύ σημαντικών, όπως για παράδειγμα ότι το εμβαδόν τριγώνου $ABΓ$ ισούται με $\frac{αβγ}{4R}$.

τες των πλευρών $ΒΓ$, $ΒΔ$ του τριγώνου $ΔΒΓ$ τέμνονται έστω σε σημείο $Ο$, από το οποίο προφανώς διέρχεται και η μασοκάθετη της $ΔΓ$. Δηλαδή, στην Ευκλείδια Γεωμετρία που ισχύει το 5^ο αίτημα, οι μεσοκάθετες των πλευρών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Γενικά, σε μη-ευκλείδειες Γεωμετρίες η κατασκευή 5 είναι αδύνατη και υπάρχουν τρίγωνα χωρίς περιγεγραμμένο κύκλο. Όμως η κατασκευή 5 είναι δυνατή σε ένα επίπεδο Hilbert εφοδιασμένο με το 5^ο αίτημα.

Άλλωστε, όπως ήδη αναφέραμε, όλες οι προτάσεις του βιβλίου IV ισχύουν για το ευκλείδειο επίπεδο.

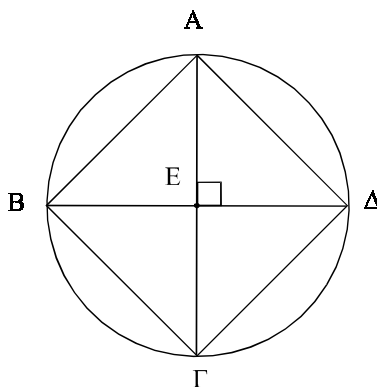
4. Εγγραφή και περιγραφή σε κύκλο κανονικών πολυγώνων

Πρόταση 6 (IV. 6)

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί τετράγωνο.

Απόδειξη

Δίνεται κύκλος (E, ρ) και θέλουμε να εγγράψουμε τετράγωνο στον κύκλο αυτό.



Σχήμα 14

Φέρουμε διαμέτρους $ΑΓ$, $ΒΔ$ με $ΑΓ \perp ΒΔ$ και τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$ και $ΔΑ$ (Σχ. 14).

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΑΔ είναι ίσα, γιατί $BE = ED$ και η κάθετη ΕΑ είναι κοινή. Άρα $AB = AD$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $AB = BG$ και $AD = GD$.

Δηλαδή $AB = BG = GD = DA$, άρα το ΑΒΓΔ είναι ισόπλευρο.

Θα αποδείξουμε ότι είναι και ορθογώνιο.

Έχουμε ότι $\hat{BAA} = \hat{AAD} = \hat{DGB} = \hat{GBA} = 1$ ορθή, αφού κάθε μία από τις γωνίες αυτές είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου και βαίνει σε ημικύκλιο.

Άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και έχει εγγραφεί στον δοθέντα κύκλο.

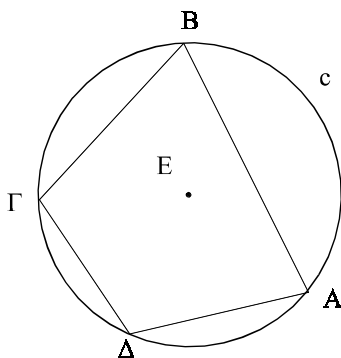
ὅ.ξ.π.

Σχόλια

Για την κατασκευή 6 ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την πρόταση Ι. 4 (ΠΓΠ) για να αποδείξει ότι $AB = BG = GD = DA$ και την πρόταση ΙΙΙ. 31 για να αποδείξει ότι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{G} = \hat{D} = 1$ ορθή.

Παρατηρούμε ότι η πρόταση 6 είναι "ανάλογη" των προτάσεων 2 και 5, οπότε η κατασκευή θα μπορούσε να γίνει σχηματίζοντας 4 ορθές επίκεντρες γωνίες.

Βέβαια, αναλογία μεταξύ της πρότασης 2 και της πρότασης 6 θα είχαμε αν η πρόταση 6 αναφερόταν σε εγγραφή τυχαιού τετραπλεύρου ίσου με δοθέν τετράπλευρο. Τέτοια πρόταση όμως δεν υπάρχει στα *Στοιχεία*, επειδή ίσως ο Ευκλείδης δεν τη θεωρούσε σημαντική. Ως γνωστόν, μια ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι το άθροισμα των απέναντι γωνιών του τετραπλεύρου να είναι 180° . Στην περίπτωση αυτή έχουμε άπειρες λύσεις, που εξαρτώνται από τη θέση μιας κορυφής.



Σχήμα 15

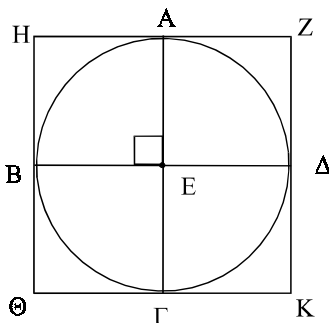
Πράγματι, αν πάνω στον κύκλο c θεωρήσουμε σημείο A και ακολούθως με την ίδια σειρά τα σημεία B, Γ, Δ (Σχ. 15), τότε για το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο c ισχύει γωνία $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Delta}$. Για κάθε κανονικό n -γωνο ($n > 3$) η κατασκευή του Ευκλείδη είναι εφαρμόσιμη.

Πρόταση 7 (IV. 7)

Περί δοθέντα κύκλου να περιγραφεί τετράγωνο.

Απόδειξη

Δίνεται κύκλος (E, ρ) και θέλουμε να περιγράψουμε τετράγωνο περί τον κύκλο αυτό.



Σχήμα 16

Φέρουμε διαμέτρους $ΑΓ$ και $ΒΔ$, με $ΑΓ \perp ΒΔ$ και τις εφαπτόμενες του κύκλου $ZH, H\Theta, \Theta K, KZ$ στα σημεία A, B, Γ, Δ αντίστοιχα (Σχ. 16).

Τότε $ΕΑ \perp ΗΖ$, $ΕΒ \perp Η\Theta$, $ΕΓ \perp \Theta K$ και $ΕΔ \perp ΖΚ$, αφού οι $ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ$ είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Έχουμε $\hat{ΑΕΒ} = \hat{ΕΒΗ} = 1$ ορθή, άρα $Η\Theta \parallel ΑΓ$. Ομοίως $ΑΓ \parallel ΖΚ$. Άρα $Η\Theta \parallel ΑΓ \parallel ΖΚ$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $ΗΖ \parallel ΒΔ \parallel \Theta K$.

Επομένως τα $ΗΖΚ\Theta, ΗΑΓ\Theta, ΑΖΚΓ, ΗΖΔΒ, ΒΔΚ\Theta$ είναι παραλληλόγραμμα.

Άρα $ΗΖ = \Theta K = ΒΔ$, $Η\Theta = ΖΚ = ΑΓ$ και αφού $ΒΔ = ΑΓ$, θα είναι $Η\Theta = \Theta K = ΖΚ = ΗΖ$. Δηλαδή το $ΗΖΚ\Theta$ είναι ισόπλευρο.

Θα δείξουμε ότι είναι και ορθογώνιο.

Το ΑΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο με $\hat{AEB} = 1 \text{ ορθή}$, άρα και η $\hat{AHB} = 1 \text{ ορθή}$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\hat{B\Theta\Gamma} = \hat{\Gamma\Kappa\Delta} = \hat{\Delta\Zeta\Lambda} = \hat{A\Hb} = 1 \text{ ορθή}$. Άρα το ΖΗΘΚ είναι τετράγωνο και έχει περιγραφεί περί τον δοθέντα κύκλο.
 ὁ.ξ.π.

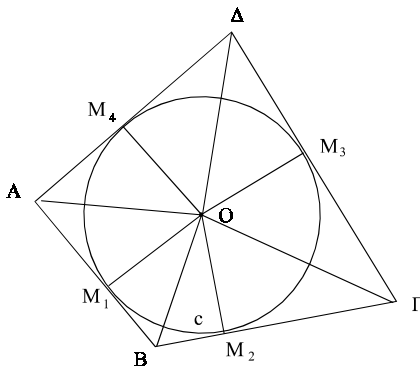
Σχόλια

Παρατηρούμε ότι αντί για τετράγωνο, θα μπορούσαμε να περιγράψουμε στον κύκλο τυχαίο **τετράπλευρο**, του οποίου όμως τα αθροίσματα των ζευγών των απέναντι πλευρών του να είναι ίσα. Τέτοια τετράπλευρα ονομάζονται **περιγράψιμα** περί κύκλο.

Ένα κυρτό τετράπλευρο είναι περιγράψιμο περί κύκλο αν και μόνο αν:

- (α) *Οι διχοτόμοι των γωνιών του περνούν από το ίδιο σημείο.*
- (β) *Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.*

Απόδειξη (α)



Σχήμα 17

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ (Σχ.17) και έστω ότι οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο Ο. Φέρνουμε τις αποστάσεις OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 του σημείου Ο από τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Τότε $OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4 = \rho$ και άρα ο κύκλος $c(O, \rho)$ εφάπτεται των πλευρών του τετραπλεύρου. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο περί κύκλο.

Αντίστροφα. Αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο περί κύκλο, τότε ο κύκλος $c(O, \rho)$ εφάπτεται στις πλευρές του. Τα τρίγωνα $OAM_1 = OAM_4$ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια και $OM_1 = OM_4$, OA κοινή. Άρα θα έχουν $\hat{OAM}_1 = \hat{OAM}_4$, δηλαδή η OA είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι οι OB , OG , OD είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και το **(β)**.

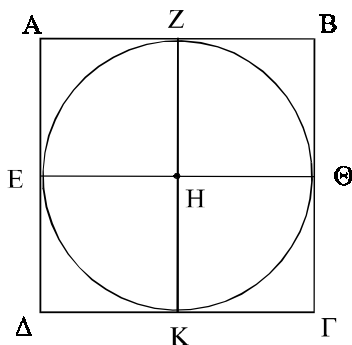
Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για να περιγράψουμε σε κύκλο τετράγωνο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε σε δοσμένο κύκλο ένα κανονικό n -γωνο. Το πρόβλημα λοιπόν της περιγραφής κανονικού n -γωνου σε δοσμένο κύκλο ισοδυναμεί με το πρόβλημα διαίρεσης του κύκλου σε n ίσα τόξα.

Πρόταση 8 (IV. 8)

Σε δοθέν τετράγωνο να εγγραφεί κύκλος.

Απόδειξη

Έστω το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και θέλουμε να εγγράψουμε κύκλο στο τετράγωνο αυτό.



Σχήμα 18

Παίρνουμε τα μέσα E και Z , των πλευρών AD και AB του τετραγώνου αντίστοιχα (Σχ.18). Από το E φέρουμε $E\Theta \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ και από το Z , $ZK \parallel B\Gamma \parallel AD$.

Άρα τα ΑΔΚΖ, ΖΚΓΒ, ΑΕΘΒ, ΕΔΓΘ, ΑΕΗΖ, ΗΚΓΘ, ΖΗΘΒ, ΕΔΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, επομένως θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες.

Επειδή $ΑΔ = ΑΒ$ και $Ε, Ζ$ μέσα των $ΑΔ, ΑΒ$, θα είναι $ΑΕ = ΑΖ$ άρα και $ΗΖ = ΗΕ$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $ΗΖ = ΗΘ = ΗΚ = ΗΕ = ρ$.

Άρα ο κύκλος $(Η, ρ)$ διέρχεται από τα σημεία $Ε, Ζ, Θ, Κ$ και εφάπτεται στις πλευρές $ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ στα σημεία αυτά αντίστοιχα, γιατί οι γωνίες με κορυφές $Ε, Ζ, Θ, Κ$ είναι ορθές (III.16). Ο κύκλος $(Η, ρ)$ είναι ο εγγεγραμμένος στο δοθέν τετράγωνο κύκλος.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Εδώ ο Ευκλείδης προσδιορίζει το κέντρο $Η$ του ζητούμενου κύκλου, αποδεικνύοντας ότι είναι η τομή των τμημάτων που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του, με τη βοήθεια της πρότασης III.16, καθώς και των προτάσεων I.10, I.31.

Η πρόταση γενικεύεται και για κάθε τετράπλευρο εγγράψιμο:

Ένα κυρτό τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν και μόνο αν:

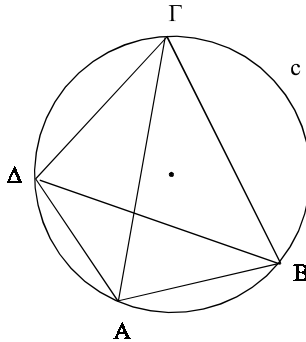
- (α) *Οι μεσοκάθετες των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.*
- (β) *Μια πλευρά του φαίνεται από τις δύο άλλες κορυφές του υπό ίσες γωνίες.*
- (γ) *Το άθροισμα δύο απέναντι γωνιών του είναι 180° .*
- (δ) *Μια γωνία του είναι ίση με την απέναντι εξωτερική γωνία του.*

Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση (β). Οι άλλες περιπτώσεις απόδεικνύονται ανάλογα.

Απόδειξη (β)

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο (Σχ. 19) στο οποίο μια πλευρά του, η ΒΓ, φαίνεται από τις κορυφές Α και Δ υπό ίσες γωνίες $\hat{ΒΑΓ} = \hat{ΒΔΓ} = \hat{\omega}$.

Τα σημεία Α και Δ είναι προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, αφού το τετράπλευρο είναι κυρτό και επομένως ανήκουν στο ίδιο τόξο χορδής ΒΓ που δέχεται γωνία $\hat{\omega}$. Άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

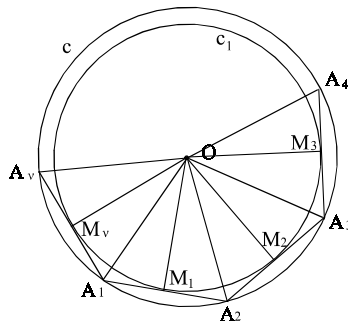


Σχήμα 19

Αντίστροφα. Αν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, τότε υπάρχει κύκλος που περνά από τις κορυφές του και είναι $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{B\Delta\Gamma} = \hat{\omega}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Για την εγγραφή και περιγραφή κανονικού ν-γώνου σε κύκλο εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω κανονικό ν-γώνο $A_1 A_2 \dots A_n$, με πλευρά λ_n και γωνία $\hat{\omega} < 2$ ορθές (Σχ. 20).



Σχήμα 20

Έστω O το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{A_1}$ και $\hat{A_2}$ το τρίγωνο OA_1A_2 είναι ισοσκελές, γιατί $\hat{OA_1A_2} = \hat{OA_2A_1} = \frac{\hat{\omega}}{2}$. Φέροντας την OA_3 τα τρίγωνα OA_1A_2 και OA_2A_3 είναι ίσα, αφού $OA_1 = OA_2$, $A_1A_2 = A_2A_3$ και $\hat{OA_1A_2} = \hat{OA_2A_3}$.

Άρα $OA_1 = OA_2 = OA_3$. Ομοίως έχουμε $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$. Επομένως το ν-γωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο $c(O, OA_1)$.

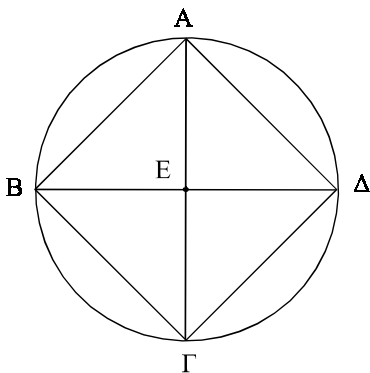
Φέρουμε από το κέντρο O τα ύψη $OM_1, OM_2, \dots, OM_n$ των ίσων τριγώνων $OA_1A_2 = OA_2A_3 = \dots = OA_nA_1$. Τότε $OM_1 = OM_2 = \dots = OM_n$. Άρα ο κύκλος $c_1(O, OM_1)$ εφάπτεται των πλευρών του κανονικού ν-γώνου και επομένως το ν-γωνο είναι περιγράψιμο στον κύκλο c_1 .

Πρόταση 9 (IV. 9)

Περί δοθέν τετράγωνο να περιγραφεί κύκλος.

Απόδειξη

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και θέλουμε να περιγράψουμε κύκλο περί το τετράγωνο αυτό.



Σχήμα 21

Φέρουμε τις διαγωνίους $ΑΓ$ και $ΒΔ$ που τέμνονται στο $Ε$ (Σχ. 21). Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα, γιατί $ΑΒ = ΑΔ$, $ΑΓ$ κοινή πλευρά και $ΒΓ = ΓΔ$. Επομένως $\hat{\Delta ΑΓ} = \hat{Β ΑΓ}$ και άρα $ΑΓ$ διχοτόμος της $\hat{\Delta ΑΒ}$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $ΑΓ$ διχοτόμος της $\hat{Β ΓΔ}$ και $ΒΔ$ διχοτόμος των $\hat{Α ΒΓ}$ και $\hat{Α ΔΓ}$.

Έχουμε $\hat{\Delta ΑΒ} = \hat{Α ΒΓ}$ και αφού $ΑΓ$ και $ΒΔ$ διχοτόμοι, θα είναι $\hat{Ε ΑΒ} = \hat{Ε ΒΑ}$, άρα στο τρίγωνο $ΕΑΒ$ θα είναι και $ΕΑ = ΕΒ$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $EA = ED = EG = EB = \rho$.

Άρα, ο κύκλος (E, ρ) διέρχεται από τα A, B, Γ, Δ και είναι ο περιγεγραμμένος περί το τετράγωνο κύκλος.

Ὡ.Ξ.Π.

Σχόλια

Από το πρώτο μέρος της απόδειξης της πρότασης αυτής προκύπτει ότι οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι επίσης και διχοτόμοι των γωνιών του τετραγώνου, άρα η τομή τους E ισαπέχει από τις πλευρές του.

Επιπλέον, το E είναι το κέντρο του τετραγώνου, δηλαδή το κέντρο του περιγεγραμμένου (και εγγεγραμμένου κύκλου στο τετράγωνο) και το κέντρο κάθε τετραγώνου εγγεγραμμένου στο $AB\Gamma\Delta$.

Το κέντρο του κύκλου προκύπτει και ως τομή των τμημάτων που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του τετραγώνου, όπως στην πρόταση 8.

Οι προτάσεις 8 και 9 είναι μερική περίπτωση της γενικότερης πρότασης:

Κάθε κανονικό n -γωνο είναι εγράψιμο και περιγράψιμο σε κύκλο.

Πρόταση 10 (IV.10)

Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο, του οποίου η γωνία της βάσης να είναι διπλάσια από τη γωνία της κορυφής του.

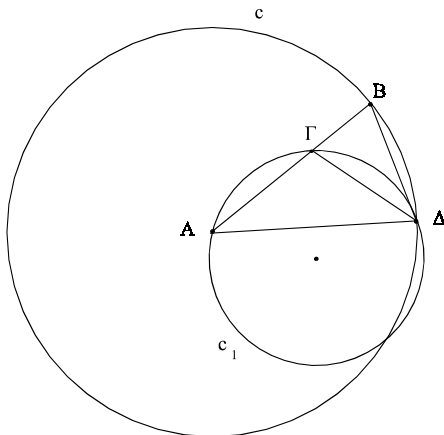
Απόδειξη

Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο του Γ τέτοιο ώστε το ορθογώνιο που ορίζουν τα AB και $B\Gamma$ να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς AG ή $AB \cdot B\Gamma = AG^2$ (II.11) (Σχ. 22).

Με κέντρο A και ακτίνα AB γράφουμε κύκλο c και κατασκευάζουμε χορδή BD του κύκλου ίση με το AG , η οποία δεν είναι μεγαλύτερη από τη διάμετρο του κύκλου (πρόταση 1).

Φέρουμε τα $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ και τον περιγεγραμμένο κύκλο c_1 του τριγώνου $A\Gamma\Delta$ (πρόταση 5).

Έχουμε ότι $AB \cdot B\Gamma = AG^2$ και $AG = BD$, άρα $AB \cdot B\Gamma = BD^2$. Από το B , που βρίσκεται εκτός του c_1 , διέρχονται δύο ευθείες, εκ των οποίων, η μία τέμνει τον c_1 στα σημεία A και Γ και η άλλη έχει κοινό σημείο με τον c_1 το Δ και επειδή $BA \cdot B\Gamma = BD^2$, η BD εφάπτεται στον c_1 στο σημείο Δ .



Σχήμα 22

Άρα η $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ είναι ίση με τη $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A}$, που είναι εγγεγραμμένη γωνία και βαίνει στο τόξο $\overset{\cap}{\Gamma\Delta}$ (III. 32).

Επειδή $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A}$, θα είναι $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A}$ ή $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A}$. Αλλά $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ (I. 32).

Τότε και $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$.

Ακόμα $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{A}$, επειδή το τρίγωνο $\Delta B\Delta$ είναι ισοσκελές, επομένως και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{A}$.

Άρα $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{A} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ και επειδή $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{B}$, στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ θα είναι $\Delta B = \Delta\Gamma$. Αλλά $\Delta B = \Delta\Gamma$, άρα $\Delta\Gamma = \Gamma\Delta$, δηλαδή στο τρίγωνο $\Gamma\Delta\Delta$ θα είναι $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A}$.

Επίσης $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$. Άρα $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 2 \hat{\Delta}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ και αφού $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$, θα έχουμε $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 2 \hat{\Delta}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$.

Άρα, κατασκευάσαμε ισοσκελές τρίγωνο, το $\Delta B\Delta$, το οποίο έχει κάθε μία από τις γωνίες της βάσης του διπλάσια από τη γωνία της κορυφής του.

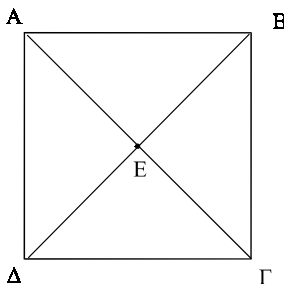
ὁ.ξ.π.

Σχόλια

Προφανώς, το τρίγωνο έχει γωνίες 36° , 72° , 72° .

Σε σχόλια του Παρισινού κώδικα διαβάζουμε: *"Τοῦτο τό θεώρημα πρόληψις ἐστίν εἰς ἐγγραφήν καί περιγραφὴν πενταγώνων καί ἐν πενταγώνοις τῷ στοιχειωτῇ συμβαλλόμενον"*. Δηλαδή η πρόταση αυτή χρησιμεύει για την κατασκευή κανονικού πενταγώνου (πρόταση 13). Για το λόγο αυτό δικαίως οι περισσότεροι σύγχρονοι αλλά και αρχαίοι ιστορικοί και σχολιαστές αποδίδουν την πρόταση 10 στους Πυθαγορείους. Με τη θέση αυτή π.χ. συμφωνεί και ο Πρόκλος, όπως ο ίδιος γράφει σχετικά.

Ο Ιάμβλιχος επίσης γράφει τη γνωστή ιστορία με τον Ίππασο τον Πυθαγόρειο, ο οποίος *"ἐξ αιτίας του ότι πρώτος ανακάλυψε και περιέγραψε σφαίραν περί κανονικό δωδεκάεδρο χάθηκε στη θάλασσα, επειδή ασέβησε θέλοντας να λάβει δόξα ως ευρετής, ενώ όλα ήταν εκείνου του ανδρός (Πυθαγόρα)"*. Από την αφήγηση του Ιάμβλικου προκύπτει ότι οι Πυθαγόρειοι (ή ο Ίππασος) γνώριζαν την κατασκευή κανονικού 5-γώνου που αποτελεί την έδρα του κανονικού 12-έδρου.

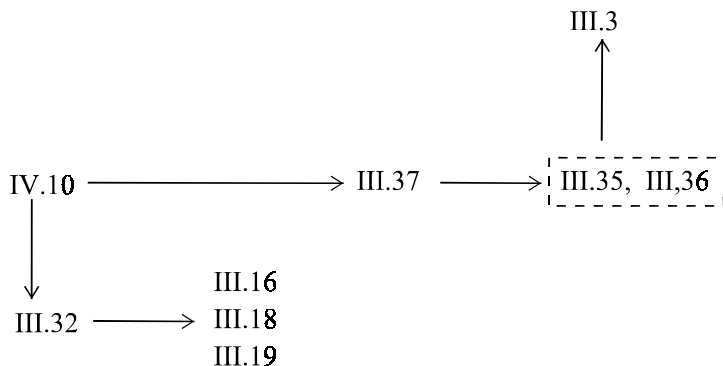


Σχήμα 23

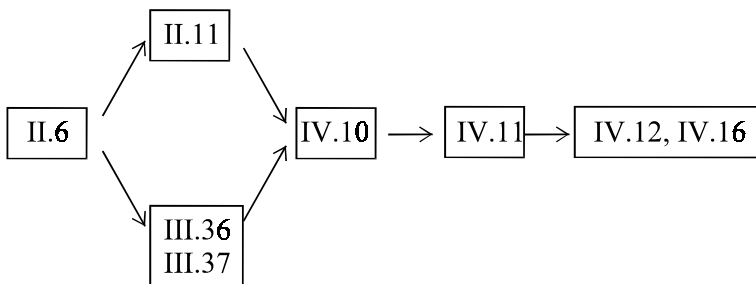
Μαρτυρίες για την άποψη αυτή βρίσκουμε και στον πλατωνικό διάλογο *"Τίμαιος"* (53γ4-55γ6). Εκεί ο Τίμαιος περιγράφοντας τη δημιουργία του κόσμου αναφέρει ότι τέσσερα ίσα ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα σχηματίζουν τετράγωνο (Σχ. 23), ενώ έξι τέτοια τρίγωνα σχηματίζουν κύβο, δομικό στοιχείο του σύμπαντος. Επίσης, τα ισόπλευρα τρίγωνα ανά τέσσερα σχηματίζουν κανονικό τετράεδρο, επίσης δομικό στοιχείο του σύμπαντος. Ακόμη, συνδυάζοντας ίσα ισοσκελή τρίγωνα με γωνίες 36° , 72° , 72° μπορούμε να κατασκευάσουμε κανονικό 5-γωνο. Με 12 ίσα κανονικά 5-γωνα σχηματίζουμε το κανονικό 12-εδρο, επίσης δομικό στοιχείο του σύμπαντος.

Ο σύγχρονος του Πλάτωνα, Αριστοφάνης στις *"Νεφέλες"* του αναφέρεται στο αστεροειδές πεντάγωνο, το σύμβολο των Πυθαγορείων.

Σύμφωνα με τον E. Neuensschwander [116] η πρόταση 10 σχετίζεται έμμεσα ή άμεσα με μια σειρά προτάσεων του βιβλίου ΙΙΙ. Μάλιστα παραθέτει και σχετικό διάγραμμα:



Ο R. Herz – Fischler [116] δίνει ένα άλλο διάγραμμα.



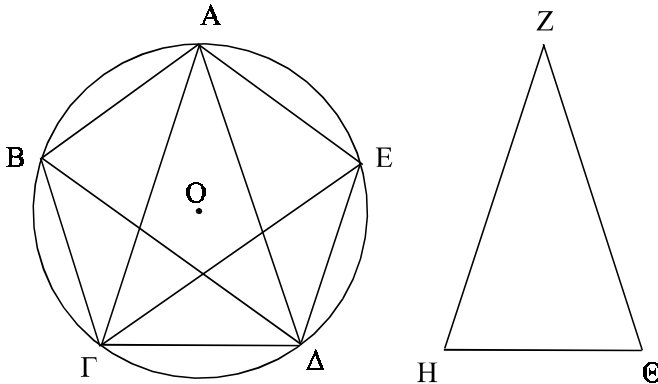
Πρόταση 11 (IV.11)

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Απόδειξη

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και θέλουμε να εγγράψουμε πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο στον κύκλο αυτό.

Παίρνουμε ισοσκελές τρίγωνο, το ΖΗΘ, με $\hat{H} = \hat{\Theta} = 2\hat{Z}$ (πρόταση 10) και στη συνέχεια εγγράφουμε στον κύκλο τρίγωνο ΑΓΔ ισογώνιο με το ΖΗΘ, έτσι ώστε $\hat{\Gamma\hat{A}\hat{D}} = \hat{Z}$ και $\hat{A\hat{G}\hat{D}} = \hat{H} = \hat{\Theta} = \hat{A\hat{A}\hat{G}}$ (Σχ. 24).



Σχήμα 24

$$\text{Άρα } \hat{A}\hat{G}\hat{\Delta} = \hat{G}\hat{\Delta}\hat{A} = 2 \hat{G}\hat{\Delta}\hat{\Delta}.$$

Φέρουμε τις διχοτόμους ΓΕ και ΔΒ των γωνιών $\hat{A}\hat{G}\hat{\Delta}$ και $\hat{G}\hat{\Delta}\hat{A}$ αντίστοιχα, (Ε και Β σημεία του κύκλου) και τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ.

Επειδή $\hat{A}\hat{G}\hat{\Delta} = \hat{G}\hat{\Delta}\hat{A} = 2 \hat{G}\hat{\Delta}\hat{\Delta}$ και ΓΕ, ΔΒ διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}\hat{G}\hat{\Delta}$ και $\hat{G}\hat{\Delta}\hat{A}$, θα έχουμε $\hat{A}\hat{G}\hat{E} = \hat{E}\hat{G}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{G} = \hat{G}\hat{\Delta}\hat{\Delta}$.

Άρα $\overset{\cap}{A}\overset{\cap}{B} = \overset{\cap}{B}\overset{\cap}{G} = \overset{\cap}{G}\overset{\cap}{\Delta} = \overset{\cap}{\Delta}\overset{\cap}{E} = \overset{\cap}{E}\overset{\cap}{A}$, επομένως $AB = BG = GD = DE = EA$ (III.27)

Άρα το πεντάγωνο είναι ισόπλευρο.

Θα δείξουμε ότι είναι και ισογώνιο.

Επειδή $\overset{\cap}{A}\overset{\cap}{B} = \overset{\cap}{\Delta}\overset{\cap}{E}$, θα είναι $\overset{\cap}{A}\overset{\cap}{B} + \overset{\cap}{B}\overset{\cap}{G}\overset{\cap}{\Delta} = \overset{\cap}{\Delta}\overset{\cap}{E} + \overset{\cap}{B}\overset{\cap}{G}\overset{\cap}{\Delta}$ ή

$\overset{\cap}{A}\overset{\cap}{B}\overset{\cap}{G}\overset{\cap}{\Delta} = \overset{\cap}{E}\overset{\cap}{\Delta}\overset{\cap}{G}\overset{\cap}{B}$. Άρα και οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{E}$ που βαίνουν στα τόξα αυτά είναι ίσες (III. 27).

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{E} = \hat{A}\hat{B}\hat{G} = \hat{B}\hat{G}\hat{\Delta} = \hat{G}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$. Δηλαδή το πεντάγωνο είναι και ισογώνιο και έχει εγγραφεί στον δοθέντα κύκλο.

ὁ.ῥ.π.

Σχόλια

Η λύση της πρότασης αυτής μας δίνει τη δυνατότητα κατασκευής κανονικού 5-γώνου εγγεγραμμένου σε δοθέντα κύκλο. Ο τρόπος αυτής της κατασκευής (η εγγραφή κανονικού 5-γώνου) οδηγεί με φυσικό τρόπο στον υπολογισμό των γωνιών του 5-γώνου ή τον διαμερισμό του σε ισοσκελή κατασκευάσιμα τρίγωνα.

Ο Jean Peletier (Peletarius) στην έκδοση των *Στοιχείων* (1557) αντικαθιστά την πρόταση 11 με την πρόταση:

Να κατασκευάσετε κανονικό πεντάγωνο, αν δίδεται η πλευρά του AB.

Μετά την κατασκευή που παραθέτει ο Peletier, κάνει την ακόλουθη παρατήρηση: *"Πάντα, αν γνωρίζουμε την κατασκευή ενός κανονικού ν-γωνου, μπορούμε να κατασκευάσουμε και το πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό πλευρών". (Toujours du nombre simple on connait le double, comme du triangle equilateral l' hexagone, du carre l' octogone, e.t.c.)*

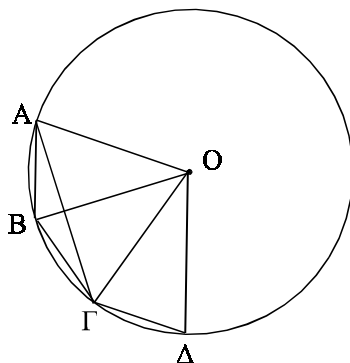
Αν και προφανώς ήταν γνωστό αυτό στον Ευκλείδη, εν τούτοις για την κατασκευή του κανονικού 10-γωνου δε χρησιμοποιεί την πρόταση 11, αλλά την έννοια της *"χρυσής τομής"*.

Η συνθετική απόδειξη της πρότασης 11 από τον Ευκλείδη είναι άμεση εφαρμογή της πρότασης 10, δηλαδή της κατασκευής ισοσκελούς τριγώνου με γωνίες 72° , 72° , 36° εγγεγραμμένου σε κύκλο δοθείσης ακτίνας.

Παρατηρώντας το σχήμα 24 διαπιστώνουμε ότι αν είχαμε φέρει και το τμήμα BE, τότε θα είχαμε κατασκευάσει το "πεντάγραμμα", το σύμβολο των Πυθαγορείων.

Ο Heath αναφέρει ότι ο Άγγλος μαθηματικός και μεταφραστής των *Στοιχείων* Simpson παρατήρησε: *"Η μέθοδος απόδειξης της πρότασης 11 δεν είναι τόσο φυσική, όπως θα ήταν αν γινόταν μια άμεση χρήση της γωνίας που βρέθηκε στο τέλος. (Δηλαδή ότι $\hat{A\epsilon\Delta} = \hat{B\Delta\epsilon}$)*.

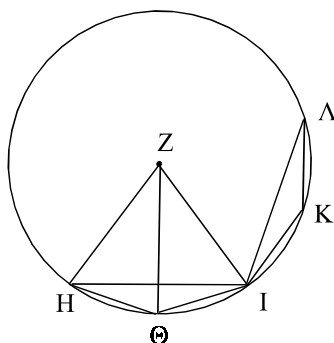
Μια άλλη κατασκευή δίνει ο μεταφραστής των *Στοιχείων* Η. Μ. Taylor, που κατασκευάζει πρώτα κανονικό 10-γωνο και λέει ότι συνδέοντας π.χ. τις άρτιες κορυφές του 10-γωνου, κατασκευάζουμε το κανονικό 5-γωνο (Σχ. 25).



Σχήμα 25

Η πρόταση αυτή έχει πολλές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στις προτάσεις 12 και 16, καθώς και στη πρόταση XIII.16.

Παρατηρούμε ότι ο Ευκλείδης για την απόδειξη της πρότασης 11 χρησιμοποιεί την 10. Θα μπορούσαμε όμως να αποδείξουμε την πρόταση διαφορετικά, κατασκευάζοντας επίκεντρες γωνίες 36° . Δηλαδή με κέντρο την κορυφή Z και ακτίνα ZH (Σχ. 26) να γράψουμε κύκλο, να πάρουμε τόξα $\overset{\cap}{\text{H}\Theta} = \overset{\cap}{\text{\Theta}\text{I}} = \dots$ και να φέρουμε τις χορδές HI, ΙΛ, ...



Σχήμα 26

Η ευφυής στρατηγική της χρήσης ενός γνωστού σχήματος για την κατασκευή ενός ζητούμενου χρησιμοποιείται από τον Ευκλείδη και στην απόδειξη της πρότασης 16, αν και με διαφορετικό τρόπο από ό,τι εδώ. Την παρατήρηση αυτή έκαναν πολλοί ερευνητές (π.χ. Sachs).

- 1^ο βήμα. Φέρω το τμήμα ΟΑ.
- 2^ο βήμα. Γράφω κύκλο (Α, ΑΟ), που τέμνει τον c στα Β, Γ.
- 3^ο βήμα. Φέρω το τμήμα ΒΓ, που τέμνει το ΟΑ στο Δ.
- 4^ο βήμα. Φέρω τον κύκλο (Δ, ΔΟ), που τέμνει το ΔΒ στο Ε.
- 5^ο βήμα. Φέρω την ευθεία ΑΕ, που τέμνει τον c στο Ζ.
- 6^ο βήμα. Γράφω κύκλο (Δ, ΔΖ), που τέμνει την ΑΟ στα Η, Θ.
- 7^ο βήμα. Γράφω κύκλο (Ζ, ΖΘ), που τέμνει τον c στα Ι, Κ.
- 8^ο βήμα. Γράφω κύκλο (Ζ, ΖΗ), που τέμνει τον c στα Λ, Μ.
- 9 - 13 βήματα. Φέρω τα τμήματα ΖΙ, ΙΛ, ΛΜ, ΜΚ, ΚΖ.

Χρήση της πρότασης 11 γίνεται στις προτάσεις 12 και 16, καθώς και στο βιβλίο XIII, π.χ. στις προτάσεις XIII.10, XIII.11, XIII.16.

Πρόταση 12 (IV.12)

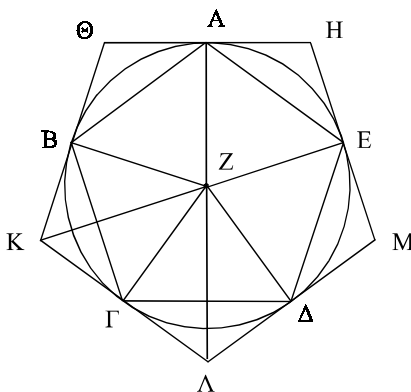
Περί δοθέντα κύκλου να περιγραφεί πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Απόδειξη

Δίνεται κύκλος (Ζ, ρ) και θέλουμε να περιγράψουμε περί τον κύκλο πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Έστω ΑΒΓΔΕ πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο, εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ζ, ρ).

Στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του κύκλου φέρουμε τις εφαπτόμενες ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ και ΜΗ αντίστοιχα και στη συνέχεια φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ και ΖΔ (Σχ. 28).



Σχήμα 28

Έχουμε $Z\Gamma \perp K\Lambda$, αφού $Z\Gamma$ ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής Γ .

Άρα $\hat{Z\Gamma K} = \hat{Z\Gamma \Lambda} = 1$ ορθή. Για τον ίδιο λόγο $\hat{ZBK} = \hat{Z\Lambda \Lambda} = 1$ ορθή.

Έχουμε ακόμα, $ZK^2 = Z\Gamma^2 + \Gamma K^2$ και $ZK^2 = ZB^2 + BK^2$ (I. 47).

Άρα $Z\Gamma^2 + \Gamma K^2 = ZB^2 + BK^2$ και αφού $Z\Gamma = ZB$, θα είναι και $K\Gamma = KB$. Τα τρίγωνα ZBK και $Z\Gamma K$ αφού έχουν $ZB = Z\Gamma$, $BK = \Gamma K$ και ZK κοινή

πλευρά, είναι ίσα, άρα $\hat{B\dot{Z}K} = \hat{K\dot{Z}\Gamma}$ και $\hat{B\dot{K}Z} = \hat{\Gamma\dot{K}Z}$.

Επομένως $\hat{B\dot{Z}\Gamma} = 2 \hat{K\dot{Z}\Gamma}$ και $\hat{B\dot{K}\Gamma} = 2 \hat{Z\dot{K}\Gamma}$.

Για τον ίδιο λόγο $\hat{\Gamma\dot{Z}\Lambda} = 2 \hat{\Gamma\dot{Z}\Lambda}$ και $\hat{\Lambda\dot{\Lambda}\Gamma} = 2 \hat{Z\dot{\Lambda}\Gamma}$ και αφού $\hat{\Gamma\dot{B}\Gamma} = \hat{\Gamma\dot{\Lambda}\Gamma}$, θα είναι $\hat{B\dot{Z}\Gamma} = \hat{\Gamma\dot{Z}\Lambda}$ (III. 27), άρα και $\hat{K\dot{Z}\Gamma} = \hat{\Lambda\dot{Z}\Gamma}$.

Τα τρίγωνα $Z\Gamma K$ και $Z\Gamma \Lambda$ αφού έχουν $\hat{K\dot{Z}\Gamma} = \hat{\Lambda\dot{Z}\Gamma}$, $\hat{Z\dot{\Gamma}K} = \hat{Z\dot{\Gamma}\Lambda}$ και τη $Z\Gamma$ κοινή, είναι ίσα, άρα $K\Gamma = \Lambda\Gamma$ και $\hat{Z\dot{K}\Gamma} = \hat{Z\dot{\Lambda}\Gamma}$ και επειδή $K\Gamma = \Lambda\Gamma$, θα είναι $K\Lambda = 2K\Gamma$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\Theta K = 2BK$ και αφού $BK = K\Gamma$, θα είναι $\Theta K = K\Lambda$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\Theta K = \Theta H = HM = M\Lambda = K\Lambda$.

Άρα το πεντάγωνο $H\Theta K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο. Θα δείξουμε ότι είναι ισογώνιο.

Έχουμε $\hat{\Theta\dot{K}\Lambda} = 2 \hat{Z\dot{K}\Lambda}$ και $\hat{K\dot{\Lambda}M} = 2 \hat{Z\dot{\Lambda}K}$ και αφού $\hat{Z\dot{K}\Lambda} = 2 \hat{Z\dot{\Lambda}K}$, θα είναι $\hat{\Theta\dot{K}\Lambda} = \hat{K\dot{\Lambda}M}$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\hat{\Theta\dot{K}\Lambda} = \hat{K\dot{\Theta}H} = \hat{\Theta\dot{H}M} = \hat{H\dot{M}\Lambda} = \hat{K\dot{\Lambda}M}$.

Άρα το πεντάγωνο $H\Theta K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο και ισογώνιο και είναι περιγεγραμμένο περί τον δοθέντα κύκλο.

Ὡς.π.

Σχόλια

Σε σχόλια του Βατικανού κώδικα υπάρχει μια διαφοροποιημένη απόδειξη από αυτήν που αναφέρεται εδώ. Σ’ αυτήν αποδεικνύεται ότι η γωνία $\hat{B\dot{K}\Gamma}$ είναι διπλάσια της $\hat{Z\dot{K}\Gamma}$ είτε της $\hat{B\dot{\Gamma}Z}$, όπως γράφει ο ανώνυμος σχολιαστής.

Αναφέρουμε ότι το συμπέρασμα για το πεντάγωνο ΗΘΚΛΜ που υπάρχει στο κείμενο του Heiberg δεν υπάρχει στο χειρόγραφο που έλαβε υπόψη του ο ίδιος.

Η πρόταση 12 είναι από αυτές που ο Ευκλείδης δε χρησιμοποιεί στα *Στοιχεία*. Όμως, η μέθοδος κατασκευής της πρότασης 12 χρησιμοποιείται στις προτάσεις 15 και 16, καθώς και στην κατασκευή περιγεγραμμένου κανονικού 15-γώνου.

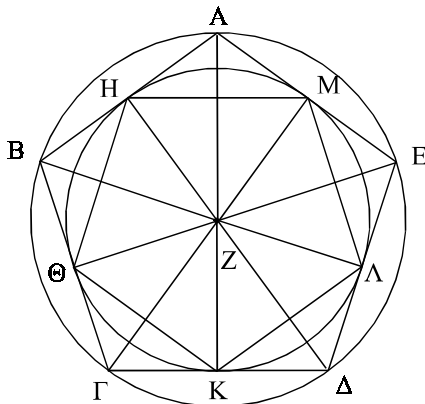
Πρόταση 13 (IV. 13)

Σε δοθέν πεντάγωνο το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο να εγγραφεί κύκλος.

Απόδειξη

Δίνεται το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο και θέλουμε να εγγράψουμε κύκλο στο πεντάγωνο αυτό.

Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}\Gamma\Delta = \hat{\Gamma}\Delta E$ που τέμνονται στο Ζ και τα ευθύγραμμα τμήματα ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ (Σχ. 29).



Σχήμα 29

Τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΖΓΔ, αφού έχουν $B\Gamma = \Gamma\Delta$, ΖΓ κοινή πλευρά και $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}Z$, θα είναι ίσα, άρα $BZ = \Delta Z$. Επομένως $\hat{\Gamma}\hat{B}Z = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}Z$, γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές (I. 26)

Έχουμε $\hat{\Gamma\Delta E} = 2 \hat{\Gamma\Delta Z}$, και $\hat{\Gamma\Delta E} = \hat{A\beta\Gamma}$, άρα $\hat{A\beta\Gamma} = 2 \hat{\Gamma\Delta Z}$ και αφού $\hat{\Gamma\Delta Z} = \hat{\Gamma\beta Z}$, θα είναι $\hat{A\beta\Gamma} = 2 \hat{\Gamma\beta Z}$.

Άρα $\hat{A\beta Z} = \hat{Z\beta\Gamma}$, δηλαδή η βZ είναι διχοτόμος της $\hat{A\beta\Gamma}$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι οι AZ και EZ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B\alpha E}$ και $\hat{A\epsilon\Delta}$ αντίστοιχα.

Στη συνέχεια φέρουμε από το Z τα ευθύγραμμα τμήματα ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM κάθετα στις πλευρές AB , $\beta\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , $E\alpha$ του πενταγώνου αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα $Z\Theta\Gamma$ και $ZK\Gamma$, αφού έχουν $\hat{Z\Theta\Gamma} = \hat{ZK\Gamma} = 1$ ορθή, $\hat{\Theta\Gamma Z} = \hat{K\Gamma Z}$ και $Z\Gamma$ κοινή πλευρά, είναι ίσα, άρα $Z\Theta = ZK$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $Z\Theta = ZH = ZM = Z\Lambda = ZK = \rho$.

Άρα ο κύκλος (Z, ρ) διέρχεται από τα σημεία H , Θ , K , Λ , M και εφάπτεται στις AB , $\beta\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , $E\alpha$ στα σημεία αυτά αντίστοιχα, αφού οι γωνίες με κορυφές τα H , Θ , K , Λ , M είναι ορθές.

Επομένως ο (Z, ρ) είναι ο εγγεγραμμένος εις το πεντάγωνο κύκλος.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλιο

Η απόδειξη της πρότασης 13 επισήμανε ότι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου είναι το σημείο της τομής των διχοτόμων του πολύγώνου (πενταγώνου). Η διαπίστωση αυτή είναι εξαιρετικά κρίσιμη και αποτελεί την αφετηρία της κατασκευής του κύκλου, το κέντρο του οποίου ορίζεται ως τομή των διχοτόμων δύο διαδοχικών γωνιών του 5-γώνου.

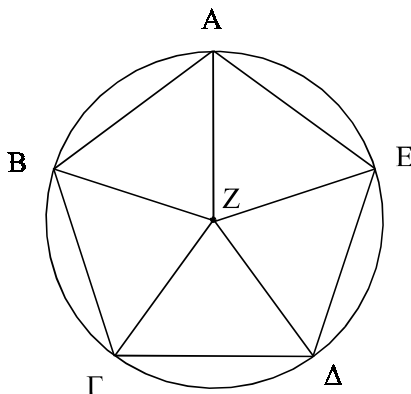
Πρόταση 14 (IV.14)

Περί δοθέν πεντάγωνο, το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο, να περιγραφεί κύκλος.

Απόδειξη

Δίνεται το πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$, το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο και θέλουμε να περιγράψουμε κύκλο περί το πεντάγωνο αυτό.

Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}\Gamma\Delta$ και $\hat{\Gamma}\Delta E$ που τέμνονται στο Z και στη συνέχεια φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ZB, ZA, ZE (Σχ. 30).



Σχήμα 30

Με όμοιο τρόπο, όπως στην προηγούμενη κατασκευή, αποδεικνύουμε ότι οι ZB, ZA, ZE είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Gamma}B\Delta$, $\hat{B}\Delta E$, $\hat{A}\Delta E$ αντίστοιχα.

$$\text{Επειδή } \hat{B}\Gamma\Delta = \hat{\Gamma}\Delta E, \text{ θα είναι } \frac{\hat{B}\Gamma\Delta}{2} = \frac{\hat{\Gamma}\Delta E}{2} \text{ ή } \hat{Z}\Gamma\Delta = \hat{\Gamma}\Delta Z, \text{ άρα}$$

στο τρίγωνο ZΓΔ έχουμε $Z\Gamma = Z\Delta$ (I. 6)

Ομοίως, όπως και στην πρόταση 13, αποδεικνύουμε ότι $Z\Gamma = ZB = ZA = ZE = Z\Delta = \rho$.

Άρα ο κύκλος (Z, ρ) διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και είναι ο περιγεγραμμένος περί το πεντάγωνο κύκλος.

Σχόλια

Εδώ ο Ευκλείδης εκμεταλλευόμενος το γεγονός ότι το πολύγωνο (5-γωνο) είναι κανονικό, θεωρεί, για μεγαλύτερη ευκολία, το κέντρο του ως το σημείο της τομής των διχοτόμων των γωνιών του. Όμως αν το πολύγωνο δεν είναι κανονικό, αυτό δεν ισχύει, αφού ως γνωστόν το κέντρο του περιγεγραμμένου σ' αυτό κύκλου είναι το σημείο της τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

Παρατηρούμε ακόμα ότι στις αποδείξεις των προτάσεων 12 μέχρι 14 είτε ότι οι εφαπτόμενες στις κορυφές ενός εγγεγραμμένου κανονικού

πολυγώνου σχηματίζουν πολύγωνο με ίδιο αριθμό πλευρών, είτε ότι η τομή των διχοτόμων δύο διαδοχικών γωνιών του πολυγώνου είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου, είτε ότι οι μεσοκάθετοι δύο διαδοχικών πλευρών του είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου. Οι παρατηρήσεις αυτές χρησιμοποιούνται όχι μόνο στις προτάσεις 15 και 16, αλλά ακόμα και σήμερα.

Όπως αναφέρει ο Heath, ο De Morgan γράφει ότι οι προτάσεις 12, 13, 14 μπορούν να αντικατασταθούν με την πρόταση:

Αν δοθεί κανονικό πολύγωνο οποιουδήποτε αριθμού πλευρών, τότε αυτό μπορούμε να το εγγράψουμε και να το περιγράψουμε σε κύκλο.

Η πρόταση 14 έχει εφαρμογή στις προτάσεις XIII.8 και στο λήμμα της XIII.18.

Πρόταση 15 (IV. 15)

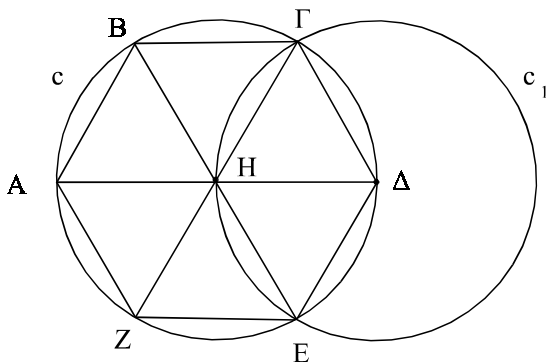
Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί εξάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Απόδειξη

Δίνεται κύκλος (H, ρ) και θέλουμε να εγγράψουμε εξάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο στον κύκλο αυτό.

Φέρουμε διάμετρο ΑΔ του κύκλου και στη συνέχεια γράφουμε κύκλο (Δ, ΔΗ) που τέμνει τον δοθέντα στα σημεία Γ και Ε.

Φέρουμε τις ΕΗ και ΓΗ που τέμνουν τον (H, ρ) στα Β και Ζ αντίστοιχα.



Σχήμα 31

Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EZ , ZA (Σχ. 31). Θα δείξουμε ότι το εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι ισόπλευρο και ισογώνιο.

Έχουμε ότι $HE = HD$ ως ακτίνες του κύκλου (H , ρ), $\Delta E = \Delta H$ ως ακτίνες του (Δ , ΔH), άρα $HE = \Delta E$.

Επομένως το τρίγωνο EHD είναι ισόπλευρο.

Άρα $\hat{EHD} = \hat{H\Delta E} = \hat{\Delta EH}$ (I. 5) και αφού $\hat{EHD} + \hat{H\Delta E} + \hat{\Delta EH} = 2$ ορθές (I. 32), θα είναι $\hat{EHD} = \frac{1}{3} \cdot 2$ ορθές.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\hat{\Delta HG} = \frac{1}{3} \cdot 2$ ορθές και επειδή

$\hat{EHG} + \hat{GHB} = 2$ ορθές (I. 13), θα είναι $\hat{GHB} = \frac{1}{3} \cdot 2$ ορθές.

Επομένως οι γωνίες $\hat{EHD}$, $\hat{\Delta HG}$, $\hat{GHB}$ είναι ίσες, άρα και οι κατακορυφήν τους $\hat{BHA}$, $\hat{AHZ}$, $\hat{ZHE}$ είναι ίσες προς αυτές (I. 15).

Άρα $\hat{EHD} = \hat{\Delta HG} = \hat{GHB} = \hat{BHA} = \hat{AHZ} = \hat{ZHE}$. Επομένως $\overset{\cap}{AB} = \overset{\cap}{B\Gamma} = \overset{\cap}{\Gamma\Delta} = \overset{\cap}{\Delta E} = \overset{\cap}{EZ} = \overset{\cap}{ZA}$ (III. 26) και επειδή σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές (III. 29), έχουμε $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZA$, δηλαδή το εξάγωνο είναι ισόπλευρο. Θα δείξουμε ότι είναι και ισογώνιο.

Έχουμε $\overset{\cap}{AZ} = \overset{\cap}{\Delta E}$, άρα $\overset{\cap}{AZ} + \overset{\cap}{AB\Gamma\Delta} = \overset{\cap}{\Delta E} + \overset{\cap}{AB\Gamma\Delta}$ ή

$\overset{\cap}{ZAB\Gamma\Delta} = \overset{\cap}{E\Delta\Gamma B A}$. Επομένως $\hat{Z\Delta E} = \hat{A\Delta Z}$ (III. 27).

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\hat{A\Delta Z} = \hat{Z\Delta B} = \hat{A\Delta\Gamma} = \hat{B\Delta\Gamma} = \hat{\Gamma\Delta E} = \hat{\Delta E Z}$.

Άρα το εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι και ισογώνιο και έχει εγγραφεί στον δοθέντα κύκλο.

ὁ.ἔ.π.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι:

Πόρισμα

Η πλευρά του εξαγώνου είναι ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Με όμοιο τρόπο, όπως κάναμε στο πεντάγωνο, εάν θεωρήσουμε έξι σημεία ενός κύκλου τα οποία είναι κορυφές εξαγώνου ισοπλεύρου

και ισογωνίου και στα σημεία αυτά φέρουμε εφαπτόμενες του κύκλου, θα περιγραφεί περί τον κύκλο εξάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο. Αυτό αποδεικνύεται όπως αποδείχτηκε και στο πεντάγωνο.

Ακόμα, όπως αποδείχτηκε και για το πεντάγωνο, μπορούμε να περιγράψουμε κύκλο σε δοθέν εξάγωνο.

Σχόλια

Η απόδειξη της πρότασης 15 είναι χαρακτηριστική της αυστηρότητας των ευκλείδειων αποδείξεων. Και επειδή ο Πρόκλος αναφερόταν στο πόρισμα του βιβλίου IV, συμπεραίνουμε ότι δε θεωρούσε πόρισμα την προσθήκη της πρότασης 5.

Η τοποθέτηση του πορίσματος στο σημείο αυτό είναι αμφιλεγόμενη. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι το πόρισμα αυτό βρίσκεται στο βιβλίο II (*τό δέ ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ κείμενον*). Αυτό όμως δεν ισχύει, αφού το μόνο πόρισμα που υπάρχει στο βιβλίο II είναι το πόρισμα της πρότασης II. 4. Ο Heiberg θεώρησε ότι το βιβλίο στο οποίο ο Πρόκλος αναφέρονταν ήταν το δ' (IV).

Ο De Morgan παρατηρεί ότι η μέθοδος της απόδειξης της πρότασης 15 μπορεί να εφαρμοσθεί και γενικότερα.

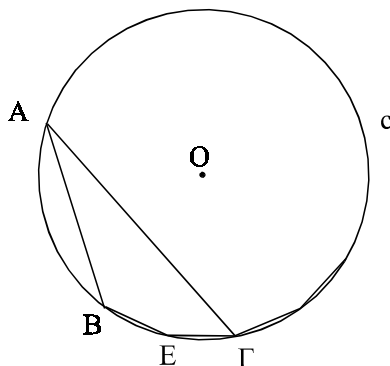
Όπως έχει ήδη επισημάνει ο Mugler [115] στο Λεξικό του, αλλά και ο Heath, ο όρος “κύκλος” αντιστοιχεί εδώ στον όρο “περιφέρεια”, η οποία αναφέρεται είτε σε ολόκληρη την περιφέρεια, είτε σε ένα τόξο της περιφέρειας, όπως ακριβώς ο όρος *ευθεία* αντιστοιχεί στην ευθεία αλλά και στο ευθύγραμμο τμήμα. Δεν είναι σαφές αν αυτή η επιλογή της ορολογίας συνεπάγεται και μία μεταβολή της θεώρησης του κύκλου όχι πια ως σχήματος, αλλά ως γραμμής, καθώς και μια ανάπτυξη της έννοιας της “κίνησης” και του γεωμετρικού τύπου.

Πρόταση 16 (IV. 16)

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Απόδειξη

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ και θέλουμε να εγγράψουμε στον κύκλο αυτό δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.



Σχήμα 32

Έστω ΑΓ η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου, το οποίο εγγράφουμε στον δοθέντα κύκλο (πρόταση 2) και ΑΒ η πλευρά ισοπλεύρου πενταγώνου, το οποίο εγγράφουμε στον κύκλο αυτό (πρόταση 11) (Σχ. 32).

Άρα από τα δεκαπέντε ίσα τόξα από τα οποία θα αποτελείται ο κύκλος, πέντε αντιστοιχούν στο τόξο $\overset{\cap}{ΑΒΓ}$, το οποίο είναι το ένα τρίτο του κύκλου και τρία αντιστοιχούν στο τόξο $\overset{\cap}{ΑΒ}$, το οποίο είναι το ένα πέμπτο του κύκλου. Επομένως στο υπόλοιπο τόξο $\overset{\cap}{ΒΓ}$ αντιστοιχούν δύο από τα ίσα τόξα.

Παίρνουμε το μέσο Ε του τόξου ΒΓ (III. 30). Άρα καθένα από τα τόξα ΒΕ, ΕΓ είναι το ένα δέκατο πέμπτο του κύκλου.

Έτσι, αφού φέρουμε τις χορδές ΒΕ και ΕΓ, παίρνουμε διαδοχικές χορδές του κύκλου ίσες με αυτές (πρόταση 1), μέχρι που να χωρίσουμε τον κύκλο σε δεκαπέντε ίσα τόξα. Επομένως θα εγγραφεί στον δοθέντα κύκλο δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

ὅ.ξ.π.

Σχόλια

Με όμοιο τρόπο όπως και στο πεντάγωνο, εάν στα σημεία του κύκλου τα οποία είναι κορυφές ισοπλεύρου δεκαπενταγώνου φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου, θα περιγραφεί περί τον κύκλο δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο (πρόταση 12).

Ακόμα, με όμοιες αποδείξεις, όπως στο πεντάγωνο, μπορούμε να εγγράψουμε και να περιγράψουμε κύκλο σε δοθέν δεκαπεντάγωνο.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Ευκλείδης απέδειξε τις τελευταίες προτάσεις του βιβλίου IV των *Στοιχείων* επειδή είναι χρήσιμες στην Αστρονομία.

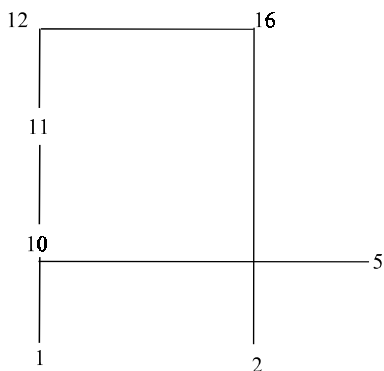
Αναφέρουμε επίσης ότι όλες οι προτάσεις του βιβλίου IV ισχύουν σε ένα ευκλείδειο επίπεδο, όπως το έχουμε ορίσει.

Στο βιβλίο IV ο Ευκλείδης απέδειξε ότι μπορούν να κατασκευασθούν τα κανονικά n -γωνα με $n = 3, 4, 5, 6, 15$.

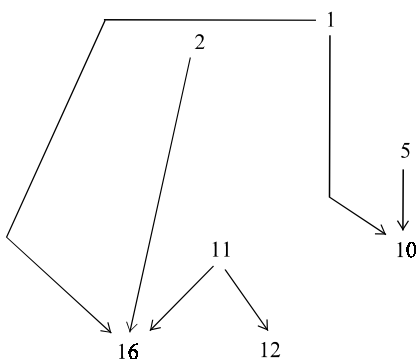
Επομένως και κάθε κανονικό n -γωνο με

$$n = 3 \cdot 2^k, 4 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k, 15 \cdot 2^k, \text{ όπου } k \in \mathbb{N}.$$

Η δομή του βιβλίου IV φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα 1 και 2.



Διάγραμμα 1



Διάγραμμα 2

Κεφάλαιο 5

BIBΛΙΟ V

Λόγοι και αναλογίες

1. Εισαγωγή

Στο βιβλίο V των *Στοιχείων* εισάγονται αρκετές νέες έννοιες, όπως π.χ. αυτές του *μεγέθους* και της *αναλογίας*.

Η διάκριση των εννοιών "*μέγεθος*" και "*αριθμός*" πιθανολογείται ότι οφείλεται στους Πυθαγορείους, οι οποίοι απέδιδαν στους ακεραίους αριθμούς ιδιότητες και έννοιες διαφορετικές από τις σημερινές.

Ο όρος "*αναλογία*" φαίνεται ότι ήταν γνωστός στους Πυθαγορείους ως μεσότης, όπως πιστεύουν οι Hankel [75] και A. Rey. Ωστόσο, πολλοί άλλοι θεωρούν ότι ο όρος αυτός δεν ανήκε στο λεξιλόγιο της καθομιλουμένης την εποχή εκείνη. Το επιχείρημά τους είναι ότι την έκφραση "*ανάλογον*" δεν την συναντούμε συχνά στα προεγκλείδεια Μαθηματικά. Πράγματι, τη βρίσκουμε μόνο στον πλατωνικό διάλογο "*Φαίδων*" (110d) και σε κάποιο απόσπασμα έργου του Αρχύτα, που έχει διαδωθεί από τον Πορφύριο. Ο W. Burkert ([25]) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι η έννοια "*ανάλογος*" είναι μια μαθηματική έκφραση και δεν μπορεί να υπάρξει εκτός των Μαθηματικών.

Πάντως, όπως τονίζουν πολλοί ιστορικοί, οι αναλογίες θα πρέπει να ήταν γνωστές στους Πυθαγορείους, αφού αυτοί γνώριζαν πολλές ανα-

λογίες που μπορούσαν να προκύψουν από μεσότητες. Π.χ. (κατά τους Allmann και Loria),

η αναλογία $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > \beta > \gamma$) δίνει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ (μέσος αριθμητικός),

η αναλογία $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$ δίνει $\beta^2 = \alpha\gamma$ (μέσος γεωμετρικός) και

η αναλογία $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ δίνει $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$ (μέσος αρμονικός),

Φαίνεται ότι τις μεσότητες χρησιμοποιούν και στη Μουσική ή και αλλού, ενώ τις αναλογίες μόνο στα Μαθηματικά, όπως προκύπτει από τα όσα αναφέρουν ο Ιάμβλιχος και ο Νικόμαχος ο Γερασηνός, οι οποίοι γράφουν ότι οι Πυθαγόρας, Πλάτων, Αριστοτέλης γνώριζαν τις αναλογίες. Αλλά και στον Εύδοξο αποδίδεται η γνώση των αναλογιών από πολλούς ανώνυμους σχολιαστές.

Βέβαια, υπάρχουν μαρτυρίες σύμφωνα με τις οποίες η έννοια του λόγου ήταν γνωστή και στον Θαλή.

Σύμφωνα με τον Szabo [137] στα *Στοιχεία* υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι χρήσεως του όρου “*ανάλογον*”:

Ο πρώτος είναι ο ορισμός του βιβλίου V: “*τά τόν αὐτόν ἔχοντα μεγέθη ἀνάλογον καλεῖσθω*”. (Τα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο ονομάζονται ανάλογα).

Ο δεύτερος τρόπος χρήσης της έκφρασης υπάρχει στην πρόταση VI.12 “*τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τέταρτην ἀνάλογον προσευρεῖν*”. (Αν δοθούν τρεις ευθείες, να βρεθεί τέταρτη ανάλογος).

Προσωπική μας άποψη είναι ότι δεν πρόκειται εδώ για διαφορετικό τρόπο χρήσης, αλλά για μια γεωμετρική εφαρμογή του ορισμού των ανάλογων μεγεθών.

Το γεγονός αυτό είχε κατανοήσει και ο άγνωστος σχολιαστής του Βατικανού κώδικα, ο οποίος αναφέρει ότι: “*Σκοπός του πέμπτου βιβλίου είναι η μελέτη των αναλογιών. Και είναι κοινό αυτό το βιβλίο για τη Γεωμετρία, την Αριθμητική, τη Μουσική και κάθε μαθηματική επιστήμη . . .*”

Πολλοί ιστορικοί (P. Michel, [111] von Fritz [158]) πιστεύουν ότι η έννοια “*λόγος*” έχει τις ρίζες της στους πολυγωνικούς αριθμούς.

Η έννοια του λόγου στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με τη σημερινή. Πράγματι, για τον Ευκλείδη ο λό-

γος είναι μια σχέση μεταξύ δύο μεγεθών και όχι κάτι σαν ένα αντικείμενο, π.χ. ένα κλάσμα, ή σαν πηλίκο δύο ακεραίων.

Η έννοια του λόγου διαφέρει από εκείνη του κλάσματος. Είναι χαρακτηριστικό, ότι ενώ οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι και οι αρχαίοι Αιγύπτιοι γνώριζαν την έννοια του κλάσματος, εν τούτοις αγνοούσαν πλήρως την έννοια του λόγου. (Θ. Εξαρχάκος [55]). Φαίνεται λοιπόν ότι η έννοια του λόγου είναι καθαρά ελληνική.

Όπως και στα υπόλοιπα βιβλία του Ευκλείδη, οι αποδεικτικές μέθοδοι που κυριαρχούν είναι *η συνθετική* και *η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο*. Μόνο κατά την απόδειξη της πρότασης 17 του βιβλίου V χρησιμοποιείται *η αναλυτική μέθοδος*.

Το βιβλίο V περιλαμβάνει 18 ορισμούς και 25 προτάσεις.

Στις προτάσεις 1 και 2 αποδεικνύονται οι δύο επιμεριστικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, ενώ στην πρόταση 3 αποδεικνύεται η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Η πρόταση 4, όπως ισχυρίζεται ο CL. Theaet [145], επειδή η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ περιέχει και τους ασύμμετρους, δηλώνει ότι ο πολλαπλα-

σιασμός πραγματικού αριθμού επί ρητό δίνει αποτέλεσμα που δεν εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο παριστάνεται ο πραγματικός αριθμός.

Στις προτάσεις 5, 6, 15 αναφέρονται οι ιδιότητες των πολλαπλασίων, ενώ στις προτάσεις 7, 9, 11, 12 και 16 αποδεικνύονται ιδιότητες αναλογιών.

Στις προτάσεις 8, 10, 13, 14 αναφέρονται ιδιότητες αναλογιών με ανισοτικές σχέσεις, ενώ στις προτάσεις 17, 18 και 19 αναφέρονται ιδιότητες αναλογιών μεταξύ μεγεθών και μερών αυτών.

Στην πρόταση 20 αναφέρεται η αναλογία που προκύπτει "δι' ἴσου λόγου" (με εξαίρεση των μέσων όρων), ενώ η πρόταση 21 μπορεί να θεωρηθεί ως εφαρμογή της πρότασης 20.

Η πρόταση 22 αποτελεί απόδειξη του ορισμού 17, που αφορά την *τεταγμένη αναλογία*, ενώ η πρόταση 23 αποτελεί απόδειξη του ορισμού 18, που αφορά την *τεταραγμένη αναλογία*.

Η πρόταση 24 είναι εφαρμογή των προτάσεων 18 και 20.

Τέλος, η πρόταση 25 αναφέρεται σε μια ιδιότητα του αριθμητικού και του γεωμετρικού μέσου δύο άνισων αριθμών, αποδεικνύοντάς την με τη βοήθεια μεγεθών.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, τις προτάσεις του βιβλίου V μπορούμε να τις κατατάξουμε σε δύο ενότητες:

α) Οι προτάσεις 1 μέχρι 6 αναφέρονται σε σχέσεις ισοπολλαπλασίων.

β) Οι προτάσεις 7 μέχρι 25 αναφέρονται στους λόγους και στις αναλογίες.

2. Ορισμοί

1. *Ένα μέγεθος λέγεται μέρος ενός μεγαλύτερου μεγέθους, αν μπορούμε να μετρήσουμε το δεύτερο μέγεθος με μονάδα μέτρησης το πρώτο.*
2. *Αν ένα μέγεθος μπορεί να μετρηθεί από ένα μικρότερό του, τότε αυτό λέγεται πολλαπλάσιο του μικρότερού του.*
3. *Αν δύο ομοειδή μεγέθη συγκριθούν μεταξύ τους, τότε υπάρχει πάντοτε μια σχέση που προκύπτει από τη σύγκριση του ενός με το άλλο, η οποία λέγεται λόγος των δύο αυτών μεγεθών.*
4. *Δύο μεγέθη λέμε ότι έχουν λόγο μεταξύ τους, όταν πολλαπλασιάζοντάς τα κατάλληλα μπορούμε να πετύχουμε ώστε το ένα να υπερέχει του άλλου.*
5. *Τέσσερα μεγέθη λέμε ότι έχουν τον ίδιο λόγο, το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν ίσες φορές πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου σε σχέση με τα ίσες φορές πολλαπλάσια του δεύτερου και τέταρτου με οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό είναι μεγαλύτερα ή ίσα ή μικρότερα, όταν αυτά ληφθούν σε αντίστοιχη τάξη.*
6. *Ανάλογα λέγονται τα μεγέθη τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο.*
7. *Αν δοθούν τέσσερα μεγέθη και τα ίσες φορές πολλαπλάσια του πρώτου με το τρίτο, καθώς και του δεύτερου με το τέταρτο, έτσι ώστε: το μεν πρώτο να υπερέχει του πολλαπλασίου του δευτέρου, το δε τρίτο να μην υπερέχει του πολ-*

λαπλασίον του τετάρτου, τότε το πρώτο μέγεθος προς το δεύτερο έχει λόγο μεγαλύτερο από το λόγο που έχει το τρίτο μέγεθος προς το τέταρτο.

8. *Η αναλογία που έχει τρεις όρους λέγεται ελαχίστη.*
9. *Όταν τρία μεγέθη βρίσκονται σε συνεχή αναλογία, τότε το πρώτο προς το τρίτο βρίσκεται σε διπλάσιο λόγο από το λόγο του πρώτου προς το δεύτερο.*
10. *Όταν τέσσερα μεγέθη βρίσκονται σε (συνεχή) αναλογία, τότε το πρώτο προς το τέταρτο βρίσκεται σε τριπλάσιο λόγο από το λόγο του πρώτου προς το δεύτερο και ούτω καθεξής, σύμφωνα με την υπάρχουσα αναλογία.*
11. *Ομόλογα μεγέθη λέγονται τα ηγούμενα προς τα ηγούμενα, και τα επόμενα προς τα επόμενα.*
12. *Εναλλάξ λόγος είναι η λήψη του ηγουμένου προς τον ηγούμενο και του επομένου προς τον επόμενο.*
13. *Ανάπαλιν ή αντίστροφος λόγος είναι η λήψη του επομένου ως ηγουμένου, προς τον ηγούμενο ως επόμενο.*
14. *Σύνθεση λόγου λέγεται ο λόγος του αθροίσματος ηγουμένου και επομένου προς τον επόμενο.*
15. *Διαίρεση λόγου είναι ο λόγος της υπεροχής του ηγουμένου από τον επόμενο, προς αυτόν τον επόμενο.*
16. *Αναστροφή λόγου είναι ο λόγος του ηγουμένου προς την υπεροχή του ηγουμένου από τον επόμενο.*
17. *Δι' ίσου λόγος είναι αν υπάρχουν μεγέθη και άλλα τόσα ίσα σε πλήθος με αυτά, τα οποία λαμβανόμενα ανά δυο να βρίσκονται σε αναλογία και ο λόγος του πρώτου προς το τελευταίο στα πρώτα μεγέθη να είναι ίδιος με το λόγο του πρώτου προς τον τελευταίο στα δεύτερα μεγέθη. Διαφορετικά, δι' ί-*

σου λόγος είναι η λήψη των άκρων όρων με εξαίρεση των μέσων.

18. *Μια αναλογία λέγεται τεταραγμένη όταν: Υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα τόσα ακόμη και ισχύει: Ο λόγος του ηγουμένου προς τον επόμενο στα πρώτα μεγέθη είναι ίσος με το λόγο του ηγουμένου προς τον επόμενο στα δεύτερα μεγέθη και οποιοσδήποτε λόγος επομένου προς άλλο μέγεθος στα πρώτα μεγέθη είναι ίσος με τον λόγο του αντίστοιχου άλλου μεγέθους προς τον επόμενο στα δεύτερα μεγέθη.*

Σχόλια

Οι παραπάνω ορισμοί με σύγχρονη ορολογία διατυπώνονται και ως εξής:

1. Ένα μέγεθος α λέγεται μέρος ενός μεγέθους β που είναι μεγαλύτερο του α , αν υπάρχει θετικός αριθμός $\kappa \neq 1$, ώστε $\beta = \kappa \cdot \alpha$.
2. Ένα μέγεθος β λέγεται πολλαπλάσιο ενός μεγέθους α ($\beta > \alpha$), αν υπάρχει αριθμός $\kappa \neq 1$, ώστε $\beta = \kappa \cdot \alpha$.
3. Λόγος ενός μεγέθους α προς ένα μέγεθος β λέγεται ο αριθμός κ για τον οποίο ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \kappa \Leftrightarrow \alpha = \kappa \cdot \beta$.
4. Αν α, β δύο μεγέθη, τότε λέμε ότι τα α, β έχουν λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$, όταν υπάρχουν αριθμοί λ, μ ώστε $\lambda\alpha > \mu\beta$ ή $\lambda\alpha < \mu\beta$.
5. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέσσερα μεγέθη, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αν και μόνο αν για οποιοσδήποτε φυσικούς αριθμούς μ, ν ισχύει μια από τις τρεις σχέσεις:
 - (1) $\mu\alpha > \nu\beta$ και συγχρόνως $\mu\gamma > \nu\delta$
 - (2) $\mu\alpha = \nu\beta$ και συγχρόνως $\mu\gamma = \nu\delta$
 - (3) $\mu\alpha < \nu\beta$ και συγχρόνως $\mu\gamma < \nu\delta$

Η περίπτωση (2) καλύπτει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ σύμμετρων μεγεθών, ενώ οι άλλες δύο περιπτώσεις καλύπτουν τα ασύμμετρα μεγέθη.

6. Τα μεγέθη $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, είναι ανάλογα προς τα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$,

$$\text{αν ισχύει: } \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

7. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέσσερα μεγέθη τότε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$, αν και μόνο αν υπάρ-

χουν φυσικοί αριθμοί, μ, ν για τους οποίους ισχύει $\mu\alpha > \nu\beta$ και
συγχρόνως $\mu\gamma \leq \nu\delta$.

8. Αν α, β, γ είναι μεγέθη, τότε η συνεχής αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ λέγεται

ελαχίστη αναλογία.

9. Αν για τα μεγέθη α, β, γ ισχύει η συνεχής αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, τότε

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Αυτό εννοεί ο Ευκλείδης με τον όρο "διπλάσιος".

10. Αν τέσσερα μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ βρίσκονται σε συνεχή αναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\delta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}.$$

Αυτό εννοεί ο Ευκλείδης με τον όρο "τριπλάσιο".

Γενικά, αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda}$, σε πλήθος ν , τότε

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}.$$

11. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{x}{y}$, τότε τα μεγέθη $\alpha, \gamma, \dots, x$ είναι ομόλογα με

τα μεγέθη $\beta, \delta, \dots, y$ αντιστοίχως.

12. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ (εναλλάξ λόγος).

13. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$ (αντίστροφος λόγος).

14. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$ (σύνθεση λόγου).

15. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}$.

16. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma}{\gamma - \delta}$ (αναστροφή λόγου)

17. Αν $A, B, \Gamma, \dots, X, Y$ μεγέθη και $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x, y$ άλλα μεγέθη του ίδιου πλήθους και ισχύει $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}, \frac{B}{\Gamma} = \frac{\beta}{\gamma}, \dots$

$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}$, τότε $\frac{A}{Y} = \frac{\alpha}{y}$, η οποία εκφράζει τον "δι' ίσου λόγο". Η αναλογία αυτή λέγεται και **τεταγμένη αναλογία**.

18. Αν $\alpha, \beta, \gamma, A, B, \Gamma$ είναι μεγέθη για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{B}{\Gamma}, \frac{\beta}{\gamma} = \frac{A}{B}$, τότε ο "δι' ίσου λόγος" σε "τεταραγμένη" αναλογία είναι η σχέση $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{A}{\Gamma}$.

Για την ερμηνεία του ορισμού 5 καταβλήθηκαν πολλές προσπάθειες. Μια εύστοχη προσπάθεια έγινε από τον Heath το 1906. Κατά τη διατύπωση αυτή το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ χωρίζει το πλήθος των θετικών ρητών αριθμών $\frac{\nu}{\mu}$ σε τέτοιους, ώστε $\mu\alpha > \nu\beta$ και $\mu\alpha \leq \nu\beta$.

Η τομή *Dedekind*, όπως αυτή ονομάστηκε, προσδιορίζει το ρητό ή ασύμμετρο αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$. Το κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$, ομοίως, χωρίζει το πλήθος των θετικών ρητών αριθμών $\frac{\nu}{\mu}$ σε τέτοιους, ώστε $\mu\gamma > \nu\delta$ και $\mu\gamma \leq \nu\delta$.

Η τομή αυτή προσδιορίζει το ρητό ή ασύμμετρο αριθμό $\frac{\gamma}{\delta}$. Αν οι δύο παραπάνω τομές συμπίπτουν, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Αν η πρώτη είναι μεγαλύτερη της δεύτερης, τότε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ (βλέπε ορισμό 7).

Στα παρακάτω, αναφέρουμε δύο προτάσεις και τις αποδείξεις τους, στις οποίες χρησιμοποιούνται σύμμετρα μεγέθη (μέθοδος Πυθαγορείων) και ο ορισμός 5. Ασφαλώς, η δεύτερη απόδειξη περιέχει και την πρώτη, γιατί ισχύει τόσο για σύμμετρα όσο και για ασύμμετρα μεγέθη.

Ο πρώτος ορισμός του βιβλίου V μοιάζει εντελώς σύγχρονος, αφού παρουσιάζει μια γενικότητα που μόνο στους σύγχρονους ορισμούς υπάρχει. Ωστόσο διάφοροι σχολιαστές αργότερα προσπάθησαν να περιορίσουν τη γενικότητα της έννοιας *μέγεθος* σε τρία είδη: γραμμή, επιφάνεια, στερεό.

Στον πρώτο ορισμό ο Ευκλείδης υπονοεί ότι τα δύο μεγέθη είναι ομογενή, ώστε να μπορούμε να τα συγκρίνουμε, ενώ στον τρίτο θεωρεί ότι αν $\alpha = \kappa\beta$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε ο α ονομάζεται πολλαπλάσιο του β μεγέθους.

Ο τρίτος ορισμός μας πληροφορεί για δύο πράγματα:

(α) Υπάρχει ο λόγος δύο μεγεθών του αυτού είδους.

(β) Ο λόγος δύο μεγεθών είναι μια σχέση ποσοτική.

Οι αρχαίοι θεωρούσαν δύο μη-ομογενή μεγέθη ως *άλογα*, δηλαδή ως μεγέθη που δεν έχουν λόγο. Γι' αυτό στα *Στοιχεία*, όπου αναφέρεται ότι δύο μεγέθη έχουν λόγο, εννοείται ότι αυτά είναι ομοειδή.

Ο τέταρτος ορισμός είναι πολύ σημαντικός και μπορεί να θεωρηθεί σαν πρόδρομος του αξιώματος του Αρχιμήδη, σύμφωνα με το οποίο, αν δοθούν δύο ομοειδή μεγέθη α , β υπάρχει πάντα φυσικός αριθμός $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε $\nu\alpha > \beta$.

Ο πέμπτος ορισμός επεξηγεί ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τέσσερα μεγέθη, ώστε να συνιστούν αναλογία.

Το μέγεθος του ορισμού μας φανερώνει ότι ο Ευκλείδης κατέβαλε κάθε προσπάθεια για να κατασκευάσει έναν αυστηρό ορισμό για την ισότητα δύο λόγων. Μάλιστα, ο έκτος ορισμός θα μπορούσε να αποτελέσει μέρος του πέμπτου ορισμού, αλλά τότε το μέγεθος του ορισμού θα ήταν μεγάλο.

Ο P.Tannery ([138]) κάνει τις εξής διαπιστώσεις:

- (α) Μια αναλογία έχει τουλάχιστον τρεις όρους.
- (β) Ο αριθμός των όρων μιας αναλογίας μπορεί να είναι άπειρη.
- (γ) Η αναλογία στην οποία αναφέρεται ο ορισμός 5 έχει τέσσερις όρους.

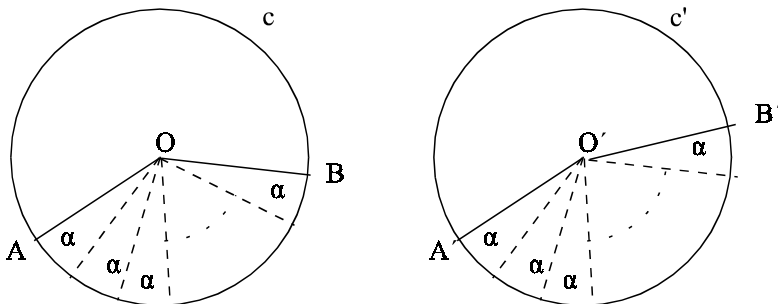
Είδαμε ότι στις μεσότητες έχουμε τρεις όρους, πράγμα που επισημαίνει και ο Νικόμαχος, καθώς και ο Πάππος. Ο έβδομος ορισμός περιέχει τη συνθήκη *ο ένας λόγος να είναι μεγαλύτερος του άλλου*. Και είναι χαρακτηριστικό ότι ο Ευκλείδης αναφέρεται γενικά σε τέσσερα μεγέθη, όπως κάνει και στον ορισμό 5, όμως δύο από τα μεγέθη αυτά θα μπορούσαν να ταυτίζονται και να έχουμε αναλογία με τρεις όρους, την *ελάχιστη* όπως την αναφέρει ο ορισμός 8.

Θα δώσουμε παρακάτω δύο προτάσεις, των οποίων οι αποδείξεις μπορούν να γίνουν και με τη χρήση του ορισμού 5.

Πρόταση (α)

Δύο επίκεντρες γωνίες του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων, έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν τα τόξα στα οποία βαίνουν.

1. Απόδειξη με τη μέθοδο των Πυθαγορείων (σύμμετρα μεγέθη).



Σχήμα 1

Έστω τα τόξα $\overset{\cap}{AB}$ και $\overset{\cap}{A'B'}$ δύο ίσων κύκλων $c(O, \rho)$, $c(O', \rho)$. Θα δείξουμε ότι $\frac{\overset{\cap}{AB}}{\overset{\cap}{A'B'}} = \frac{\hat{AOB}}{\hat{A'O'B'}}$.

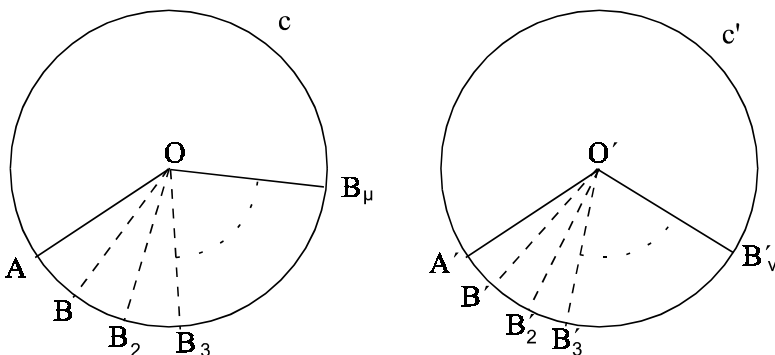
Αφού τα τόξα είναι σύμμετρα, θα έχουν κάποια κοινή μονάδα μέτρησης $\overset{\cap}{\alpha}$, η οποία θα περιέχεται κ φορές στο $\overset{\cap}{AB}$ και κ' φορές στο $\overset{\cap}{A'B'}$. Έτσι οι επίκεντρες $\hat{AOB}$, $\hat{A'O'B'}$ μπορούν να διαιρεθούν σε κ , κ' ίσες επίκεντρες γωνίες αντίστοιχα, που όλες θα είναι ίσες (αφού έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα $\overset{\cap}{\alpha}$).

Αφού λοιπόν $\overset{\cap}{AB} = \kappa \cdot \overset{\cap}{\alpha}$ και $\overset{\cap}{A'B'} = \kappa' \cdot \overset{\cap}{\alpha}$, θα είναι: $\frac{\overset{\cap}{AB}}{\overset{\cap}{A'B'}} = \frac{\kappa}{\kappa'}$

Ομοίως και: $\frac{\hat{AOB}}{\hat{A'O'B'}} = \frac{\kappa}{\kappa'}$

Άρα $\frac{\overset{\cap}{AB}}{\overset{\cap}{A'B'}} = \frac{\hat{AOB}}{\hat{A'O'B'}}$.

2. Απόδειξη με τον 5^ο ορισμό της αναλογίας.



Σχήμα 2

Έστω μ, ν φυσικοί αριθμοί.

Πάνω στον κύκλο c παίρνουμε $\mu-1$ διαδοχικά και ίσα προς το $\widehat{AB}$ τόξα, δηλαδή $\widehat{AB}_\mu = \mu \cdot \widehat{AB}$ (Σχ. 2).

Σ’ αυτά τα μ ίσα τόξα οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{AOB}_\mu = \mu \cdot \widehat{AOB}$.

Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε στον κύκλο c' , $\nu-1$ διαδοχικά και ίσα προς το $\widehat{A'B'}$ τόξα, δηλαδή $\widehat{A'B'}_\nu = \nu \cdot \widehat{A'B'}$. Σ’ αυτά τα ν ίσα τόξα, οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{A'O'B'}_\nu = \nu \cdot \widehat{A'O'B'}$.

Άρα από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$\mu \cdot \widehat{AB} > \nu \cdot \widehat{A'B'} \Leftrightarrow \widehat{AB}_\mu > \widehat{A'B'}_\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AOB}_\mu > \widehat{A'O'B'}_\nu \Leftrightarrow \mu \cdot \widehat{AOB} > \nu \cdot \widehat{A'O'B'}$$

Επομένως: αν $\mu \cdot \widehat{AB} > \nu \cdot \widehat{A'B'}$, τότε συγχρόνως και $\mu \cdot \widehat{AOB} > \nu \cdot \widehat{A'O'B'}$

Ομοίως, αν $\mu \cdot \widehat{AB} = \nu \cdot \widehat{A'B'}$, τότε συγχρόνως και $\mu \cdot \widehat{AOB} = \nu \cdot \widehat{A'O'B'}$

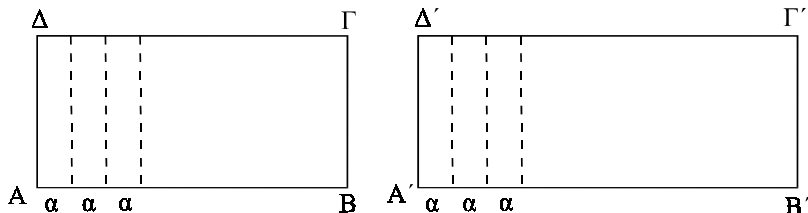
αν $\mu \cdot \widehat{AB} < \nu \cdot \widehat{A'B'}$, τότε συγχρόνως και $\mu \cdot \widehat{AOB} < \nu \cdot \widehat{A'O'B'}$.

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό 5 θα ισχύει: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{A'O'B'}}$.

Πρόταση (β)

Τα εμβαδά δύο ορθογωνίων με ίσα ύψη έχουν λόγο ίσο με το λόγο των βάσεών τους.

1. Απόδειξη με τη μέθοδο των Πυθαγορείων (σύμμετρα μεγέθη)



Σχήμα 3

Έστω τα ορθογώνια $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ με ίσα ύψη. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \frac{AB}{A'B'}$ (Σχ. 3).

Αφού τα τμήματα AB , $A'B'$ είναι σύμμετρα, θα έχουν κάποια κοινή μονάδα α , η οποία θα περιέχεται κ φορές στο AB και κ' φορές στο $A'B'$.

Έτσι τα ορθογώνια θα διαιρεθούν σε κ και κ' ίσα ορθογώνια αντίστοιχα, που όλα θα έχουν εμβαδόν E .

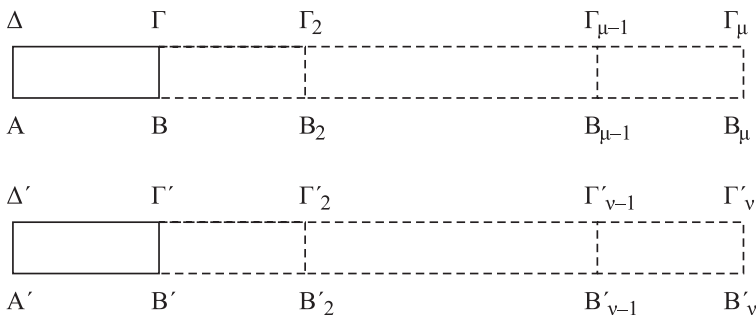
Αφού $E_{AB\Gamma\Delta} = \kappa \cdot E$ και $E_{A'B'\Gamma'\Delta'} = \kappa' \cdot E$,

$$\text{θα είναι: } \frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \frac{\kappa}{\kappa'}.$$

Αφού $AB = \kappa \cdot \alpha$ και $A'B' = \kappa' \cdot \alpha$, θα είναι: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\kappa}{\kappa'}.$

$$\text{Άρα: } \frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \frac{AB}{A'B'}$$

2. Απόδειξη με τον 5^ο ορισμό της αναλογίας.



Σχήμα 4

Έστω μ, ν φυσικοί αριθμοί.

Πάνω στην ευθεία AB παίρνουμε $\mu-1$ διαδοχικά και ίσα προς το AB ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή $AB_\mu = \mu \cdot AB$ (Σχ. 4). Έτσι σχηματίζουμε ίσα ορθογώνια προς το $AB\Gamma\Delta$. Δηλαδή $E_{AB_\mu\Gamma_\mu\Delta} = \mu \cdot E_{AB\Gamma\Delta}$.

Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε στην ευθεία $A'B'$, $\nu-1$ διαδοχικά και ίσα προς το $A'B'$ ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή $A'B'_\nu = \nu \cdot A'B'$.

Έτσι σχηματίζουμε ίσα ορθογώνια προς το $A'B'\Gamma'\Delta'$, δηλαδή $E_{A'B'_\nu\Gamma'_\nu\Delta'} = \nu \cdot E_{A'B'\Gamma'\Delta'}$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα από τα προηγούμενα, αν } \mu \cdot E_{AB\Gamma\Delta} &> \nu \cdot E_{A'B'\Gamma'\Delta'} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{AB_\mu\Gamma_\mu\Delta} &> E_{A'B'_\nu\Gamma'_\nu\Delta'} \Leftrightarrow AB_\mu > A'B'_\nu \Leftrightarrow \mu \cdot AB > \nu \cdot A'B'. \end{aligned}$$

Επομένως

- αν $\mu \cdot E_{AB\Gamma\Delta} > \nu \cdot E_{A'B'\Gamma'\Delta'}$, τότε συγχρόνως και $\mu \cdot AB > \nu \cdot A'B'$, ομοίως
- αν $\mu \cdot E_{AB\Gamma\Delta} = \nu \cdot E_{A'B'\Gamma'\Delta'}$, τότε συγχρόνως και $\mu \cdot AB = \nu \cdot A'B'$
- αν $\mu \cdot E_{AB\Gamma\Delta} < \nu \cdot E_{A'B'\Gamma'\Delta'}$, τότε συγχρόνως και $\mu \cdot AB < \nu \cdot A'B'$

$$\text{Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό 5, θα ισχύει: } \frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \frac{AB}{A'B'}.$$

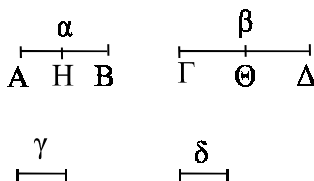
3. Σχέσεις ισοπολλαπλασίων

Πρόταση 1 (V. 1)

Αν υπάρχουν δύο ομάδες μεγεθών ίσου πλήθους, έτσι ώστε κάθε μέγεθος της πρώτης ομάδας να είναι ίσες φορές πολλαπλάσιο του αντίστοιχου της δεύτερης, τότε και το άθροισμα των μεγεθών της πρώτης ομάδας θα είναι το ίδιο ίσες φορές πολλαπλάσιο του αθροίσματος των μεγεθών της δεύτερης ομάδας.

Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη α, β που είναι ίσες φορές πολλαπλάσια των (ίσου πλήθους) γ, δ αντίστοιχα (Σχ. 5). Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα $\alpha + \beta$ είναι το ίδιο ίσες φορές πολλαπλάσιο του αθροίσματος $\gamma + \delta$.



Σχήμα 5

Διαιρούμε το $AB = \alpha$ στα ίσα μεγέθη προς το γ , τα: AH , HB και το $\Gamma\Delta = \beta$ σε μεγέθη ίσα προς το δ , τα: $\Gamma\Theta$, $\Theta\Delta$.

Το πλήθος των AH , HB είναι ίδιο με το πλήθος των $\Gamma\Theta$, $\Theta\Delta$ και επειδή $AH = \gamma$ και $\Gamma\Theta = \delta$, θα έχουμε $AH = \gamma$ και $AH + \Gamma\Theta = \gamma + \delta$.

Για τον ίδιο λόγο είναι $HB = \gamma$ και $HB + \Theta\Delta = \gamma + \delta$. Άρα όσα περιέχονται στο AB ίσα προς το γ , άλλα τόσα περιέχονται στο άθροισμα $AB + \Gamma\Delta$ ίσα προς το άθροισμα $\gamma + \delta$.

Επομένως, όσες φορές είναι πολλαπλάσιο το $AB = \alpha$ του γ και το $\Gamma\Delta = \beta$ του δ , τόσες φορές θα είναι πολλαπλάσιο και το άθροισμα $AB + \Gamma\Delta = \alpha + \beta$ του αθροίσματος $\gamma + \delta$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλιο

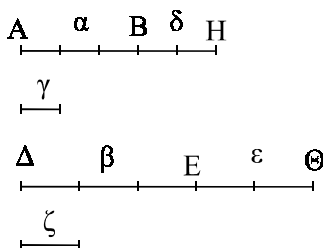
Η πρόταση αυτή είναι ουσιαστικά η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι n μεγέθη και υπάρχουν μεγέθη $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ τέτοια ώστε $\alpha_1 = \lambda\beta_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2, \dots, \alpha_n = \lambda\beta_n$, τότε $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \lambda(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)$

Πρόταση 2 (V. 2)

Αν ένα πρώτο μέγεθος είναι ίσες φορές πολλαπλάσιο ενός δεύτερου μεγέθους, ένα τρίτο μέγεθος είναι ίσες φορές πολλαπλάσιο ενός τέταρτου μεγέθους, υπάρχει δε και πέμπτο μέγεθος ίσες φορές πολλαπλάσιο του δεύτερου και έκτο μέγεθος ίσες φορές πολλαπλάσιο του τέταρτου, τότε το άθροισμα του πρώτου και του πέμπτου θα είναι ίσες φορές πολλαπλάσιο του δεύτερου, ενώ το άθροισμα του τρίτου και του έκτου θα είναι ίσες φορές πολλαπλάσιο του τέταρτου.

Απόδειξη



Σχήμα 6

Έστω τα μεγέθη $AB = \alpha$, γ , $\Delta E = \beta$, ζ , $BH = \delta$, και $E\Theta = \varepsilon$ (Σχ. 6) με τη σειρά που δίνονται και ισχύουν οι σχέσεις: $\alpha = \kappa\gamma$, $\beta = \kappa\zeta$, $\delta = \lambda\gamma$ και $\varepsilon = \lambda\zeta$ (όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι). Θα αποδείξουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha + \delta = \rho\gamma \quad \text{και} \quad \beta + \varepsilon = \rho\zeta, \quad \text{όπου} \quad \rho = \kappa + \lambda.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\alpha = \gamma + \gamma + \dots + \gamma = \kappa\gamma \quad \text{και}$$

$$\delta = \gamma + \gamma + \dots + \gamma = \lambda\gamma, \quad \text{οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε}$$

$$\alpha + \delta = \kappa\gamma + \lambda\gamma = (\kappa + \lambda)\gamma = \rho\gamma$$

Ομοίως έχουμε ότι:

$$\beta = \zeta + \zeta + \dots + \zeta = \kappa\zeta \quad \text{και} \quad \varepsilon = \zeta + \zeta + \dots + \zeta = \lambda\zeta,$$

$$\text{οπότε} \quad \beta + \varepsilon = \kappa\zeta + \lambda\zeta = (\kappa + \lambda)\zeta = \rho\zeta.$$

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

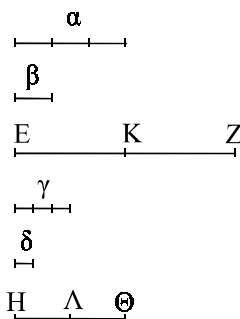
Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ είναι μεγέθη για τα οποία ισχύει: $\alpha = \lambda\beta$, $\gamma = \lambda\delta$, $\varepsilon = \mu\beta$ και $\zeta = \mu\delta$ (λ, μ θετικοί ακέραιοι), τότε $\alpha + \varepsilon = \kappa\beta$ και $\gamma + \zeta = \kappa\delta$, όπου $\kappa = \lambda + \mu$.

Εδώ ο Ευκλείδης θεωρεί ότι το άθροισμα δύο μεγεθών είναι το άθροισμα των μέτρων τους, αν και η λέξη άθροισμα αρκετές φορές υπονοείται.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να παραστήσουμε αυτό που θεωρούμε ως άθροισμα δύο ή περισσότερων αριθμών. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη γεωμετρική έκφραση $AH = AB + BH$ (που ορίζεται από τη λέξη "συντεθέν" στο αρχαίο κείμενο).

Πρόταση 3 (V. 3)

Ἐστω τέσσερα μεγέθη, που το πρώτο και το τρίτο να είναι ίσες φορές πολλαπλάσια του δεύτερου και του τέταρτου αντίστοιχα. Αν ληφθούν ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου, τότε αυτά θα είναι και ίσα πολλαπλάσια του δεύτερου και τέταρτου αντίστοιχα.

Απόδειξη

Σχήμα 7

Ἐστω τα μεγέθη α και γ , ίσες φορές πολλαπλάσια των β και δ αντίστοιχα. Δηλαδή, $\alpha = \lambda \cdot \beta$ και $\gamma = \lambda \cdot \delta$ (λ θετικός ακέραιος) (Σχ. 7).

Αν ληφθούν τα μεγέθη EZ και $H\Theta$ ίσες φορές πολλαπλάσια των α και γ , θα αποδείξουμε ότι τα EZ και $H\Theta$ είναι ίσες φορές πολλαπλάσια των β και δ αντίστοιχα.

Διαιρούμε το EZ σε μεγέθη ίσα προς το α , τα EK και KZ , καθώς και το $H\Theta$ σε μεγέθη ίσα προς το γ , τα $H\Lambda$ και $\Lambda\Theta$.

Αυτά έχουν το ίδιο πλήθος. Δηλαδή θα είναι

$$EK = \alpha \text{ ή } EK = \lambda \cdot \beta \text{ και } KZ = \alpha \text{ ή } KZ = \lambda \cdot \beta.$$

$$\text{Επίσης, } H\Lambda = \gamma \text{ ή } H\Lambda = \lambda \cdot \delta \text{ και } \Lambda\Theta = \gamma \text{ ή } \Lambda\Theta = \lambda \cdot \delta.$$

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 2, τα αθροίσματα $EK + KZ$ και $H\Lambda + \Lambda\Theta$ θα είναι ίσες φορές πολλαπλάσια των β και δ αντίστοιχα. ὅ.ξ.δ.

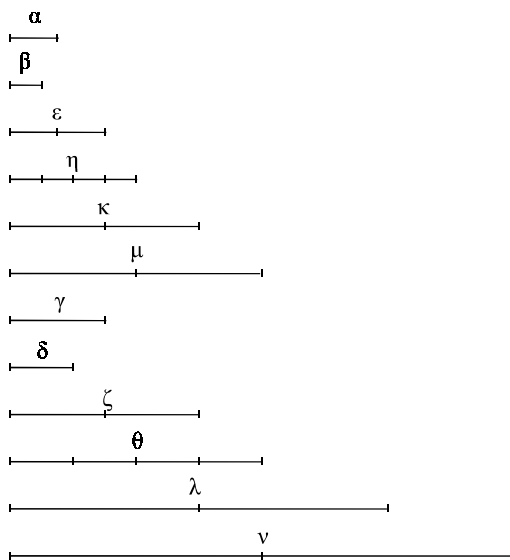
Σχόλιο

Κατά την πρόταση αυτή, αν $\alpha = \lambda\beta$, $\gamma = \lambda\delta$ και $EZ = \mu\alpha$, $H\Theta = \mu\gamma$, τότε $\mu\alpha = \mu(\lambda\beta) = (\mu\lambda)\beta$ και $\mu\gamma = \mu(\lambda\delta) = (\mu\lambda)\delta$.

Αυτό αποδεικνύει την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Πρόταση 4 (V. 4)

Αν ο λόγος ενός πρώτου μεγέθους προς ένα δεύτερο είναι ο ίδιος με το λόγο ενός τρίτου προς ένα τέταρτο μέγεθος, τότε τα ίσες φορές πολλαπλάσια του πρώτου και τρίτου προς τα ίσες φορές πολλαπλάσια του δευτέρου και τέταρτου θα έχουν τον ίδιο λόγο κατά οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό, αν ληφθούν καταλλήλως.

Απόδειξη

Σχήμα 8

Θεωρούμε τα μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και τα μεγέθη $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ με $\varepsilon = \rho\alpha$, $\zeta = \rho\gamma$, $\eta = \sigma\beta$ και $\theta = \sigma\delta$ (ρ, σ θετικοί ακέραιοι) (Σχ. 8).

Θα αποδείξουμε ότι $\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\zeta}{\theta}$.

Θεωρούμε τα μεγέθη $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ με $\kappa = \chi\varepsilon$, $\lambda = \chi\zeta$ και $\mu = \tau\eta$, $\nu = \tau\theta$ (χ, τ θετικοί ακέραιοι).

Επειδή $\varepsilon = \rho\alpha$ και $\zeta = \rho\gamma$, θα έχουμε $\kappa = \chi\varepsilon = \chi(\rho\alpha)$ και $\lambda = \chi\zeta = \chi(\rho\gamma)$ (πρόταση 3).

Ομοίως θα έχουμε: $\mu = \tau\eta = \tau(\sigma\beta)$ και $\nu = \tau\theta = \tau(\sigma\delta)$.

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό 5, επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ θα ισχύει:

- αν $\kappa > \mu$, τότε και $\lambda > \nu$ ή
- αν $\kappa = \mu$, τότε και $\lambda = \nu$ ή
- αν $\kappa < \mu$, τότε και $\lambda < \nu$

Δηλαδή, θα ισχύει $\frac{\kappa}{\mu} = \frac{\lambda}{\nu}$.

Όμως, $\kappa = \chi\epsilon$, $\lambda = \chi\zeta$, $\mu = \tau\eta$, $\nu = \tau\theta$ και επομένως $\frac{\chi\epsilon}{\tau\eta} = \frac{\chi\zeta}{\tau\theta}$

ή $\frac{\epsilon}{\eta} = \frac{\zeta}{\theta}$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

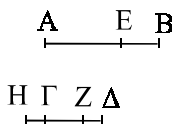
Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\epsilon = \rho\alpha$, $\zeta = \rho\gamma$, $\eta = \lambda\beta$, $\theta = \lambda\delta$ (ρ , λ θετικοί πραγμα-

τικοί αριθμοί) τότε $\frac{\epsilon}{\eta} = \frac{\zeta}{\theta}$.

Πρόταση 5 (V. 5)

Αν ένα μέγεθος είναι τόσες φορές πολλαπλάσιο ενός άλλου μεγέθους όσες φορές το αφαιρεθέν μέρος του πρώτου μεγέθους είναι πολλαπλάσιο του αφαιρεθέντος του δεύτερου, τότε και το υπόλοιπο του πρώτου θα είναι ίσες φορές πολλαπλάσιο του υπολοίπου του δεύτερου.

Απόδειξη



Σχήμα 9

Έστω $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta$ και $AE = \lambda \cdot \Gamma Z$ (όπου λ θετικός αριθμός) (Σχ. 9). Αν από το AB αφαιρέσουμε το AE και από το $\Gamma\Delta$ αφαιρέσουμε το ΓZ , τότε για τις διαφορές $EB, Z\Delta$ ισχύει $EB = \lambda \cdot Z\Delta$. Παίρνουμε μέγεθος $H\Gamma$ έτσι ώστε $EB = \lambda \cdot H\Gamma$ και επειδή $AE = \lambda \cdot \Gamma Z$, εφαρμόζοντας τη πρόταση 1 έχουμε: $AE + EB = \lambda \cdot (\Gamma Z + H\Gamma)$.

Άρα $AB = \lambda \cdot HZ$ και αφού $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta$, συμπεραίνουμε ότι $HZ = \Gamma\Delta$. Αφαιρούμε το κοινό μέγεθος ΓZ και έχουμε: $H\Gamma = Z\Delta$. Επομένως η σχέση $EB = \lambda \cdot H\Gamma$ γίνεται: $EB = \lambda \cdot Z\Delta$.

ὅ.ξ.δ.

Σχόλιο

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, είναι τέσσερα μεγέθη τέτοια ώστε $\alpha = \lambda\beta$ και $\gamma = \lambda\delta$, τότε $\alpha - \gamma = \lambda(\beta - \delta)$, λ θετικός πραγματικός αριθμός.

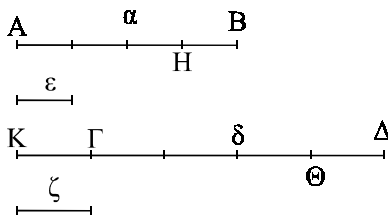
Πρόταση 6 (V. 6)

Αν δύο μεγέθη είναι ίσες φορές πολλαπλάσια δύο άλλων μεγεθών και από αυτά αφαιρεθούν ίσες φορές πολλαπλάσια των ίδιων μεγεθών, τότε και τα υπόλοιπα ή θα είναι ίσα προς τα μεγέθη αυτά ή θα είναι ίσες φορές πολλαπλάσια των μεγεθών αυτών.

Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη $AB = \alpha, \Gamma\Delta = \delta, \varepsilon, \zeta$ (Σχ. 10), για τα οποία ισχύει $AB = \rho\varepsilon$ και $\Gamma\Delta = \rho\zeta$. Από τα μεγέθη $AB, \Gamma\Delta$ αφαιρούμε τα μεγέθη $AH, \Gamma\Theta$ αντιστοίχως, με $AH = \lambda\varepsilon$ και $\Gamma\Theta = \lambda\zeta$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει:

$HB = \varepsilon$ και $\Theta\Delta = \zeta$ ή $HB = \mu\varepsilon$ και $\Theta\Delta = \mu\zeta$.



Σχήμα 10

Έχουμε $AB = \rho\varepsilon, \Gamma\Delta = \rho\zeta$, οπότε $AB - HB = AH = \lambda \cdot \varepsilon$ και $\Gamma\Delta - \Theta\Delta = \Gamma\Theta = \lambda\zeta$.

Όμως τότε θα ισχύει
 ή $HB = \varepsilon$ και $\Theta\Delta = \zeta$
 ή $HB = \mu\varepsilon$ και $\Theta\Delta = \mu\zeta$

Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι $HB = \varepsilon$. Θα αποδείξουμε ότι και $\Theta\Delta = \zeta$.
 Θεωρούμε μέγεθος $\Gamma K = \zeta$.

Επειδή $AH = \lambda\varepsilon$, $\Gamma\Theta = \lambda\zeta$ και $HB = \varepsilon$, $\Gamma K = \zeta$, με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων αυτών και σύμφωνα με τη πρόταση 2, έχουμε
 $AH + HB = \lambda\varepsilon + \varepsilon = (\lambda + 1)\varepsilon$ και $\Gamma\Theta + \Gamma K = \lambda\zeta + \zeta = (\lambda + 1)\zeta$
 ή $AB = (\lambda + 1)\varepsilon$ και

$$K\Theta = (\lambda + 1)\zeta \quad (1)$$

Σύμφωνα όμως με την υπόθεση, ισχύει $AB = \rho\varepsilon$ και $\Gamma\Delta = \rho\zeta$.
 Άρα, αφού $AB = (\lambda + 1)\varepsilon$ θα ισχύει και

$$\Gamma\Delta = (\lambda + 1)\zeta \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$K\Theta = \Gamma\Delta \quad (3)$$

Από την ισότητα (3) αφαιρούμε και από τα δύο μέλη της το μέγεθος $\Gamma\Theta$. Είναι $K\Theta - \Gamma\Theta = \Gamma\Delta - \Gamma\Theta$ ή $K\Gamma = \Theta\Delta$.

Επειδή $\Gamma K = \zeta$, θα είναι και $\Theta\Delta = \zeta$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, όταν $HB = \mu\varepsilon$, τότε και $\Theta\Delta = \mu\zeta$.
 ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 6 αναφέρεται στα εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ είναι μεγέθη τέτοια, ώστε:

$\alpha = \rho\varepsilon$, $\beta = \rho\zeta$, $\gamma = \lambda\varepsilon$ και $\delta = \lambda\zeta$ όταν ρ, λ θετικοί αριθμοί, τότε
 $\alpha - \gamma = (\rho - \lambda)\varepsilon$ και $\beta - \delta = (\rho - \lambda)\zeta$ και επομένως,

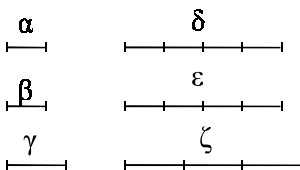
- αν $\alpha - \gamma = \varepsilon$, τότε $\rho - \lambda = 1$ ή $\rho = \lambda + 1$, που δίνει $\beta - \delta = \zeta$.
- αν $\alpha - \gamma = \mu\varepsilon$, τότε $\rho - \lambda = \mu$ ή $\rho = \lambda + \mu$, που δίνει $\beta - \delta = \mu\zeta$.

4. Λόγοι και αναλογίες

Πρόταση 7 (V. 7)

Δύο ίσα μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο προς ένα τρίτο και το τρίτο μέγεθος επίσης έχει τον ίδιο λόγο προς τα δύο προαναφερθέντα ίσα μεγέθη.

Απόδειξη



Σχήμα 11

Έστω τα ίσα μεγέθη α , β και άλλο τυχαίο μέγεθος γ (Σχ. 11). Θα αποδείξουμε ότι ισχύει: $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ και $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$.

Αν πάρουμε τα μεγέθη δ , ϵ ίσες φορές πολλαπλάσια των α , β αντίστοιχα, δηλαδή $\delta = \mu \cdot \alpha$ και $\epsilon = \mu \cdot \beta$ (μ θετικός αριθμός), και το ζ τυχαίο πολλαπλάσιο του γ , δηλαδή $\zeta = \nu \cdot \gamma$ (ν θετικός αριθμός), τότε, αφού $\delta = \mu \cdot \alpha$, $\epsilon = \mu \cdot \beta$ και $\alpha = \beta$, συμπεραίνουμε ότι θα είναι $\delta = \epsilon$.

Επομένως, όταν ισχύει:

- $\delta > \zeta$ και συγχρόνως $\epsilon > \zeta$, τότε $\mu \cdot \alpha > \nu \cdot \gamma$ και συγχρόνως $\mu \cdot \beta > \nu \cdot \gamma$
ή
- $\delta = \zeta$ και συγχρόνως $\epsilon = \zeta$, τότε $\mu \cdot \alpha = \nu \cdot \gamma$ και συγχρόνως $\mu \cdot \beta = \nu \cdot \gamma$
ή
- $\delta < \zeta$ και συγχρόνως $\epsilon < \zeta$, τότε $\mu \cdot \alpha < \nu \cdot \gamma$ και συγχρόνως $\mu \cdot \beta < \nu \cdot \gamma$

οπότε (ορισμός 5), θα ισχύει: $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$

Ομοίως αν, ισχύει:

- $\zeta < \delta$ και συγχρόνως $\zeta < \epsilon$, τότε $\nu \cdot \gamma < \mu \cdot \alpha$ και συγχρόνως $\nu \cdot \gamma < \mu \cdot \beta$
ή
- $\zeta = \delta$ και συγχρόνως $\zeta = \epsilon$, τότε $\nu \cdot \gamma = \mu \cdot \alpha$ και συγχρόνως $\nu \cdot \gamma = \mu \cdot \beta$
ή

- $\zeta > \delta$ και συγχρόνως $\zeta > \varepsilon$, τότε $\nu \cdot \gamma > \mu \cdot \alpha$ και συγχρόνως $\nu \cdot \gamma > \mu \cdot \beta$

οπότε (ορισμός 5) $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$.

Ὁ.Ἐ.δ.

Πόρισμα

Αν μερικά μεγέθη έχουν ίσους λόγους, τότε και οι αντίστροφοι λόγοι τους θα είναι ίσοι.

Απόδειξη

Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μεγέθη τέτοια ώστε να ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Τότε, σύμ-

φωνα με τον ορισμό 5, έχουμε:

$\mu \cdot \alpha > \nu \cdot \beta$ και συγχρόνως $\mu \cdot \gamma > \nu \cdot \delta$, οπότε $\nu \cdot \beta < \mu \cdot \alpha$ και συγχρόνως $\nu \cdot \delta < \mu \cdot \gamma$ ή

$\mu \cdot \alpha = \nu \cdot \beta$ και συγχρόνως $\mu \cdot \gamma = \nu \cdot \delta$, οπότε $\nu \cdot \beta = \mu \cdot \alpha$ και συγχρόνως $\nu \cdot \delta = \mu \cdot \gamma$ ή

$\mu \cdot \alpha < \nu \cdot \beta$ και συγχρόνως $\mu \cdot \gamma < \nu \cdot \delta$, οπότε $\nu \cdot \beta > \mu \cdot \alpha$ και συγχρόνως $\nu \cdot \delta > \mu \cdot \gamma$

$$\text{Άρα } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Σχόλια

Η πρόταση αυτή με σύγχρονη ορολογία αποδίδεται ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μεγέθη ώστε $\alpha = \beta$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ και $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$.

Η αντιπαράβολή των δύο μερών της απόδειξης δείχνει ότι μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά των ανισοτήτων που προκύπτουν από τον ορισμό 5, ώστε να πετύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

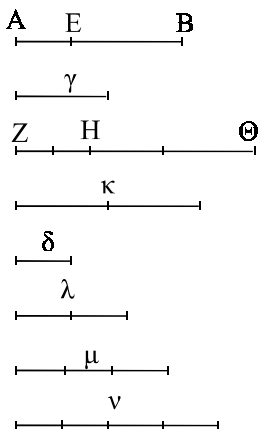
Πρόταση 8 (V. 8)

Αν δύο μεγέθη είναι άνισα τότε:

- I. *Ο λόγος του μεγαλύτερου προς ένα τρίτο μέγεθος είναι μεγαλύτερος από το λόγο του μικρότερου προς το τρίτο αυτό μέγεθος.*

II. Ο λόγος του τρίτου μεγέθους προς το μικρότερο είναι μεγαλύτερος από το λόγο του τρίτου μεγέθους προς το μεγαλύτερο.

Απόδειξη



Σχήμα 12

Έστω δύο άνισα μεγέθη $AB = \alpha$, γ με $\alpha > \gamma$ (Σχ. 12) και δ ένα τρίτο μέγεθος.

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\alpha) \frac{\alpha}{\delta} > \frac{\gamma}{\delta} \text{ και}$$

$$\beta) \frac{\delta}{\gamma} > \frac{\delta}{\alpha}$$

α) Στο $AB = \alpha$ θεωρούμε το μέγεθος $BE = \gamma$. Έστω $AE < EB$ (δηλαδή $\alpha - \gamma < \gamma$). Το AE επαναλαμβανόμενο πολλές φορές, σύμφωνα με το *αξίωμα συνεχείας*, θα υπερβεί κάποια στιγμή το δ . Παίρνουμε ένα τέτοιο πολλαπλάσιο του AE , έστω το ZH , τότε θα ισχύει

$$\rho \cdot AE = ZH > \delta \quad (1).$$

Παίρνουμε επίσης $H\Theta = \rho \cdot EB$, $\kappa = \rho \cdot \gamma$ και ακόμα $\lambda = 2\delta$, $\mu = 3\delta$,... μέχρις ότου πάρουμε το πρώτο πολλαπλάσιο του δ , το οποίο να είναι μεγαλύτερο του $\kappa = \rho \gamma$. Υποθέτουμε ότι αυτό είναι το ν , ώστε $\nu = 4\delta > \kappa$.

Εφόσον το ν είναι το πρώτο πολλαπλάσιο του δ μεγαλύτερο του κ , το κ θα είναι το πρώτο πολλαπλάσιο του δ μικρότερο του ν .

Άρα $\kappa \geq \mu$.

Επειδή $ZH = \rho \cdot AE$, $H\Theta = \rho \cdot EB$, με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$ZH + H\Theta = Z\Theta = \rho \cdot AE + \rho \cdot EB = \rho \cdot (AE + EB) = \rho \cdot AB \quad (2)$$

Επίσης, επειδή $H\Theta = \rho \cdot EB = \rho \cdot \gamma$ και $\kappa = \rho \cdot \gamma$, θα ισχύει $H\Theta = \kappa$.

Αφού $\kappa \geq \mu$, θα είναι

$$H\Theta \geq \mu \quad (3).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (3) παίρνουμε $ZH + H\Theta = Z\Theta > \mu + \delta$. Όμως $\mu + \delta = 3\delta + \delta = 4\delta = \nu$. Άρα $Z\Theta > \nu$.

Επειδή $Z\Theta = \rho \cdot AB$ (σχέση 2) και $\nu = 4\delta > \kappa$, θα ισχύει:

$$\rho AB > \nu = 4\delta \quad \text{και} \quad \rho \cdot \gamma = \kappa < \nu$$

Αν θέσουμε $\nu = \lambda\delta$, παίρνουμε τις σχέσεις $\rho AB > \lambda\delta$ και $\rho\gamma < \lambda\delta$, οπότε σύμφωνα με τον ορισμό 7 θα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\delta} > \frac{\gamma}{\delta}.$$

β) Κάνοντας την προηγούμενη κατασκευή θα αποδείξουμε κατά τον ίδιο τρόπο ότι το ν υπερέχει του κ και δεν υπερέχει του $Z\Theta$.

Πράγματι, ισχύει $\nu = 4\delta > \kappa$ και $Z\Theta = \rho \cdot AB$ $\kappa = \rho \cdot \gamma$.

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό 7 θα ισχύει:

$$\frac{\delta}{\gamma} > \frac{\delta}{\alpha}.$$

Τα παραπάνω αποδεικνύονται αναλόγως και όταν $AE > EB$.
 ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή μας λέει τα εξής:

Αν α , β είναι δύο μεγέθη με $\alpha > \beta$, τότε για κάθε άλλο μέγεθος γ θα ισχύουν οι σχέσεις: $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ και $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$.

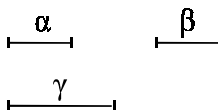
Η απόδειξη της πρότασης 8 είναι περίπλοκη και η μεγαλύτερη του βιβλίου V. Αυτό οφείλεται στο ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί γεωμετρική

γλώσσα. Στην πραγματικότητα η απόδειξη της πρότασης 8 θεωρείται κομψή. Οποσδήποτε και ο ορισμός 7, επί του οποίου ουσιαστικά στηρίζεται η απόδειξη, την κάνει υπερβολικά μεγάλη, αφού είμαστε υποχρεωμένοι να εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις.

Πρόταση 9 (V. 9)

Τα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο προς ένα άλλο μέγεθος είναι ίσα μεταξύ τους και εκείνα τα μεγέθη προς τα οποία ένα άλλο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο, είναι και πάλι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη



Σχήμα 13

Έστω τα μεγέθη α , β , τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο προς ένα τρίτο μέγεθος γ (Σχ. 13), δηλαδή $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$. Θα αποδείξουμε ότι $\alpha = \beta$.

Αν $\alpha > \beta$, τότε σύμφωνα με τη πρόταση 8 θα είναι $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, που είναι άτοπο.

Αν $\beta > \alpha$, τότε σύμφωνα με τη πρόταση 8 θα είναι $\frac{\beta}{\gamma} > \frac{\alpha}{\gamma}$, που είναι πάλι άτοπο. Άρα $\alpha = \beta$.

Έστω τώρα ότι το μέγεθος γ έχει προς τα α , β τον ίδιο λόγο, δηλαδή $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$. Θα αποδείξουμε ότι $\alpha = \beta$.

Αν $\alpha > \beta$, τότε $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$, που είναι άτοπο.

Αν $\alpha < \beta$, τότε $\frac{\gamma}{\alpha} > \frac{\gamma}{\beta}$, που είναι πάλι άτοπο.

Άρα $\alpha = \beta$.

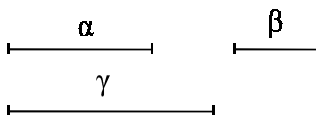
ὁ.ξ.δ.

Σχόλιο

Αν α, β μεγέθη με $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$, τότε $\alpha = \beta$. Και αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}$, τότε $\beta = \gamma$.

Πρόταση 10 (V. 10)

- α) Αν οι λόγοι δύο μεγεθών προς ένα τρίτο μέγεθος είναι άνισοι, τότε από τα δύο μεγέθη μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο λόγο.*
- β) Αν οι λόγοι ενός μεγέθους προς άλλα δύο μεγέθη είναι άνισοι, τότε από τα δύο μεγέθη μικρότερο είναι αυτό που βρίσκεται στο μεγαλύτερο λόγο.*

Απόδειξη

Σχήμα 14

α) Έστω α, β δύο μεγέθη και γ ένα τρίτο μέγεθος (Σχ. 14). Υποθέτουμε ότι $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$. Θα αποδείξουμε ότι $\alpha > \beta$.

Έστω ότι το α δεν είναι μεγαλύτερο του β . Τότε ή $\alpha = \beta$ ή $\alpha < \beta$.

- Αν $\alpha = \beta$, τότε και $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ (πρόταση 7), που είναι άτοπο.
- Αν $\alpha < \beta$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ (πρόταση 8), που είναι άτοπο.

Άρα $\alpha > \beta$.

β) Υποθέτουμε ότι $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$. Θα δείξουμε ότι $\beta < \alpha$.

Έστω ότι $\beta = \alpha$ ή $\beta > \alpha$.

- Αν $\beta = \alpha$, τότε $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ (πρόταση 7), που είναι άτοπο.

- Αν $\beta > \alpha$ τότε $\frac{\gamma}{\beta} < \frac{\gamma}{\alpha}$ (πρόταση 8), που είναι άτοπο.

Άρα $\beta < \alpha$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή αποδίδεται ως εξής:

Έστω α, β, γ τρία μεγέθη. Τότε ισχύουν τα εξής:

(α) Αν $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, τότε $\alpha > \beta$.

(β) Αν $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$, τότε $\beta < \alpha$.

Πρόταση 11 (V. 11)

Οι λόγοι οι οποίοι είναι ίσοι προς τον ίδιο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι.

Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, για τα οποία ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ και } \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}. \text{ Θα αποδείξουμε ότι } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

Αφού $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, σύμφωνα με τον ορ. 5,

$$\text{θα έχουμε: } \begin{cases} \text{αν } \mu \cdot \alpha > \nu \cdot \beta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \gamma > \nu \cdot \delta \\ \text{ή} \\ \text{αν } \mu \cdot \alpha = \nu \cdot \beta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \gamma = \nu \cdot \delta \\ \text{ή} \\ \text{αν } \mu \cdot \alpha < \nu \cdot \beta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \gamma < \nu \cdot \delta \end{cases}$$

και από $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ ομοίως

$$\text{θα έχουμε: } \left\{ \begin{array}{l} \text{αν } \mu \cdot \gamma > \nu \cdot \delta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \varepsilon > \nu \cdot \zeta \\ \text{ή} \\ \text{αν } \mu \cdot \gamma = \nu \cdot \delta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \varepsilon = \nu \cdot \zeta \\ \text{ή} \\ \text{αν } \mu \cdot \gamma < \nu \cdot \delta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \varepsilon < \nu \cdot \zeta \end{array} \right.$$

Επομένως θα ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \text{αν } \mu \cdot \alpha > \nu \cdot \beta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \varepsilon > \nu \cdot \zeta \\ \text{ή} \\ \text{αν } \mu \cdot \alpha = \nu \cdot \beta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \varepsilon = \nu \cdot \zeta \\ \text{ή} \\ \text{αν } \mu \cdot \alpha < \nu \cdot \beta, \text{ τότε συγχρόνως } \mu \cdot \varepsilon < \nu \cdot \zeta \end{array} \right\} \text{ άρα } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ συγκεκριμένα μεγέθη με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Η πρόταση 11 ορίζει τη μεταβατικότητα της ισότητας των λόγων, εξαρτάται μόνο από τον ορισμό 5 και θα ήταν δυνατό να δοθεί ενωρίτερα. Όμως, επειδή χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην επόμενη πρόταση, την πρόταση 12, δίνεται σ' αυτό το σημείο. Επιπλέον, η πρόταση αυτή μας πληροφορεί ότι οι λόγοι δεν είναι αριθμοί, γιατί αν ήταν, δε θα χρειαζόταν η πρόταση 11, αφού θα ήταν απλά η κοινή έννοια 1.

Με τη βοήθεια της πρότασης 11 και της πρότασης 7 μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε ίσα μεγέθη με άλλα χωρίς να αλλάξει η ισότητα. Π.χ. $\alpha = \gamma \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta}$ και $\beta = \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ δηλαδή, αν } \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Πρόταση 12 (V. 12)

Αν υπάρχουν οσαδήποτε μεγέθη που βρίσκονται σε αναλογία, τότε ο λόγος ενός ηγούμενου προς έναν επόμενο θα είναι ίσος με το λόγο του αθροίσματος των ηγουμένων προς το άθροισμα των επομένων.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ για τα οποία ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma + \varepsilon}{\beta + \delta + \zeta}.$$

Παίρνουμε τα μεγέθη $\eta = \mu\alpha, \theta = \mu\gamma, \kappa = \mu\varepsilon$ πολλαπλάσια των $\alpha, \gamma, \varepsilon$ αντιστοίχως και τα μεγέθη $\lambda = \nu\beta, \mu = \nu\delta, \rho = \nu\zeta$ ίσες φορές πολλαπλάσια των β, δ, ζ αντιστοίχως.

Επειδή ισχύει η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, σύμφωνα με τον ορισμό 5,

αν ισχύει $\mu\alpha \geq \nu\beta$, τότε συγχρόνως θα είναι $\mu\gamma \geq \nu\delta$ και $\mu\varepsilon \geq \nu\zeta$.

Προσθέτοντας κατά μέλη (πρόταση 1) τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\mu\alpha + \mu\gamma + \mu\varepsilon \geq \nu\beta + \nu\delta + \nu\zeta$$

$$\eta \quad \mu(\alpha + \gamma + \varepsilon) \geq \nu(\beta + \delta + \zeta)$$

Επειδή τα $\mu\alpha, \mu(\alpha + \gamma + \varepsilon)$ είναι ίσες φορές πολλαπλάσια των $\alpha, \alpha + \gamma + \varepsilon$ και τα $\nu\beta, \nu(\beta + \delta + \zeta)$ είναι ίσες φορές πολλαπλάσια των $\beta, \beta + \delta + \zeta$, θα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma + \varepsilon}{\beta + \delta + \zeta} \quad (\text{ορισμός 5}).$$

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή αποδίδεται ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ μεγέθη για τα οποία ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma + \varepsilon}{\beta + \delta + \zeta}$$

Η απόδειξη της πρότασης έγινε με τρία ζεύγη μεγεθών, όμως η πρόταση αποδεικνύεται και για n ζεύγη, η οποία μπορεί να αποδοθεί και ως εξής:

$$\text{Αν } \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}, \text{ τότε κάθε λόγος είναι ίσος με το λόγο } \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}.$$

Δηλαδή, προκειμένου να βρούμε καινούριους αντιπρόσωπους μιας σχέσης, αρκεί να προσθέσουμε τους αντιπρόσωπους των προηγούμενων όρων.

Η πρόταση 12 συμπληρώνει την πρόταση 11 και επιτρέπει να αντικαταστήσουμε μια δοσμένη σχέση με μια ίδια σχέση, που όμως αναφέρεται σε άλλα μεγέθη, σε άλλους αντιπρόσωπους. Από την άποψη αυτή η πρόταση 11 θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα πόρισμα της πρότασης 14.

Πρόταση 13 (V. 13)

Εάν ένα μέγεθος έχει λόγο προς ένα δεύτερο ίσο με εκείνον που έχει ένα τρίτο προς ένα τέταρτο, και αν το τρίτο προς το τέταρτο έχει μεγαλύτερο λόγο από ό,τι ένα πέμπτο προς ένα έκτο, τότε το πρώτο προς το δεύτερο θα έχει μεγαλύτερο λόγο από ό,τι το πέμπτο προς το έκτο.

Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, για τα οποία ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ και } \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}. \text{ Θα αποδείξουμε ότι } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Αφού $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$, θα υπάρχουν (ορισμός 7) μερικά ίσες φορές πολλα-

πλάσια των γ, ε και άλλα ίσες φορές πολλαπλάσια των δ, ζ , έτσι ώστε:
 $\mu \gamma > \nu \delta$ και συγχρόνως $\mu \varepsilon \leq \nu \zeta$

Αλλά αφού $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, σύμφωνα με τον ορισμό 5, αν $\mu \gamma > \nu \delta$, τότε

συγχρόνως ισχύει και $\mu \alpha > \nu \beta$.

Άρα έχουμε ότι $\mu \alpha > \nu \beta$ και συγχρόνως $\mu \varepsilon \leq \nu \zeta$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό 7, έχουμε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλιο

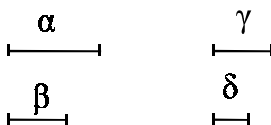
Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ μεγέθη τέτοια, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

Πρόταση 14 (V. 14)

Αν ένα πρώτο μέγεθος προς ένα δεύτερο έχει τον ίδιο λόγο που έχει ένα τρίτο προς ένα τέταρτο και το πρώτο μέγεθος είναι μεγαλύτερο από το τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι μεγαλύτερο από το τέταρτο. Αν το πρώτο είναι ίσο με το τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι ίσο με το τέταρτο και αν το πρώτο είναι μικρότερο από το τρίτο, τότε και το δεύτερο είναι μικρότερο από το τέταρτο.

Απόδειξη



Σχήμα 15

Έστω τα μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και έστω α-κόμη $\alpha > \gamma$ (Σχ. 15). Θα αποδείξουμε ότι $\beta > \delta$.

Έχουμε $\alpha > \gamma$ και β άλλο τυχαίο μέγεθος.

Σύμφωνα με τη πρόταση 8, θα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta}$. Όμως $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, οπότε

και $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\gamma}{\beta}$. Επομένως, σύμφωνα με τη πρόταση 10, θα είναι $\beta > \delta$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

- Αν $\alpha = \gamma$, τότε $\beta = \delta$ και
 - Αν $\alpha < \gamma$, τότε θα είναι και $\beta < \delta$.
- ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μεγέθη με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε θα ισχύει:

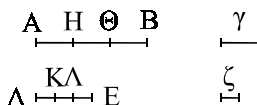
- i) Αν $\alpha = \gamma$, τότε και $\beta = \delta$
- ii) Αν $\alpha > \gamma$, τότε $\beta > \delta$
- iii) Αν $\alpha < \gamma$, τότε $\beta < \delta$

Αν προσέξουμε τις δυνατές περιπτώσεις που θεωρεί εδώ ο Ευκλείδης, θα διαπιστώσουμε πως χρησιμοποιήθηκαν όλες οι ιδιότητες σχέσεων που ορίστηκαν πριν (προτάσεις 11 και 13).

Πρόταση 15 (V. 15)

Δύο μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο με εκείνον που έχουν τα ίσες φορές πολλαπλάσιά τους, αν ληφθούν αντίστοιχα.

Απόδειξη



Σχήμα 16

Έστω τα μεγέθη AB και DE ίσες φορές πολλαπλάσια των γ και ζ αντίστοιχα (Σχ. 16). Θα αποδείξουμε ότι $\frac{\gamma}{\zeta} = \frac{AB}{DE}$.

Αφού τα AB και DE είναι ίσες φορές πολλαπλάσια των γ και ζ , όσα μεγέθη περιέχονται στο AB ίσα προς το γ , άλλα τόσα περιέχονται στο DE ίσα προς το ζ . Διαιρούμε το AB σε ίσα προς το γ , τα $AH, H\Theta, \Theta B$, καθώς και το DE σε ίσα προς το ζ , τα $ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ$. Επειδή τα $AH, H\Theta, \Theta B$ είναι ίσα μεταξύ τους, καθώς και τα $ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ$, σύμφωνα με τη πρόταση 7, θα ισχύει: $\frac{AH}{ΔΚ} = \frac{H\Theta}{ΚΛ} = \frac{\Theta B}{ΛΕ}$.

Άρα, σύμφωνα με τη πρόταση 12, θα ισχύει:

$$\frac{AH}{\Delta K} = \frac{AH + HB + \Theta B}{\Delta K + K\Lambda + \Lambda E}, \text{ οπότε}$$

$$\frac{AH}{\Delta K} = \frac{AB}{\Delta E}$$

Και επειδή $AH = \gamma$, $\Delta K = \zeta$ η προηγούμενη σχέση γίνεται: $\frac{\gamma}{\zeta} = \frac{AB}{\Delta E}$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλιο

Η πρόταση αυτή διατυπώνεται και ως εξής:

$$\text{Αν } \alpha = \rho \cdot \gamma \text{ και } \beta = \rho \cdot \delta, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Πρόταση 16 (V. 16)

Αν τέσσερα μεγέθη αποτελούν αναλογία, τότε και εναλλάξ (δηλαδή ηγούμενος προς ηγούμενο και επόμενος προς επόμενο) θα αποτελούν πάλι αναλογία.

Απόδειξη

Έστω τέσσερα μεγέθη α , β , γ , δ για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (Σχ.

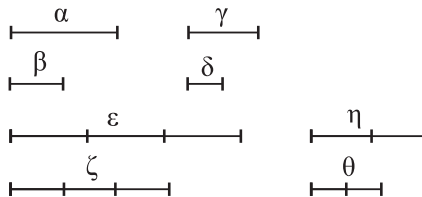
17). Θα αποδείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$.

Θεωρούμε τα μεγέθη $\varepsilon = \mu\alpha$, $\zeta = \mu\beta$ και $\eta = \nu\gamma$, $\theta = \nu\delta$.

Επειδή τα ε , ζ είναι ίσες φορές πολλαπλάσια των α , β , σύμφωνα με την πρόταση 15, θα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

$$\text{Όμως } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ οπότε } \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Για τον ίδιο λόγο, επειδή τα η , θ είναι άλλα τυχόντα μεγέθη ίσες φορές πολλαπλάσια των γ , δ θα ισχύει $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\eta}{\theta}$.



Σχήμα 17

Επομένως, $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\eta}{\theta}$ (πρόταση 11) ή $\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \frac{\nu\gamma}{\nu\delta}$.

Άρα, αν $\mu\alpha \gtrless \nu\gamma$, τότε συγχρόνως θα ισχύει $\mu\beta \gtrless \nu\delta$, που σημαίνει ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μεγέθη για τα οποία ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$.

Οι Smith και Bryant (*"Eulid's Elements of Geometry" 1901*) θεωρούν ως μεγέθη εμβαδά και αποδεικνύουν την πρόταση ως εξής:

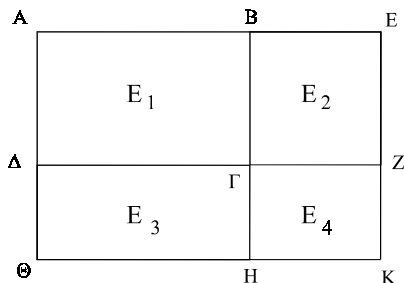
Κατασκευάζουμε δύο ορθογώνια ΑΒΓΔ, ΒΕΖΓ με ίδιο ύψος, (Σχ. 18), οπότε ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος με το λόγο των βάσεων (Πρόταση 1). Δηλαδή

$$\text{ή } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τα ορθογώνια ΔΓΗΘ και ΓΖΚΗ, για τα οποία

$$\text{ισχύει } \frac{E_3}{E_4} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma Z}.$$

$$\text{Άρα } \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_4}.$$



Σχήμα 18

Θα αποδείξουμε ότι $\frac{E_1}{E_3} = \frac{E_2}{E_4}$.

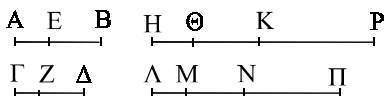
Τα ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΔΓΗΘ έχουν το ίδιο ύψος ΔΓ, οπότε $\frac{E_1}{E_3} = \frac{B\Gamma}{\Gamma H}$. Ομοίως και τα ΒΕΖΓ, ΓΖΚΗ έχουν το ίδιο ύψος ΓΖ, οπότε $\frac{E_2}{E_4} = \frac{B\Gamma}{\Gamma H}$. Επομένως $\frac{E_1}{E_3} = \frac{E_2}{E_4}$.

Η πρόταση 16 θεωρείται ως η πιο βασική πρόταση του βιβλίου V. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη (*Αναλυτικά Υστερα* 1.5.7 και 18-25), η πρόταση αυτή ανακαλύφθηκε την ίδια περίπου εποχή του γεννήθηκε ο Αριστοτέλης. Ωστόσο, όπως διαπιστώσαμε στα *Στοιχεία*, η απόδειξη γίνεται ανεξάρτητα από τη φύση των μεγεθών. Ενώ παλαιότερα γίνονταν αποδείξεις σε σχέση με το αν τα μεγέθη ήταν αριθμοί, τμήματα, όγκοι κλπ. Δηλαδή παλαιότερα χρησιμοποιούσαν την έννοια της αναλογίας με διαφορετικό τρόπο από ό,τι ο Ευκλείδης.

Πρόταση 17 (V. 17)

Αν δύο μεγέθη αποτελούν μέρος δύο άλλων μεγεθών και βρίσκονται σε αναλογία με αυτά, τότε, αν χωριστούν από αυτά, θα αποτελούν και πάλι αναλογία.

Απόδειξη



Σχήμα 19

Έστω τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ, ΒΕ, ΔΖ (το ΒΕ είναι μέρος του ΑΒ, και το ΔΖ μέρος του ΓΔ), για τα οποία ισχύει $\frac{AB}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}$ (Σχ. 19). Θα αποδείξουμε ότι $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$.

Παίρνουμε τα ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ αντίστοιχα, δηλαδή: ΗΘ = λ · ΑΕ, ΘΚ = λ · ΕΒ, ΛΜ = λ · ΓΖ και

$MN = \lambda \cdot Z\Delta$, καθώς και τα KP , NP άλλα τυχαία μεγέθη ίσες φορές πολλαπλάσια των EB , $Z\Delta$ δηλαδή $KP = \mu \cdot EB$ και $NP = \mu \cdot Z\Delta$.

Αφού $H\Theta = \lambda \cdot AE$ και $\Theta K = \lambda \cdot EB$, σύμφωνα με τη πρόταση 1, ισχύει: $H\Theta + \Theta K = \lambda \cdot (AE + EB)$.

$$\text{Άρα} \quad HK = \lambda \cdot AB \quad (1)$$

Αφού $AM = \lambda \cdot \Gamma Z$ και $MN = \lambda \cdot Z\Delta$, σύμφωνα με τη πρόταση 1, ισχύει: $AM + MN = \lambda (\Gamma Z + Z\Delta)$.

$$\text{Άρα} \quad AN = \lambda \cdot \Gamma\Delta \quad (2)$$

Αφού $\Theta K = \lambda \cdot EB$ και $KP = \mu \cdot EB$, σύμφωνα με τη πρόταση 2, ισχύει:

$$\Theta K + KP = \nu \cdot EB \quad \text{ή} \quad \Theta P = \nu \cdot EB \quad (3)$$

Αφού $MN = \lambda \cdot Z\Delta$ και $NP = \mu \cdot Z\Delta$, σύμφωνα με τη πρόταση 2, ισχύει:

$$MN + NP = \nu \cdot Z\Delta \quad \text{ή} \quad MP = \nu \cdot Z\Delta \quad (4).$$

Από την υπόθεση: $\frac{AB}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}$ και τον ορισμό 5 είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot AB > \nu \cdot EB \quad \text{και} \quad \text{συγχρόνως} \quad \lambda \cdot \Gamma\Delta > \nu \cdot \Delta Z \\ \text{ή} \\ \lambda \cdot AB = \nu \cdot EB \quad \text{και} \quad \text{συγχρόνως} \quad \lambda \cdot \Gamma\Delta = \nu \cdot \Delta Z \\ \text{ή} \\ \lambda \cdot AB < \nu \cdot EB \quad \text{και} \quad \text{συγχρόνως} \quad \lambda \cdot \Gamma\Delta < \nu \cdot \Delta Z \end{array} \right.$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) παίρνουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} HK > \Theta P \quad \text{και} \quad \text{συγχρόνως} \quad AN > MP \\ \text{ή} \\ HK = \Theta P \quad \text{και} \quad \text{συγχρόνως} \quad AN = MP \\ \text{ή} \\ HK < \Theta P \quad \text{και} \quad \text{συγχρόνως} \quad AN < MP \end{array} \right.$$

Αφαιρώντας από τα HK , ΘP το κοινό τους μέρος ΘK , καθώς και από τα AN , MP το κοινό τους μέρος MN , έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} H\Theta > KP \text{ και συγχρόνως } \Lambda M > N\Pi \\ \text{ή} \\ H\Theta = KP \text{ και συγχρόνως } \Lambda M = N\Pi \\ \text{ή} \\ H\Theta < KP \text{ και συγχρόνως } \Lambda M < N\Pi \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot AE > \mu \cdot EB \text{ και συγχρόνως} \\ \lambda \cdot \Gamma Z > \mu \cdot Z\Delta \text{ ή} \\ \lambda \cdot AE = \mu \cdot EB \text{ και συγχρόνως} \\ \lambda \cdot \Gamma Z = \mu \cdot Z\Delta \text{ ή} \\ \lambda \cdot AE < \mu \cdot EB \text{ και συγχρόνως} \\ \lambda \cdot \Gamma Z < \mu \cdot Z\Delta \end{array} \right\}$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό 5 είναι: $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλιο

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

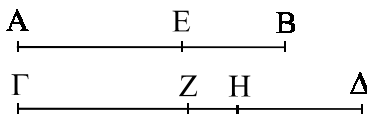
Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μεγέθη για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}.$$

Πρόταση 18 (V. 18)

Αν μέγεθη διηρημένα αποτελούν αναλογία, τότε και προστιθέμενα θα αποτελούν πάλι αναλογία.

Απόδειξη



Σχήμα 20

Έστω τα μέγεθη $AE, EB, \Gamma Z, Z\Delta$, για τα οποία ισχύει $AE + EB = AB$ και $\Gamma Z + Z\Delta = \Gamma\Delta$ και $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$ (Σχ. 20).

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{AE + EB}{EB} = \frac{\Gamma Z + Z\Delta}{Z\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}.$$

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η τελευταία ισότητα. Τότε θα υπάρχει ένα μέγεθος ΔH , για το οποίο ισχύει $\Delta H \gtrless Z\Delta$ και το οποίο θα ικανοποιεί την αναλογία: $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta H}$ (προϋποθέτουμε ότι υπάρχει τετάρτη ανάλογος, θεωρώντας τα δύο από τα τρία μεγέθη ομοειδή).

Αν $\Delta H < Z\Delta$, τότε θα υπάρχει μέγεθος ΓH , ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma H + H\Delta$.

Αφού $\Delta H < Z\Delta$, θα είναι $\Gamma H > \Gamma Z$.

$$\text{Επειδή} \quad \frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta H} \quad \text{ή} \quad \frac{AE + EB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta + \Delta H}{\Delta H},$$

σύμφωνα με τη πρόταση 17 θα ισχύει:

$$\frac{AE + EB - EB}{EB} = \frac{\Gamma H + \Delta H - \Delta H}{\Delta H} \quad \text{ή} \quad \frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma H}{\Delta H}.$$

Άρα, λόγω της υπόθεσης $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$, θα έχουμε

$$\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma H}{\Delta H} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}.$$

Όμως $\Gamma H > \Gamma Z$, οπότε και $\Delta H > Z\Delta$, που είναι άτοπο.

Άρα αποκλείεται να ισχύει $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta H}$ με $\Delta H < Z\Delta$.

Έστω τώρα $\Delta H > Z\Delta$. Τότε και $\Gamma H < \Gamma Z$.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma H}{\Delta H} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta} \quad \text{με} \quad \Gamma H < \Gamma Z, \quad \text{οπότε και} \quad \Delta H < Z\Delta, \quad \text{που είναι}$$

άτοπο.

Άρα, αποκλείεται να ισχύει $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta H}$ με $\Delta H > Z\Delta$.

Επομένως θα ισχύει $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}$.

ὅ.ξ.δ.

Σχόλιο

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέσσερα μεγέθη τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}.$$

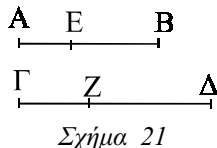
Πρόταση 19 (V. 19)

Αν δύο μεγέθη είναι ανάλογα προς δύο αφαιρεθέντα μέρη τους, τότε θα είναι ανάλογα και προς τα υπόλοιπά τους.

Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη $AB, \Gamma\Delta$ που είναι ανάλογα προς τα μέρη τους $AE, \Gamma Z$, δηλαδή:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{\Gamma Z} \quad (\text{Σχ. 21}).$$



Θα αποδείξουμε ότι: $\frac{EB}{Z\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$

Αφού $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{\Gamma Z}$, σύμφωνα με τη πρόταση 16 είναι $\frac{AB}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma Z}$ και

σύμφωνα με τη πρόταση 17 έχουμε: $\frac{AB - AE}{AE} = \frac{\Gamma\Delta - \Gamma Z}{\Gamma Z}$.

Άρα $\frac{EB}{AE} = \frac{Z\Delta}{\Gamma Z}$, οπότε (πρόταση 16) $\frac{EB}{Z\Delta} = \frac{AE}{\Gamma Z}$ και αφού

$$\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}, \text{ σύμφωνα με την πρόταση 11, έχουμε: } \frac{EB}{Z\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}.$$

ὁ.ἔ.δ.

Πόρισμα

Αν δύο μεγέθη αποτελούν μέρος δύο άλλων μεγεθών και βρίσκονται σε αναλογία με αυτά, τότε και κατ' αναστροφήν θα αποτελούν αναλογία.

Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη AB , $\Gamma\Delta$, BE , ΔZ για τα οποία ισχύει: $\frac{AB}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}$
(το BE είναι μέρος του AB , και το ΔZ μέρος του $\Gamma\Delta$). Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{AB}{AB - BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta - \Delta Z}$$

Από την αναλογία $\frac{AB}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}$ έχουμε (πρόταση 16) $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{\Delta Z}$
και σύμφωνα με τη παραπάνω πρόταση:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AB - BE}{\Gamma\Delta - \Delta Z} \quad \text{άρα} \quad \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{\Gamma Z}. \quad \text{Επομένως (πρόταση 16)} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma Z},$$

$$\text{οπότε ισχύει: } \frac{AB}{AB - BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta - \Delta Z}.$$

Σχόλια

Η πρόταση 19 αποδίδεται και ως εξής:

$$\text{Αν } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ μεγέθη για τα οποία ισχύει } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta}.$$

Επίσης, το παραπάνω πόρισμα με σύγχρονη ορολογία διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{Αν } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ μεγέθη με } \alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta \text{ και ισχύει: } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ τότε:}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma}{\gamma - \delta}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει και όταν $\beta > \alpha$ και $\delta > \gamma$, όμως οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν τους αρνητικούς αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή η παραπάνω αναλογία γράφεται $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$, οπότε ισχύει το πόρισμα και παίρ-

$$\text{νουμε τη σχέση } \frac{\beta}{\beta - \alpha} = \frac{\delta}{\delta - \gamma}.$$

Τα παραπάνω μεγέθη υποτίθεται πάντοτε ότι είναι ομοειδή ανά δύο.

Πρόταση 20 (V. 20)

Δίνονται τρία μεγέθη και άλλα τρία ίσα κατά το πλήθος με αυτά και τα οποία ανά δύο έχουν τον ίδιο λόγο. Αν δημιουργηθεί αναλογία δι' ίσου λόγου (με εξαίρεση των μέσων όρων), τότε οποιαδήποτε σχέση έχει το πρώτο με το τρίτο μέγεθος, την ίδια σχέση θα έχει το τέταρτο με το έκτο μέγεθος.

Απόδειξη

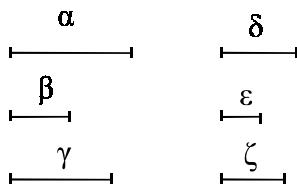
Έστω τρία μεγέθη α , β , γ και άλλα τρία δ , ε , ζ ίσα σε πλήθος με αυτά.

Για τα μεγέθη αυτά ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta} \quad (\text{Σχ. 22}).$$

Θεωρούμε την αναλογία που προκύπτει με εξαίρεση των μέσων ό-

ρων, δηλαδή την αναλογία $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$.



Σχήμα 22

Θα αποδείξουμε ότι αν $\alpha \geq \gamma$, τότε και $\delta \geq \zeta$.

Έστω κατ' αρχάς ότι $\alpha > \gamma$. Επειδή το μέγεθος β είναι διαφορετικό των α , γ , θα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta}$ (1).

$$\text{Όμως} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\zeta}{\varepsilon}.$$

Άρα, η (1) γίνεται $\frac{\delta}{\varepsilon} > \frac{\zeta}{\varepsilon}$, που σημαίνει $\delta > \zeta$.

Αν είναι $\alpha = \gamma$, τότε θα είναι και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta}$. Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ και

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\zeta}{\varepsilon} \quad \text{θα είναι} \quad \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\zeta}{\varepsilon}, \quad \text{οπότε και} \quad \delta = \zeta.$$

Τέλος, αν $\alpha < \gamma$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\beta}$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$\text{έχουμε} \quad \frac{\delta}{\varepsilon} < \frac{\zeta}{\varepsilon}, \quad \text{οπότε και} \quad \delta < \zeta.$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Στη σύγχρονη ορολογία η πρόταση αυτή αποδίδεται ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ μεγέθη για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}.$$

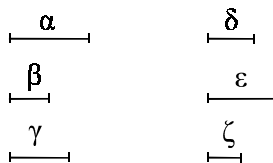
Αν και η διατύπωση της πρότασης 20 είναι περισσότερο γενική από αυτήν της πρότασης 19, οι αποδείξεις και των δύο γίνονται για τρία μεγέθη και είναι σχεδόν όμοιες.

Πρόταση 21 (V. 21)

Αν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα ίσα ως προς το πλήθος με αυτά, έτσι ώστε λαμβανόμενα ανά δύο να έχουν τον ίδιο λόγο και είναι η αναλογία τους τεταραγμένη, τότε: Αν το πρώτο είναι μεγαλύτερο από το τρίτο, θα είναι και το τέταρτο μεγαλύτερο από το έκτο. Αντίστοιχα, αν το πρώτο είναι ίσο με το τρίτο, θα είναι και το τέταρτο ίσο με το έκτο, και αν το πρώτο είναι μικρότερο από το τρίτο, τότε θα είναι και το τέταρτο μικρότερο από το έκτο.

Απόδειξη

Έστω τρία μεγέθη α, β, γ και άλλα τρία $\delta, \varepsilon, \zeta$, τα οποία βρίσκονται σε τεταραγμένη αναλογία, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$



και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ (Σχ. 23), θα αποδείξουμε ότι:

Σχήμα 23

αν $\alpha > \gamma$, τότε $\delta > \zeta$

ή

αν $\alpha = \gamma$, τότε $\delta = \zeta$

ή

αν $\alpha < \gamma$, τότε $\delta < \zeta$

Αν $\alpha > \gamma$, τότε σύμφωνα με τη πρόταση 8 έχουμε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta}$. Όμως

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\zeta} \text{ και } \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon} \text{ ή (πόρισμα πρότασης 7) } \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\delta}, \text{ οπότε η προηγούμενη}$$

σχέση γίνεται $\frac{\varepsilon}{\zeta} > \frac{\varepsilon}{\delta}$ και σύμφωνα με την πρόταση 10 θα ισχύει $\zeta < \delta$.

Έτσι αποδείξαμε ότι αν $\alpha > \gamma$, τότε και $\delta > \zeta$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν $\alpha = \gamma$, τότε και $\delta = \zeta$, καθώς και αν $\alpha < \gamma$, τότε και $\delta < \zeta$.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλιο

Η πρόταση αυτή στη σύγχρονη ορολογία αποδίδεται και ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ μεγέθη για τα οποία ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$, τότε

- i) αν $\alpha > \gamma$ είναι και $\delta > \zeta$
- ii) αν $\alpha = \gamma$ είναι και $\delta = \zeta$
- iii) αν $\alpha < \gamma$ είναι και $\delta < \zeta$.

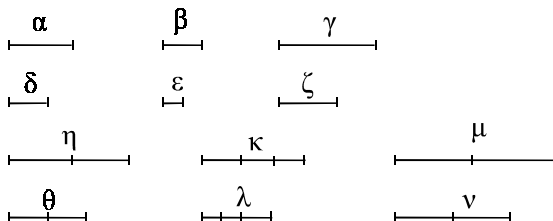
Πρόταση 22 (V. 22)

Αν υπάρχουν δύο ομάδες μεγεθών ίσου πλήθους, έτσι ώστε λαμβανόμενα ανά δύο να έχουν τον ίδιο λόγο, τότε οι δι' ίσου λόγοι είναι ίσοι.

Απόδειξη

Έστω τρία μεγέθη α, β, γ (Σχ. 24) και άλλα τρία τα $\delta, \varepsilon, \zeta$, για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

Θα αποδείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$.



Σχήμα 24

Θεωρούμε τα μεγέθη $\eta = \rho\alpha$, $\theta = \rho\delta$ ίσες φορές πολλαπλάσια των α , δ , καθώς επίσης τα μεγέθη $\kappa = \sigma\beta$, $\lambda = \sigma\epsilon$ άλλα τυχόντα ίσες φορές πολλαπλάσια των β , ϵ και τέλος τα μεγέθη $\mu = \tau\gamma$, $\nu = \tau\zeta$ άλλα τυχόντα ίσες φορές πολλαπλάσια των γ , ζ .

$$\text{Επειδή } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\epsilon} \text{ θα ισχύει } \frac{\eta}{\kappa} = \frac{\theta}{\lambda} \quad (\text{πρόταση 4}).$$

$$\text{Για τον ίδιο ακριβώς λόγο θα ισχύει και } \frac{\kappa}{\mu} = \frac{\lambda}{\nu}.$$

Επειδή λοιπόν υπάρχουν τρία μεγέθη η , κ , μ και άλλα τρία τα θ , λ , ν , τα οποία λαμβανόμενα ανά δύο έχουν ίσους λόγους, σύμφωνα με τη πρόταση 20, αν $\eta \gtrless \mu$ τότε συγχρόνως και $\theta \gtrless \nu$ ή αν $\rho\alpha \gtrless \tau\gamma$, τότε συγχρόνως $\rho\delta \gtrless \tau\zeta$, που σημαίνει ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$ (ορισμός 5)

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Με σύγχρονη ορολογία η παραπάνω πρόταση διατυπώνεται ως εξής:

Έστω τα μεγέθη α , β , γ , δ , ϵ , ζ , για τα οποία ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\epsilon}$ και

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\epsilon}{\zeta}. \text{ Τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta} \quad (\text{τεταγμένη αναλογία})$$

Η πρόταση αυτή αποτελεί απόδειξη του ορισμού 17. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό και σύμφωνα με την πρόταση 22, αν δοθούν δύο γεωμετρικές ακολουθίες με το ίδιο πλήθος όρων η κάθε μία, για παράδειγμα οι ακολουθίες:

$$\begin{aligned} &\alpha, \alpha\kappa, \alpha\kappa\lambda, \alpha\kappa\lambda\mu \\ &\beta, \beta\kappa, \beta\kappa\lambda, \beta\kappa\lambda\mu \end{aligned}$$

για τις οποίες να ισχύει

$$\frac{\alpha}{\alpha\kappa} = \frac{\beta}{\beta\kappa} \quad (1)$$

$$\frac{\alpha\kappa}{\alpha\kappa\lambda} = \frac{\beta\kappa}{\beta\kappa\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{\alpha \kappa \lambda}{\alpha \kappa \lambda \mu} = \frac{\beta \kappa \lambda}{\beta \kappa \lambda \mu} \quad (3)$$

τότε με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1), (2), (3) κατά μέλη προκύπτει

η σχέση $\frac{\alpha}{\alpha \kappa \lambda \mu} = \frac{\beta}{\beta \kappa \lambda \mu}$ που λέγεται **"δι' ίσου λόγος"**.

Επειδή ο Ευκλείδης περιλαμβάνει και την περίπτωση κατά την οποία οι όροι των κλασμάτων μπορεί να είναι ασύμμετροι αριθμοί, στη πρόταση 22 αποδεικνύει το **"δι' ίσου λόγος"**.

Σε κάποιο χειρόγραφο των *Στοιχείων* ο **"δι' ίσου λόγος"** του ορισμού 17 ονομάζεται **τεταγμένη αναλογία**. (Έκδοση *Στοιχείων* J. L. Heiberg, Τόμος II σελίδα 7)

Είναι πολύ πιθανόν η ονομασία αυτή να είναι γνήσια και αυτό γιατί ο Ευκλείδης ήθελε να διακρίνει τη σχέση του ορισμού 18 που την ονόμασε **τεταραγμένη αναλογία**.

Ο όρος **"δι' ίσου λόγος"** συναντάται σε 17 προτάσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη οι οποίες είναι οι εξής:

Βιβλίο V: 22, 23, 24 (δύο φορές)

Βιβλίο VI: 4, 20 (δύο φορές), 22, 23, 24.

Βιβλίο VII: 14

Βιβλίο VIII: 1, 5, 6, 8, 13, 21.

Βιβλίο IX: 19, 36 (δύο φορές)

Στις 15 από αυτές (εκτός της πρότασης 23 του πέμπτου και της πρότασης 14 του έβδομου βιβλίου), αφού δίνονται δύο γεωμετρικές ακολουθίες με το ίδιο πλήθος όρων η κάθε μία, για παράδειγμα έστω οι ακολουθίες τριών όρων:

$$\begin{array}{c} \alpha, \beta, \gamma \\ A, B, \Gamma \end{array}$$

$$\text{με } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B} = \rho \text{ και } \frac{\beta}{\gamma} = \frac{B}{\Gamma} = \lambda,$$

συμπεραίνεται **"δι' ίσου"** ότι είναι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{A}{\Gamma}$.

Στην πρόταση 23 του 5^{ου} βιβλίου δίνονται δύο ακολουθίες με 3 όρους η κάθε μία, δηλαδή δίνονται οι ακολουθίες: α, β, γ
 A, B, Γ

για τις οποίες ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{B}{\Gamma} = \kappa$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{A}{B} = \lambda$ και συμπεραίνεται ότι

οι "δι' ίσων" λόγοι θα είναι ίσοι, δηλαδή $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{A}{\Gamma}$.

Εκτός από τις προτάσεις 22, 23 και VII.14 στις οποίες αποδεικνύεται πότε οι "δι' ίσων" λόγοι είναι ίσοι, στα υπόλοιπα θεωρήματα γίνεται απλά εφαρμογή του όρου "δι' ίσων".

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ο όρος "δι' ίσων" σημαίνει ότι σχηματίζονται οι λόγοι των άκρων όρων των δύο ακολουθιών που δόθηκαν.

Η πρόταση 22 έχει μαθηματικό ενδιαφέρον το οποίο έγκειται στο γεγονός (που φαίνεται και στην απόδειξή της) ότι μπορεί να γενικευτεί για οσοδήποτε πλήθος ζευγών.

Πρόταση 23 (V. 23)

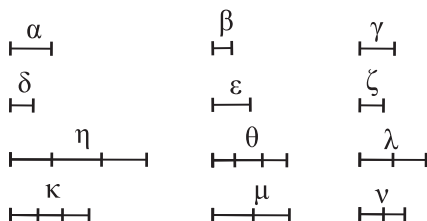
Αν υπάρχουν δύο ομάδες μεγεθών από τρία μεγέθη η κάθε μία, τα οποία αν λαμβάνονται ανά δύο έχουν τον ίδιο λόγο και η αναλογία τους είναι τεταραγμένη, τότε δι' ίσων θα έχουν τον ίδιο λόγο.

Απόδειξη

Έστω τρία μεγέθη α, β, γ σε τεταραγμένη αναλογία με τα $\delta, \varepsilon, \zeta$ (Σχ. 25). Άρα ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}.$$

Παίρνουμε τα η, θ, κ ίσα, πολλαπλάσια των α, β, δ , δηλαδή $\eta = \sigma\alpha, \theta = \sigma\beta, \kappa = \sigma\delta$, καθώς και τα λ, μ, ν άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των $\gamma, \varepsilon, \zeta$, δηλαδή $\lambda = \rho\gamma, \mu = \rho\varepsilon, \nu = \rho\zeta$.



Σχήμα 25

Αφού πήραμε $\eta = \sigma\alpha$, $\theta = \sigma\beta$, σύμφωνα με την πρόταση 15 θα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta}{\theta}$. Ομοίως από τις $\mu = \rho\epsilon$, $\nu = \rho\zeta$ θα ισχύει: $\frac{\epsilon}{\zeta} = \frac{\mu}{\nu}$. Όμως από την υπόθεση έχουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\epsilon}{\zeta}$, οπότε, σύμφωνα με τη πρόταση 11, θα ισχύει $\frac{\eta}{\theta} = \frac{\mu}{\nu}$.

Αφού πήραμε $\theta = \sigma\beta$, $\kappa = \sigma\delta$, θα έχουμε (πρόταση 15) $\frac{\beta}{\delta} = \frac{\theta}{\kappa}$.

Από την υπόθεση έχουμε $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\epsilon}$, άρα (πρόταση 16) $\frac{\beta}{\delta} = \frac{\gamma}{\epsilon}$, οπότε έχουμε (πρόταση 11)

$$\frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{\theta}{\kappa} \quad (1)$$

Αφού πήραμε $\lambda = \rho\gamma$, $\mu = \rho\epsilon$, θα έχουμε (πρόταση 15)

$$\frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), σύμφωνα με την πρόταση 11, ισχύει $\frac{\theta}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu}$.

Άρα (πρόταση 16) $\frac{\theta}{\lambda} = \frac{\kappa}{\mu}$.

Επομένως αποδείξαμε ότι για τα τρία μεγέθη η , θ , λ και τα αντίστοιχα κ , μ , ν ισχύει: $\frac{\eta}{\theta} = \frac{\mu}{\nu}$ και $\frac{\theta}{\lambda} = \frac{\kappa}{\mu}$.

Άρα (ορισμός 18) η αναλογία αυτών είναι τεταραγμένη.

Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 21, ισχύει:

- αν $\eta > \lambda$, τότε $\kappa > \nu$
- αν $\eta = \lambda$, τότε $\kappa = \nu$
- αν $\eta < \lambda$, τότε $\kappa < \nu$

και επειδή έχουμε πάρει: $\eta = \sigma\alpha$, $\kappa = \sigma\delta$, $\lambda = \rho\gamma$, $\nu = \rho\zeta$, θα ισχύει:

- αν $\sigma\alpha > \rho\gamma$, τότε $\sigma\delta > \rho\zeta$
- αν $\sigma\alpha = \rho\gamma$, τότε $\sigma\delta = \rho\zeta$
- αν $\sigma\alpha < \rho\gamma$, τότε $\sigma\delta < \rho\zeta$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό 5, έχουμε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλιο

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ είναι μεγέθη για τα οποία ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ και

$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$, τότε ισχύει: $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$ (τεταραγμένη αναλογία).

Πρόταση 24 (V. 24)

Αν ένα πρώτο μέγεθος προς ένα δεύτερο έχει τον ίδιο λόγο που έχει ένα τρίτο προς ένα τέταρτο μέγεθος και ένα πέμπτο μέγεθος προς το δεύτερο έχει τον ίδιο λόγο που έχει ένα έκτο μέγεθος προς το τέταρτο, τότε το άθροισμα του πρώτου και του πέμπτου προς το δεύτερο θα έχει τον ίδιο λόγο που έχει το άθροισμα του τρίτου και του έκτου προς το τέταρτο.

Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη AB, γ, ΔΕ, δ, ΒΗ και ΕΘ με τη σειρά που δίνονται (Σχ. 26) και για τα οποία ισχύει:

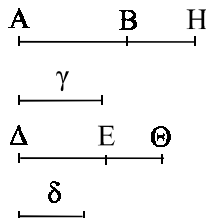
$$\frac{AB}{\gamma} = \frac{\Delta E}{\delta} \quad \text{και} \quad \frac{BH}{\gamma} = \frac{E\Theta}{\delta}.$$

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{AB+BH}{\gamma} = \frac{\Delta E+E\Theta}{\delta} \quad \text{ή} \quad (\text{από το σχήμα})$$

$$\frac{AH}{\gamma} = \frac{\Delta\Theta}{\delta}.$$

Επειδή $\frac{BH}{\gamma} = \frac{E\Theta}{\delta}$ θα ισχύει και $\frac{\gamma}{BH} = \frac{\delta}{E\Theta}$.



Σχήμα 26

$$\text{Όμως } \frac{AB}{\gamma} = \frac{\Delta E}{\delta} \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{BH} = \frac{\delta}{E\Theta}.$$

Οπότε, με εξαίρεση των μέσων όρων έχουμε $\frac{AB}{BH} = \frac{\Delta E}{E\Theta}$.

Σύμφωνα με την πρόταση 18, από την τελευταία αναλογία έχουμε

$$\frac{AB + BH}{BH} = \frac{\Delta E + E\Theta}{E\Theta} \quad \text{ή} \quad \frac{AH}{BH} = \frac{\Delta\Theta}{E\Theta} \quad \text{και επειδή}$$

$$\frac{BH}{\gamma} = \frac{E\Theta}{\delta}, \text{ με εξαίρεση των μέσων όρων (δι' ίσου λόγος) έχουμε}$$

$$\frac{AH}{\gamma} = \frac{\Delta\Theta}{\delta}.$$

ὅ.ξ.δ.

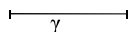
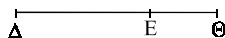
Σχόλια

Η πρόταση αυτή αποδίδεται και ως εξής:

Έστω τα μεγέθη AB , γ , ΔE , δ , BH και

$E\Theta$ (Σχ. 27), για τα οποία ισχύει: $\frac{AB}{\gamma} = \frac{\Delta E}{\delta}$

και $\frac{BH}{\gamma} = \frac{E\Theta}{\delta}$. Τότε $\frac{AH}{\gamma} = \frac{\Delta\Theta}{\delta}$.



Σχήμα 27

Η τελευταία πρόταση χρησιμοποιείται συχνά στα *Στοιχεία*. Αν θεωρήσουμε αριθμούς και όχι μεγέθη γενικά, στην ειδική περίπτωση που οι παρονομαστές είναι ίσοι, έχουμε τον κανόνα της πρόσθεσης κλασμάτων. Βέβαια, αυτό δεν είναι απαραίτητο, γιατί όπως ήδη έχει αποδειχθεί, μπορούμε να αντικαταστήσουμε ένα κλάσμα με ίσο του που έχει δοθέντα παρονομαστή.

Τέλος, αν αντί της πρότασης 18 χρησιμοποιούσαμε την πρόταση 17, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την πράξη της αφαίρεσης κλασμάτων, πράγμα που ο Ευκλείδης θεωρεί αυτονόητο.

Πρόταση 25 (V. 25)

Αν τέσσερα μεγέθη βρίσκονται σε αναλογία, τότε το άθροισμα του μεγαλύτερου και του μικρότερου από αυτά είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των δύο άλλων.

Απόδειξη

Έστω τα ανάλογα μεγέθη AB, ΓΔ, ε, ζ με

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} \text{ και έστω το } AB \text{ μέγιστο. Τότε κατ' ανά-}$$

γκην (πρόταση 14) θα είναι το ζ ελάχιστο (Σχ. 28).

Θα αποδείξουμε ότι $AB + \zeta > \Gamma\Delta + \varepsilon$.

Παίρνουμε τα $AH = \varepsilon$ και $\Gamma\Theta = \zeta$.

Άρα η αναλογία $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ γράφεται $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AH}{\Gamma\Theta}$ και σύμφωνα με

την πρόταση 19 ισχύει: $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AB - AH}{\Gamma\Delta - \Gamma\Theta}$ ή $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{HB}{\Theta\Delta}$.

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 16, θα ισχύει: $\frac{AB}{HB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Theta\Delta}$.

Αφού $\frac{AB}{HB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Theta\Delta}$ και έχουμε (από υπόθεση) ότι $AB > \Gamma\Delta$, θα ισχύει (πρόταση 14) και

$$HB > \Theta\Delta \quad (1).$$

Έχουμε πάρει $AH = \varepsilon$ και $\Gamma\Theta = \zeta$, οπότε

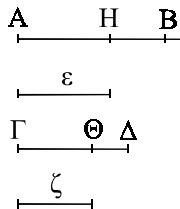
$$AH + \zeta = \Gamma\Theta + \varepsilon \quad (2)$$

Και επειδή, αν σε άνισα μεγέθη προστεθούν ίσα, τότε αυτά παραμένουν ομοίως άνισα, από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$HB + AH + \zeta > \Theta\Delta + \Gamma\Theta + \varepsilon.$$

Άρα $AB + \zeta > \Gamma\Delta + \varepsilon$.

Ὡς.δ.



Σχήμα 28

Σχόλια

Αν α, β, γ, δ είναι τέσσερα μεγέθη με μεγαλύτερο το α και ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ τότε } \alpha + \delta > \beta + \gamma.$$

Στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης υποθέσαμε ότι το μέγεθος

AB είναι το μεγαλύτερο, οπότε κατ’ ανάγκην το ζ είναι το μικρότερο. Σε περίπτωση που το μέγεθος $\Gamma\Delta$ θεωρηθεί ως μεγαλύτερο, τότε κατ’ ανάγκην το ε είναι το μικρότερο. Έτσι, με εναλλαγή των μέσων όρων (πρόταση 16) ισχύουν και πάλι τα παραπάνω.

Με τη πρόταση αυτή ο Ευκλείδης αποδεικνύει και το εξής:

Ο αριθμητικός μέσος δύο άνισων αριθμών είναι μεγαλύτερος από το γεωμετρικό μέσο των αριθμών αυτών.

Πράγματι, αν AB, $\Gamma\Delta$, ε , ζ είναι τα τέσσερα μεγέθη που διαπραγματεύεται η πρόταση και υποθέσουμε ότι $\Gamma\Delta = \varepsilon$, τότε προκύπτει:

$$AB + \zeta > \varepsilon + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{AB + \zeta}{2} > \varepsilon.$$

Όμως, το μέγεθος $\frac{AB + \zeta}{2}$ είναι ο αριθμητικός μέσος των AB και ζ .

Η αναλογία που ισχύει στην υπόθεση, όταν $\Gamma\Delta = \varepsilon$ γράφεται $\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, που σημαίνει ότι το ε είναι ο γεωμετρικός μέσος των AB, ζ .

Κεφάλαιο 6

BIBΛΙΟ VI

Η ομοιότητα ευθύγραμμων σχημάτων

1. Εισαγωγή

Το βιβλίο VI περιλαμβάνει 5 ορισμούς και 33 προτάσεις.

Συνεχίζοντας τις εφαρμογές της θεωρίας των εμβადών που εισάγει στο βιβλίο I και αναπτύσσει στο βιβλίο II, ο Ευκλείδης στο βιβλίο VI εφαρμόζει στα ευθύγραμμα τμήματα αρχικά τη θεωρία των αναλογιών του βιβλίου V. Επίσης, εισάγει την έννοια της ομοιότητας τριγώνων και πολυγώνων. Ασχολείται με κάθε είδους εφαρμογή που απορρέει από την ομοιότητα ευθύγραμμων σχημάτων, όπως οι αναλογίες τμημάτων, αναλογίες εμβადών, κατασκευές τριγώνων ή πολυγώνων τα οποία είναι όμοια προς κάποιο δεδομένο τρίγωνο ή πολύγωνο και επιπλέον πληρούν κάποιες αλγεβρικές συνθήκες. Έτσι, το βιβλίο VI μπορεί να θεωρηθεί ως φυσική επέκταση των βιβλίων I, II και V των "Στοιχείων".

Το βασικό εργαλείο του βιβλίου είναι οι προτάσεις 1 και 2.

Η πρόταση 1 αναφέρεται σε τρίγωνα ή παραλληλόγραμμα, τα οποία, όταν έχουν ίσα ύψη, οι λόγοι των εμβადών προς τις αντίστοιχες βάσεις είναι ίσοι.

Στην πρόταση 2 αποδεικνύεται ότι: *Αν ευθεία τέμνει δύο πλευρές τριγώνου και είναι παράλληλη προς την τρίτη, τότε χωρίζει τις δύο πλευρές του τριγώνου σε μέρη ανάλογα και αντιστρόφως.*

Η παραπάνω πρόταση στα σύγχρονα εγχειρίδια της Γεωμετρίας δίνεται ως εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, όμως ο Ευκλείδης αποδεικνύει την πρόταση 2 με τη χρήση της έννοιας *εμβαδόν* και με τη βοήθεια της βασικής πρότασης 1.

Οι περισσότεροι ιστορικοί (βλέπε π.χ. B. Artmann [6], σελ. 135) διαιρούν το βιβλίο VI σε οκτώ ενότητες:

Η πρώτη ενότητα περιλαμβάνει τη **βασική πρόταση 1**.

Η δεύτερη ενότητα με τίτλο "**Διαιρέσεις τμημάτων σε μέρη ανάλογα**", αποτελείται από τις προτάσεις 2 μέχρι 8, εκ των οποίων η 3^η είναι το γνωστό **Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου**, ενώ οι υπόλοιπες προτάσεις ουσιαστικά αποτελούν κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

Η τρίτη ενότητα με τίτλο "**Γεωμετρικές κατασκευές τμημάτων**", αποτελείται από τις προτάσεις 9 μέχρι 13. Στις προτάσεις αυτές κατασκευάζονται με χρήση γνωστών αναλογιών, ευθύγραμμα τμήματα που ικανοποιούν κάποια αλγεβρική σχέση με άλλα δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα. Τέτοιες περιπτώσεις είναι η κατασκευή της τρίτης αναλόγου ή της μέσης αναλόγου δύο δοθέντων τμημάτων και η κατασκευή της τετάρτης αναλόγου τριών δοθέντων τμημάτων.

Η τετάρτη ενότητα με τίτλο "**Αναλογίες εμβαδών**", αποτελείται από τις προτάσεις 14 μέχρι 17. Στις προτάσεις 14 και 15 μελετώνται αναλογίες πλευρών ισεμβαδικών και ισογωνίων παραλληλογράμμων ή ισεμβαδικών τριγώνων που έχουν και μία γωνία τους ίση. Στις προτάσεις 16 και 17 συγκρίνονται τα εμβαδά δύο ορθογωνίων, εκ των οποίων το ένα έχει διαδοχικές πλευρές τους άκρους όρους μιας αναλογίας, ενώ το άλλο έχει διαδοχικές πλευρές τους μέσους όρους της αναλογίας.

Η πέμπτη ενότητα με τίτλο "**Όμοια ευθύγραμμα σχήματα**", αποτελείται από τις προτάσεις 18 μέχρι 22. Το κοινό για τις παραπάνω προτάσεις είναι ότι αναφέρονται σε όμοια ευθύγραμμα σχήματα (τρίγωνα ή πολύγωνα).

Η έκτη ενότητα περιλαμβάνει μόνο την πρόταση 23, που αναφέρεται σε **σύνθετο λόγο**.

Δεδομένου ότι και οι προτάσεις 19 και 20 αναφέρονται στο λόγο των εμβαδών δύο ομοίων τριγώνων και τετραπλεύρων αντιστοίχως, κρίνουμε σκόπιμο να συμπεριλάβουμε και την πρόταση 23 στην ενότητα

αυτή. Ωστόσο, κατά τη γνώμη μας, καταλληλότερη επιλογή για την τοποθέτηση της πρότασης 23 θα ήταν η τέταρτη ενότητα.

Η έβδομη ενότητα με τίτλο "*Εφαρμογές των εμβαδών*" (Γεωμετρική Άλγεβρα), αποτελείται από τις προτάσεις 24 μέχρι 30. Οι παραπάνω προτάσεις αναφέρονται σε γεωμετρικές κατασκευές που αφορούν διαφορές ή αθροίσματα εμβαδών, όπως και στη διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο.

Η όγδοη ενότητα με τίτλο "*Δύο γενικές προτάσεις*", αποτελείται από τις προτάσεις 32 και 33. Είναι προτάσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους, οι οποίες είναι γενικού ενδιαφέροντος, χωρίς να μπορούν να ενταχθούν σε καμία από τις προηγούμενες ενότητες.

Εμείς στην έκδοση αυτή διαιρούμε το βιβλίο VI σε έξι ενότητες:

Την πρώτη ενότητα αποτελεί η *βασική πρόταση 1*.

Τη δεύτερη με τίτλο "*ομοιότητα τριγώνων*" αποτελούν οι προτάσεις 2 – 8.

Η τρίτη ενότητα με τίτλο "*διαίρεση τμημάτων σε μέρη με δοθέντα λόγο*" περιέχει τις προτάσεις 9 μέχρι και 13.

Στην τέταρτη ενότητα, που έχει τίτλο "*όμοια ευθύγραμμα σχήματα*", ανήκουν οι προτάσεις 18-25.

Στην πέμπτη ενότητα με τίτλο "*γεωμετρική Άλγεβρα*" έχουμε συμπεριλάβει τις προτάσεις 26-31 και

Στην έκτη ενότητα παρουσιάζουμε τις *δύο γενικές προτάσεις* 32 και 33.

2. Ορισμοί

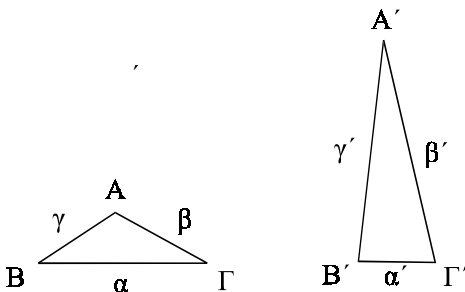
1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα είναι όσα έχουν

α) τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και

β) τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες.

2. Δύο ευθύγραμμα σχήματα είναι αντιστρόφως ανάλογα, όταν σε καθένα από αυτά υπάρχουν ηγούμενοι και επόμενοι όροι.

Ο ορισμός αυτός, σχετικά με τους ηγούμενους και τους επόμενους όρους, αναφέρεται στους λόγους των πλευρών των σχημάτων.



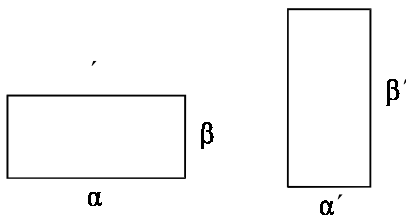
Σχήμα 1

Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' (Σχ.1) ισχύουν οι ισότητες:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma},$$

τότε αυτά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

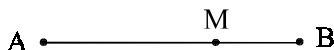
Ομοίως, αν για τα ορθογώνια του σχήματος 2 ισχύει η ισότητα: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\beta}$, τότε αυτά είναι αντιστρόφως ανάλογα.



Σχήμα 2

3. Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει χωριστεί σε μέσο και άκρο λόγο, όταν από ένα σημείο του έχει χωριστεί σε δύο τμήματα, έτσι ώστε ο λόγος του τμήματος προς το μεγαλύτερο από τα δύο τμήματα είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα.

Το σημείο M του ευθύγραμμου τμήματος AB (Σχ. 3) υποδιαιρεί το τμήμα AB σε μέσο και άκρο λόγο, αν ισχύει η ισότητα



Σχήμα 3

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$$

4. *Ύψος κάθε σχήματος είναι η κάθετος που άγεται από την κορυφή προς τη βάση.*
5. *Ένας λόγος λέμε ότι αποτελείται από λόγους, όταν οι λόγοι αυτοί πολλαπλασιαζόμενοι μεταξύ τους σχηματίζουν λόγο.*

Σχόλια

Ο ορισμός 1 παρατίθεται από τον Αριστοτέλη, (*Αναλυτικά Ύστερα*, B17. 99a 13-14), ο οποίος αναφέρει ότι η ομοιότητα σχημάτων συνίσταται ίσως στο να έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες τους ίσες. Η χρησιμοποίηση της λέξης "*ίσως*", κατά τον Heiberg [87] παραπέμπει στο ότι την εποχή του Αριστοτέλη ο ορισμός αυτός δεν είχε καθιερωθεί σε εγχειρίδια Γεωμετρίας.

Σύμφωνα με τον van Swinden [83] (*Elements of Geometry*", έκδοση του Jacobi, 1834), ο Ευκλείδης παραλείπει να παραθέσει ένα ουσιώδες κομμάτι του ορισμού, το ότι "*οι αντίστοιχες ανάλογες πλευρές πρέπει να είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες*". Είναι αναγκαίο, σύμφωνα με το συγγραφέα, οι αντίστοιχες πλευρές να ακολουθούν την ίδια σειρά στα δύο ευθύγραμμα σχήματα. Έχουμε ωστόσο αναφέρει και προηγουμένως ότι ο Ευκλείδης δεν ασχολούνταν με λεπτομέρειες προφανείς.

Είναι βέβαιο ότι για την ομοιότητα ευθύγραμμων σχημάτων πρέπει να καθοριστεί η σειρά των αντίστοιχων πλευρών και γωνιών. Πιστεύουμε όμως ότι και η παράθεση *«των αντίστοιχων αναλόγων πλευρών απέναντι από τις ίσες γωνίες»* δεν επιλύει το πρόβλημα της διάταξης των ίσων γωνιών και των αναλόγων πλευρών.

Μόνο στα τρίγωνα υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ γωνιών και απέναντι πλευρών. Στα τετράπλευρα και στα πολύγωνα γενικότερα, απέναντι από μία γωνία τους δεν υπάρχει μία μόνο απέναντι πλευρά, αλλά μπορούν να θεωρηθούν ως απέναντι πλευρές όλες οι άλλες, εκτός εκείνων που περιέχουν τη γωνία.

Σύμφωνα με τον Heath [83], για τον ορισμό 2 δεν μπορεί να αποδοθεί μία εύλογη ερμηνεία, γιατί πρέπει να υπάρχουν και ηγούμενοι και επόμενοι όροι στα αντιστρόφως ανάλογα σχήματα.

Πιστεύουμε ότι ο ορισμός αυτός σχετικά με τους γηγόμενους και τους επόμενους όρους αναφέρεται στους λόγους των πλευρών των σχημάτων, όπως ακριβώς σημειώνουμε στην επεξήγηση αμέσως μετά τον ορισμό 2.

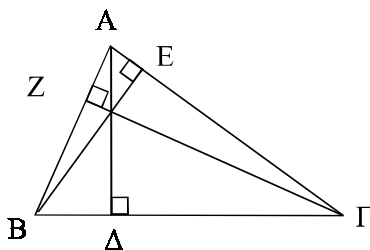
Κατά τον Heath, ο ορισμός 2 δεν έχει ποτέ χρησιμοποιηθεί. Ακόμη και στις προτάσεις 14, 15, XI. 34, όπου εμφανίζονται τρίγωνα και παραλληλόγραμμα με την εν λόγω ιδιότητα, αυτά δεν αναφέρονται ως αντιστρόφως ανάλογα, αλλά ως τρίγωνα ή παραλληλόγραμμα των οποίων οι πλευρές είναι αντιστρόφως ανάλογες. Ο Heath θεωρεί επίσης, ότι ο Simpson έχει δίκιο που πιστεύει ότι ο ορισμός αυτός ανήκει στον Ήρωνα και όχι στον Ευκλείδη.

Ο Αριστοτέλης δε φαίνεται να γνωρίζει την έννοια "ύψος" με τη μαθηματική της σημασία. Χρησιμοποιεί τον όρο "κάθετος" του τριγώνου ["Μετεωρολογικά" III. 3]

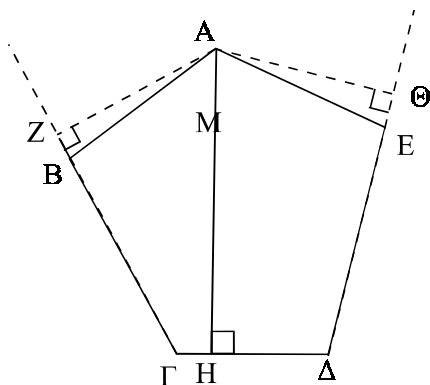
Ο ορισμός αυτός είναι σαφής για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, όπου ορίζονται συνολικά τρία ύψη, ένα από κάθε κορυφή (Σχ. 4). Επίσης, όταν πρόκειται για κυρτό $(2n+1)$ -γωνο $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$, ως ύψος από την κορυφή A_1 θεωρούμε το κάθετο τμήμα στην "απέναντι" πλευρά

$A_{n+1}A_{n+2}$. Π.χ. στο κυρτό 5-γωνο $AB\Gamma\Delta E$ (Σχ. 5) ύψος από την κορυφή A είναι το τμήμα AH , που είναι κάθετο στην $\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A μπορούμε να φέρουμε τα ύψη AZ , AH και $A\Theta$.

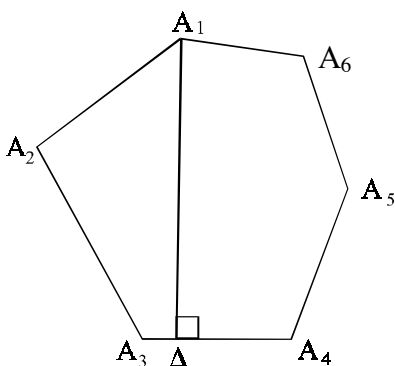
Αν το πολύγωνο είναι κυρτό $2n$ -γωνο $A_1A_2 \dots A_n$, τότε ως ύψος από το A_1 ορίζεται το κάθετο τμήμα από το A_1 στην πλευρά A_nA_{n+1} . Π.χ. στο κυρτό εξάγωνο $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, ύψος από την κορυφή A_1 είναι το τμήμα $A_1\Delta$, που είναι το κάθετο στην πλευρά A_3A_4 κ.λπ.



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι, αν πρόκειται να υπολογίσουμε εμβαδά πολυγώνων, αφού τα υποδιαιρέσουμε σε τρίγωνα με τις διαγωνίους που άγονται από μία κορυφή, είναι ανάγκη να θεωρήσουμε ύψη μόνο στα τρίγωνα που προκύπτουν.

Οι ορισμοί 4 και 5 δεν υπάρχουν στη μετάφραση του Campanus [83] από τα Αραβικά. Όμως και στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη δεν υπάρχει αναφορά στον ορισμό 5 ούτε και στην πρόταση 23 του βιβλίου VI, όπου εμφανίζεται για πρώτη φορά η έννοια του *σύνθετου λόγου*, ούτε και κάπου αλλού. Επίσης, ο ορισμός 5 δεν αναφέρεται από τους άλλους μεγάλους Γεωμέτρους της αρχαιότητας, όπως για παράδειγμα από τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο.

Ο ορισμός 5 αναφέρεται μόνο σε δύο περιπτώσεις:

- (i) Στο απόσπασμα του Ευτόκιου, όπου σχολιάζει τον ορισμό αυτό. Σύμφωνα με τον Ευτόκιο [83] ("*Αρχιμήδης*"), ο όρος "*πηλικότης*" προφανώς χρησιμοποιείται "*για τους αριθμούς από τους οποίους ο λόγος ονομάζεται*".
- (ii) Στα σχόλια που κάνει ο Θέων πάνω στη "*Σύνταξη*" του Πτολεμαίου.

Σύμφωνα με τον Heath, ο ορισμός 5 είναι προβληματικός, αφού αναφέρεται σε "*πηλικότητες*" των λόγων οι οποίες πολλαπλασιάζονται με τον εαυτό τους, έχουμε δηλαδή μία πράξη άγνωστη στη Γεωμετρία.

3. Η βασική πρόταση

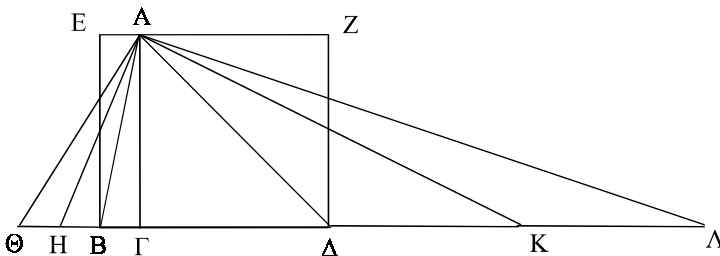
Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνεται η παρακάτω βασική πρόταση, η οποία, όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, αποτελεί το θεμέλιο λίθο για ολόκληρο το οικοδόμημα του βιβλίου, αφού οι περισσότερες από τις προτάσεις που ακολουθούν στηρίζονται σ’ αυτήν.

Πρόταση 1 (VI. 1)

Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα οποία έχουν το ίδιο ύψος, έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το λόγο των βάσεων.

Απόδειξη

Έστω τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ και τα παραλληλόγραμμα $AGBE$, $AG\Delta Z$, τα οποία έχουν όλα το ίδιο ύψος AG (Σχ. 7). Θα αποδείξουμε ότι ο λόγος της βάσης $B\Gamma$ προς τη βάση $\Gamma\Delta$ ισούται με το λόγο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ προς το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma\Delta$, καθώς επίσης και με το λόγο του εμβαδού του παραλληλογράμμου $AGBE$ προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AG\Delta Z$.



Σχήμα 7

Προεκτείνουμε τη $B\Delta$ προς τα δύο μέρη της και παίρνουμε προς το μέρος της βάσης $B\Gamma$ τμήματα BH , $H\Theta$ ίσα προς αυτήν, ενώ προς το μέρος της βάσης $\Gamma\Delta$ παίρνουμε τμήματα ΔK , $K\Lambda$ ίσα προς αυτήν. Στη συνέχεια φέρουμε τις AH , $A\Theta$, AK και $A\Lambda$. Επειδή είναι $\Gamma B = BH = H\Theta$, θα είναι και $(A\Theta H) = (AHB) = (AB\Gamma)$ [πρόταση I. 38]. Άρα θα έχουμε

$$\frac{\Theta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{(A\Theta\Gamma)}{(AB\Gamma)}.$$

$$\text{Ομοίως θα έχουμε και } \frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\Delta} = \frac{(\Lambda\Gamma\Lambda)}{(\Lambda\Gamma\Delta)}.$$

Αν είναι $\Theta\Gamma = \Gamma\Lambda$, τότε θα είναι και $(\Lambda\Theta\Gamma) = (\Lambda\Gamma\Lambda)$.

Αν είναι $\Theta\Gamma > \Gamma\Lambda$, τότε $(\Lambda\Theta\Gamma) > (\Lambda\Gamma\Lambda)$ και αν είναι $\Theta\Gamma < \Gamma\Lambda$, τότε $(\Lambda\Theta\Gamma) < (\Lambda\Gamma\Lambda)$.

Επειδή θεωρήσαμε τα τμήματα $\Theta\Gamma$ και $\Gamma\Lambda$ ίσες φορές πολλαπλάσια των βάσεων $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$, έπεται ότι θα ισχύει (πρόταση V. 11):

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{(\Lambda B\Gamma)}{(\Lambda\Gamma\Delta)}$$

Επειδή τα παραλληλόγραμμα $\Lambda\Gamma B E$, $\Lambda\Gamma\Delta Z$ έχουν διπλάσιο εμβαδόν από τα τρίγωνα $\Lambda B\Gamma$, $\Lambda\Gamma\Delta$ αντίστοιχα [πρόταση I. 34], θα έχουμε:

$$\frac{(\Lambda\Gamma B E)}{(\Lambda\Gamma\Delta Z)} = \frac{(\Lambda B\Gamma)}{(\Lambda\Gamma\Delta)}$$

$$\text{οπότε (πρόταση V.11)} \quad \frac{(\Lambda\Gamma B E)}{(\Lambda\Gamma\Delta Z)} = \frac{(\Lambda B\Gamma)}{(\Lambda\Gamma\Delta)} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Σύμφωνα με τον Πρόκλο [66], το να έχουν δύο τρίγωνα ή παραλληλόγραμμα το ίδιο ύψος είναι το ίδιο ακριβώς με το να βρίσκονται μέσα στις ίδιες παράλληλες ευθείες.

Ο Legendre και οι νεότεροι συγγραφείς που τον ακολουθούν υποδιαιρούν τις αποδείξεις τους για την πρόταση 1 σε δύο μέρη, εκ των οποίων το πρώτο αναφέρεται σε σύμμετρα μεγέθη και στη συνέχεια το δεύτερο επεκτείνεται σε ασύμμετρα μεγέθη.

Ένα προφανές πόρισμα της πρότασης 1 είναι το εξής:

Πόρισμα

"Τρίγωνα ή παραλληλόγραμμα που έχουν ίσες βάσεις έχουν λόγο εμβαδών ίσον προς το λόγο των υψών τους".

4. Ομοιότητα τριγώνων

Στην ενότητα αυτή έχουμε συμπεριλάβει τις προτάσεις 2 μέχρι 8, οι οποίες στη σύγχρονη βιβλιογραφία θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

Σημαντική και ενδιαφέρουσα είναι η πρόταση 3, η οποία στη σύγχρονη βιβλιογραφία είναι γνωστή ως "Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου".

Πρόταση 2 (VI. 2)

Αν σε τρίγωνο φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία από τις πλευρές του, αυτή θα τέμνει τις άλλες δύο πλευρές σε μέρη ανάλογα. Αντίστροφα, αν δύο πλευρές τριγώνου τμηθούν σε μέρη ανάλογα, τότε η ευθεία που περνάει από τα σημεία των τομών θα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ (Σχ. 8). Θα δείξουμε

$$\text{ότι } \frac{ΒΔ}{ΔΑ} = \frac{ΓΕ}{ΕΑ}.$$

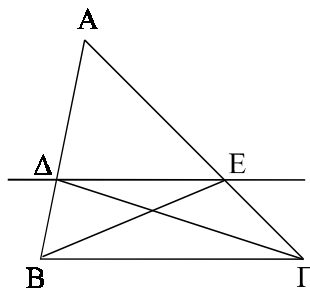
Φέρουμε τις ΒΕ και ΓΔ. Τότε (ΒΔΕ) = (ΓΕΔ), γιατί τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΕΔ έχουν την ίδια βάση ΔΕ και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ (πρόταση I. 38).

$$\text{Άρα θα είναι } \frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΓΕΔ)}{(ΑΔΕ)}$$

Όμως, από την πρόταση 1, θα είναι:

$$\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΒΔ}{ΔΑ} \text{ και } \frac{(ΓΕΔ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΓΕ}{ΕΑ},$$

$$\text{οπότε προκύπτει και ότι } \frac{ΒΔ}{ΔΑ} = \frac{ΓΕ}{ΕΑ}.$$



Σχήμα 8

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε τις πλευρές AB και AG τριγώνου ABG και τα σημεία Δ και E , αντίστοιχα, έτσι ώστε: $\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{GE}{EA}$.

Θα δείξουμε ότι η ΔE είναι παράλληλη προς τη BG .

Από την πρόταση 1 έχουμε ότι:

$$\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{(B\Delta E)}{(A\Delta E)} \quad \text{και} \quad \frac{GE}{EA} = \frac{(ΓΔΕ)}{(AΔΕ)} \quad (\text{πρόταση V.11})$$

οπότε, λόγω της υπόθεσής μας θα είναι

$$\frac{(B\Delta E)}{(A\Delta E)} = \frac{(ΓΔΕ)}{(AΔΕ)}$$

Άρα θα είναι $(B\Delta E) = (ΓΔΕ)$ (πρόταση V. 9) και επιπλέον τα τρίγωνα $B\Delta E$, $ΓΔΕ$ έχουν την ίδια βάση ΔE και βρίσκονται μεταξύ αυτής και της πλευράς $BΓ$ (πρόταση I. 30). Επομένως η ΔE θα είναι παράλληλη προς τη $BΓ$.

ό.ξ.δ.

Σχόλια

Ο Heath σχετικά με την πρόταση 2 παρατηρεί ότι δεν αναφέρεται στη διατύπωσή της αν τα σημεία τομής των πλευρών του τριγώνου βρίσκονται πάνω στη περίμετρο του τριγώνου ή πάνω στις προεκτάσεις τους.

Πάνω στο ίδιο πρόβλημα της διατύπωσης της πρότασης 2, ο Simpson δίνει τρία σχήματα και συμπληρώνει τη διατύπωση αυτή με τις τομές των δύο πλευρών ή των προεκτάσεών τους.

Στα σύγχρονα εγχειρίδια Γεωμετρίας η πρόταση 2 αναφέρεται ως το "θεώρημα διαίρεσης των πλευρών", ενώ στη Γαλλία, την Ελλάδα κ.λπ. η πρόταση 2 ονομάζεται "Θεώρημα του Θαλή" ή "σχηματισμός Θαλή". Η ονομασία αυτή κατά την άποψη πολλών ιστορικών, όπως π.χ. του P. Tannery [138] κ.ά., οφείλεται στο γεγονός ότι ο Θαλής γνώριζε τις βασικές ιδιότητες της ομοιότητας και με τη βοήθειά τους κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος πυραμίδας από το μήκος της σκιάς της. Προφανώς, η πρόταση ισχύει και όταν το A βρίσκεται μέσα στη λωρίδα των παραλλήλων $BΓ$, ΔE .

Στο βιβλίο του "Δεδομένα" ο Ευκλείδης εξετάζει και την περίπτωση αυτή. Σήμερα μπορούμε να μελετήσουμε ενιαία όλες αυτές τις επιμέρους περιπτώσεις με τη βοήθεια της "ομοιοθεσίας", πράγμα που αποδεικνύει ότι ο Ευκλείδης είχε δίκαιο που δε διέκρινε ειδικές περιπτώσεις, όπως αρκετοί μεταφραστές των *Στοιχείων* π.χ. Simpson κ.ά.

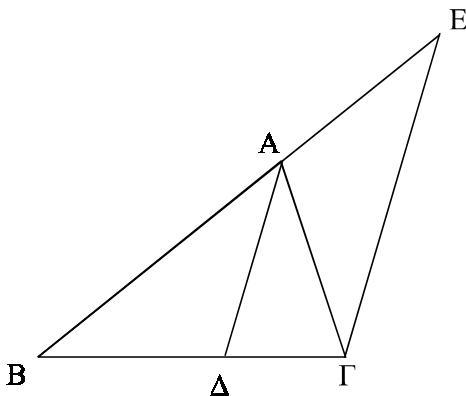
Πρόταση 3 (VI. 3)

Αν διχοτομηθεί μία γωνία τριγώνου και η διχοτόμος τέμνει την απέναντι πλευρά (βάση), τότε τα τμήματα που ορίζονται από το σημείο τομής πάνω στη βάση θα έχουν λόγο ίσο με το λόγο των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου.

Αντίστροφα, αν μία τέμνουσα μιας γωνίας τριγώνου τέμνει την απέναντι πλευρά σε δύο τμήματα που έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου, τότε η τέμνουσα διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$ και η ευθεία AD που διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$ (Σχ. 9). Θα δείξουμε ότι ισχύει: $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$



Σχήμα 9

Από το Γ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ, που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ε (αίτημα 5). Επειδή η ευθεία ΑΓ τέμνει τις παράλληλες ΑΔ και ΓΕ, θα είναι $\hat{A}\Gamma E = \hat{G}\hat{A}\Delta$ [πρόταση Ι. 29]

Όμως από την υπόθεση είναι $\hat{G}\hat{A}\Delta = \hat{B}\hat{A}\Delta$, οπότε θα είναι και $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{A}\Gamma E$.

Επίσης, επειδή οι παράλληλες ΑΔ και ΓΕ τέμνονται από την ευθεία ΒΕ, θα είναι $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{A}\hat{E}\Gamma$ [πρόταση Ι. 29].

Επομένως θα έχουμε και $\hat{A}\Gamma E = \hat{A}\hat{E}\Gamma$, οπότε θα είναι και $AE = AG$ [πρόταση Ι. 6].

Στο τρίγωνο ΒΓΕ η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΓΕ, οπότε από την πρόταση 2 θα έχουμε:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AE} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AG}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, είναι πάλι ΓΕ παράλληλη προς την ΑΔ, η οποία είναι τέτοια, ώστε $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AG}$.

Θα δείξουμε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$.

Πράγματι, αφού η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΓΕ, από την πρόταση 2 θα έχουμε:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AE},$$

οπότε από την υπόθεσή μας προκύπτει ότι:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AB}{AE} \quad \text{ή} \quad AG = AE \quad [\text{πρόταση V. 9}].$$

Άρα θα είναι $\hat{A}\hat{E}\Gamma = \hat{A}\Gamma E$.

Όμως $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά στις παράλληλες $A\Delta$ και ΓE με τέμνουσα τη BE και ακόμη $\hat{A}\hat{\Gamma}E = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ στις ίδιες παράλληλες με τέμνουσα την $A\Gamma$.

Επομένως, από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma}$, δηλαδή ότι η $A\Delta$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου.
 ὁ.ἔ.δ.

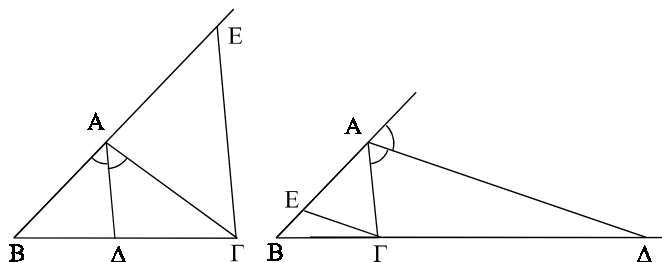
Σχόλια

Αν και η σημαντική αυτή πρόταση δε χρησιμοποιείται στα *Στοιχεία*, εν τούτοις χρησιμοποιείται δύο φορές στα "*Δεδομένα*". Η πρόταση θα πρέπει να ήταν γνωστή στον Αριστοτέλη και χρησιμοποιήθηκε αργότερα από τον Αρχιμήδη.

Η αντίστοιχη της πρότασης 3, που αφορά τη διχοτόμο μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου είναι πολύ σημαντική, αλλά δε δίνεται στο βιβλίο αυτό των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Ο Πάππος θεωρεί τη πρόταση για την εξωτερική διχοτόμο χωρίς απόδειξη, ενώ ο Simpson την αποδεικνύει ως ξεχωριστή πρόταση. Αντίθετα ο De Morgan [42] συνδυάζει την πρόταση 3 για την εσωτερική διχοτόμο με την αντίστοιχη πρόταση για την εξωτερική διχοτόμο σε μία ενιαία πρόταση με την ακόλουθη διατύπωση:

"Αν μία γωνία ενός τριγώνου διχοτομηθεί εσωτερικά ή εξωτερικά από μία ευθεία γραμμή, η οποία τέμνει την απέναντι πλευρά ή την προέκταση της απέναντι πλευράς, τότε τα δύο τμήματα που ορίζονται στην πλευρά αυτή έχουν λόγο ίσο με το λόγο των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου".

Στα παρακάτω σχήματα (Σχ.10) και στις δύο περιπτώσεις ισχύει η ισότητα: $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{A B}{A \Gamma}$.



Σχήμα 10

Μία ακόμη επέκταση της πρότασης 3 (βλ. Heath [83]) είναι η θεώρηση της **αρμονικής τετράδας**. B, Δ, Γ, E, μέσω της ισότητας $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BE}{E\Gamma}$ (Σχ. 11). Επίσης τα ευθύγραμμα τμήματα BE, EΔ, ΕΓ αποτε-

λούν **αρμονική πρόοδο**, αφού ισχύει ότι $\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{BE - E\Delta}{E\Delta - E\Gamma}$.

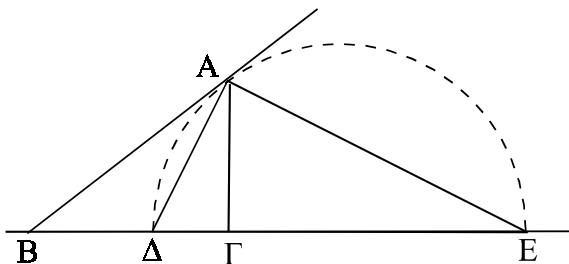
Τέλος, το τμήμα ΔΕ είναι **αρμονικός μέσος** των BE και ΕΓ, αφού από την προηγούμενη ισότητα, προκύπτει εύκολα ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{2}{\Delta E} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{E\Gamma}.$$

Λόγω της καθετότητας των διχοτόμων ΑΔ και ΑΕ (Σχ.11) είναι φανερό ότι ο κύκλος διαμέτρου ΔΕ διέρχεται από το Α. Επιπλέον, αν δοθεί το τμήμα ΒΓ και ο λόγος $\kappa \neq 1$ των τμημάτων ΑΒ και ΑΓ, τότε τα σημεία Δ και Ε πάνω στο ΒΓ και στη προέκτασή του αντίστοιχα, που είναι τέτοια ώστε ο λόγος των

$$\frac{AB}{AG} = \kappa \text{ δίνει } \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma} \text{ ή } \frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} \neq \kappa$$

προσδιορίζονται μονοσήμαντα. Τότε κάθε σημείο του κύκλου διαμέτρου ΔΕ έχει λόγο αποστάσεων από τα Α και Β ίσο προς κ , είναι δηλαδή ο κύκλος διαμέτρου ΔΕ ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα ο λόγος των αποστάσεων τους από τα σημεία Α, Β να ισούται με το κ .



Σχήμα 11

Ο παραπάνω γεωμετρικός τόπος μελετήθηκε από τον Απολλώνιο ("Επίπεδοι τόποι", Βιβλίο II) και ο κύκλος διαμέτρου ΔΕ είναι γνωστός ως *Απολλώνιος κύκλος*, αν και για πρώτη φορά αναφέρεται στα "Μετεωρολογικά" του Αριστοτέλη, όπως ήδη έχουμε αναφέρει.

Μία άλλη θεώρηση του παραπάνω γεωμετρικού τόπου γίνεται από τον Ευτόκιο (Απολλωνίου "Κωνικά") [130], όπου δε χρησιμοποιούνται τα σημεία Δ και Ε, αλλά προσδιορίζονται απευθείας από τα δεδομένα το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.

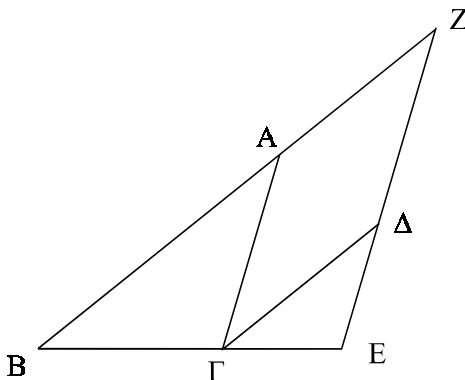
Πρόταση 4 (VI. 4)

Στα ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα ισογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ, που έστω ότι έχουν $\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}\Gamma E$, $\hat{B}A\Gamma = \hat{\Gamma}\Delta E$, $\hat{A}\Gamma B = \hat{\Gamma}E\Delta$. (Σχ. 12)

Υποθέτουμε ότι οι πλευρές ΒΓ και ΓΕ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Επειδή είναι $\hat{A}B\Gamma + \hat{A}\Gamma B < 180^\circ$, θα είναι και $\hat{A}B\Gamma + \hat{\Gamma}E\Delta < 180^\circ$, οπότε οι ευθείες ΑΒ και ΕΔ τέμνονται, έστω στο σημείο Ζ.



Σχήμα 12

Επειδή είναι $\hat{\Delta}\Gamma\text{E} = \hat{\text{A}}\text{B}\Gamma$, θα είναι η BZ παράλληλη προς τη ΓΔ και αφού $\hat{\text{A}}\Gamma\text{B} = \hat{\Delta}\text{E}\Gamma$, θα είναι η ΑΓ παράλληλη προς τη ΖΕ. Άρα το τετράπλευρο ΖΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι και

$$\text{ZA} = \Delta\Gamma, \quad \text{A}\Gamma = \text{Z}\Delta.$$

Στο τρίγωνο BEZ η ΑΓ είναι παράλληλη προς τη ΖΕ, οπότε από την πρόταση 2 έχουμε:

$$\frac{\text{BA}}{\text{AZ}} = \frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\text{E}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\text{E}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{AB}}{\text{B}\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\text{E}}$$

δηλαδή οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες $\hat{\text{A}}\text{B}\Gamma$ και $\hat{\Delta}\Gamma\text{E}$ είναι ανάλογες.

Ομοίως, στο τρίγωνο BEZ η ΓΔ είναι παράλληλη προς τη BZ, οπότε από την πρόταση 2 έχουμε:

$$\frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\text{E}} = \frac{\text{Z}\Delta}{\Delta\text{E}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\text{E}} = \frac{\text{A}\Gamma}{\Delta\text{E}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{B}\Gamma}{\text{A}\Gamma} = \frac{\Gamma\text{E}}{\Delta\text{E}}$$

δηλαδή οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες $\hat{\text{A}}\Gamma\text{B}$ και $\hat{\Gamma}\text{E}\Delta$ είναι ανάλογες.

Έχουμε αποδείξει ότι $\frac{\text{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\text{E}}$ και $\frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\text{E}} = \frac{\text{A}\Gamma}{\Delta\text{E}}$, οπότε θα είναι

και $\frac{\text{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\text{A}\Gamma}{\Delta\text{E}}$ ή $\frac{\text{AB}}{\text{A}\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\text{E}}$, δηλαδή οι πλευρές που περιέχουν τις

ίσες γωνίες $\hat{\text{B}}\text{A}\Gamma$ και $\hat{\Gamma}\Delta\text{E}$ είναι ανάλογες.

Άρα έχουμε αποδείξει ότι οι πλευρές που περιέχουν όλα τα ζεύγη των ίσων γωνιών των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι ανάλογες. Επιπλέον, έχουμε αποδείξει ότι: $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Gamma E} = \frac{A\Gamma}{\Delta E}$, δηλαδή οι πλευρές των ισογώνιων τριγώνων ΑΒΓ και ΔΓΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλιο

Η πρόταση 4 είναι ένα κριτήριο ομοιότητας, με πολλές εφαρμογές στη Γεωμετρία. Η Ευκλείδης δέχθηκε κριτικές από διάφορους νεότερους μεταφραστές, οι οποίες κατά τη γνώμη μας είναι άδικες. Το κυριότερο επιχείρημα των επικριτών είναι η θέση των τριγώνων ΑΒΓ, ΔΓΕ (δηλαδή ότι τα τρίγωνα βρίσκονται σε ειδική θέση). Αυτό προφανώς μπορεί να αιτιολογηθεί, αφού, αν δίνονταν δύο ισογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Δ₁Γ₁Ε₁, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο ΔΓΕ ίσο με το Δ₁Γ₁Ε₁. Στα σύγχρονα εγχειρίδια η απόδειξη της πρότασης 4 γίνεται με τη βοήθεια της 2.

Πρόταση 5 (VI. 5)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές.

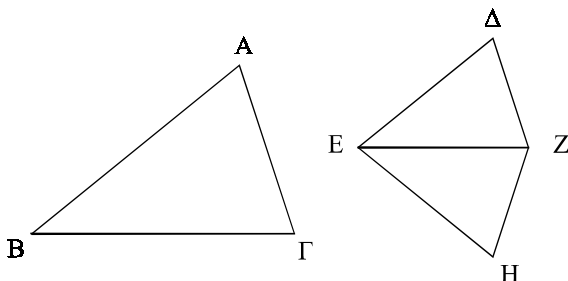
Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με πλευρές ανάλογες, δηλαδή έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{E Z}, \quad \frac{B\Gamma}{\Gamma A} = \frac{E Z}{Z \Delta} \quad \text{και} \quad \frac{BA}{A\Gamma} = \frac{E \Delta}{\Delta Z} \quad (\Sigma\chi. 13)$$

Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές. Δηλαδή

$$\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}E Z, \quad \hat{B}\Gamma A = \hat{E}Z\Delta, \quad \hat{B}A\Gamma = \hat{E}\Delta Z$$



Σχήμα 13

Με βάση τη πλευρά ΕΖ κατασκευάζουμε τις γωνίες $\hat{ZEH}$ και $\hat{EZH}$, έτσι ώστε $\hat{ZEH} = \hat{ABΓ}$ και $\hat{EZH} = \hat{AΓB}$, οπότε θα είναι και $\hat{BAΓ} = \hat{EHZ}$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΕΖΗ.

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 4, θα είναι $\frac{AB}{BΓ} = \frac{HE}{EZ}$,
 οπότε, λόγω της υπόθεσης $\frac{AB}{BΓ} = \frac{ΔΕ}{EZ}$, θα έχουμε $\frac{ΔΕ}{EZ} = \frac{HE}{EZ}$.

Επομένως θα είναι $ΔΕ = ΗΕ$.

Ομοίως μπορούμε να αποδείξουμε και ότι $ΔΖ = ΗΖ$.

Επειδή, όπως αποδείξαμε στα τρίγωνα ΔΕΖ και ΗΕΖ, είναι $ΔΕ = ΗΕ$, ΕΖ κοινή και η βάση ΔΖ είναι ίση προς τη βάση ΗΖ, θα είναι και $\hat{ΔΕΖ} = \hat{ΗΕΖ}$ (πρόταση Ι. 8) και επιπλέον τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΗΕΖ θα είναι ίσα.

Άρα θα έχουν και $\hat{ΔΖΕ} = \hat{ΕΖΗ}$, $\hat{ΕΔΖ} = \hat{ΕΗΖ}$ (πρόταση Ι. 4).

Όμως έχουμε θεωρήσει $\hat{ΕΖΗ} = \hat{AΓB}$ και $\hat{ZEH} = \hat{ABΓ}$, οπότε θα έχουμε:

$$\hat{AΓB} = \hat{ΔΖΕ} \text{ και } \hat{ABΓ} = \hat{ΔΕΖ}.$$

Συνεπώς θα είναι ίσες και οι γωνίες με κορυφή Α και Δ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 5 είναι αντίστροφη της 4 και αποτελεί και αυτή ένα χρήσιμο κριτήριο ομοιότητας.

Μελετώντας την πρόταση 5, παρατηρούμε ότι αποτελείται από δύο προτάσεις:

- (i) Τα τρίγωνα είναι ισογώνια
- (ii) Οι ίσες γωνίες βρίσκονται απέναντι από πλευρές ανάλογες.

Για να είναι λοιπόν οι προτάσεις 4 και 5 αντίστροφες, θα πρέπει να συμβαίνει επιπλέον και (i) $\Rightarrow$ (ii) και (ii) $\Rightarrow$ (i). Τις προτάσεις αυτές μπορούμε να αποδείξουμε με διάφορους τρόπους.

Πρόταση 6 (VI. 6)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση και τις πλευρές που περιέχουν την ίση γωνία ανάλογες, τότε τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ , που έχουν $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z}$ και

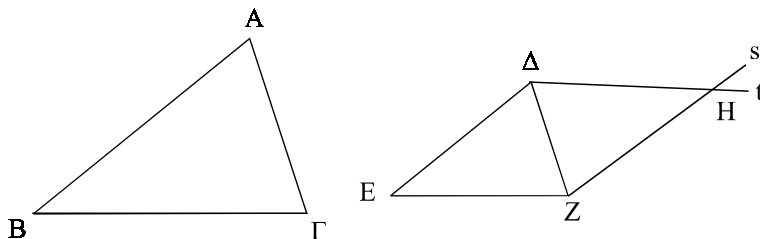
$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} \quad (\Sigma\chi. 14).$$

Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ισογώνια, και μάλιστα ότι έχουν:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z} \quad \text{και} \quad \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{E}\hat{Z}\hat{\Delta}.$$

Με μία πλευρά τη ΔZ κατασκευάζουμε γωνίες $\hat{Z}\hat{\Delta}t$ και $\hat{\Delta}Zs$ τέτοιες, ώστε:

$$\hat{Z}\hat{\Delta}t = \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z} \quad \text{και} \quad \hat{\Delta}Zs = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$$



Σχήμα 14

και οι ημιευθείες Δt , Zs βρίσκονται ως προς τη ΔZ στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το E. Αν οι ημιευθείες Δt και Zs τέμνονται στο H, τότε τα τρίγωνα ABΓ και ΔHZ είναι ισογώνια.

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 4, θα έχουμε:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{H\Delta}{\Delta Z}$$

οπότε, λόγω της υπόθεσης, θα είναι και $\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{H\Delta}{\Delta Z}$

Επομένως έχουμε ΔE = HΔ, οπότε τα τρίγωνα ΔEZ και ΔHZ θα είναι ίσα, αφού έχουν: ΔE = HΔ, ΔZ = ΔZ και $\hat{E}\Delta Z = \hat{Z}\Delta H$.

Άρα θα είναι και $\hat{\Delta ZH} = \hat{\Delta ZE}$, $\hat{\Delta HZ} = \hat{\Delta EZ}$, οπότε από τη κατασκευή των γωνιών $\hat{Z}\Delta t$ και $\hat{\Delta Zs}$ θα είναι $\hat{B}\Gamma A = \hat{E}\Delta Z$, με συνέπεια και την ισότητα των γωνιών $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta E}\hat{Z}$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Και η πρόταση 6 είναι ένα χρήσιμο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων. Μάλιστα, θεωρείται αντίστροφη της 4 κατά το δεύτερο μέρος της.

Διάφοροι νεότεροι μεταφραστές διακρίνουν διάφορες περιπτώσεις ως προς τις γωνίες $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Π.χ. αν $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, τότε από την αναλογία

$$\begin{aligned} \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} &\Rightarrow \frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{\Delta E^2}{\Delta Z^2} \Rightarrow \frac{AB^2 + A\Gamma^2}{A\Gamma^2} = \frac{\Delta E^2 + \Delta Z^2}{\Delta Z^2} \\ &\Rightarrow \frac{B\Gamma^2}{A\Gamma^2} = \frac{EZ^2}{\Delta Z^2} \Rightarrow \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{EZ}{\Delta Z} \end{aligned}$$

δηλαδή τα τρίγωνα έχουν ανάλογες τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες κ.λπ.

Πρόταση 7 (VI. 7)

Αν δύο τρίγωνα έχουν:

- *μία γωνία του ενός ίση προς μία γωνία του άλλου*
- *τις πλευρές που περιέχουν μία άλλη γωνία του ενός και μία άλλη γωνία του άλλου ανάλογες και*
- *καθεμία από τις λοιπές γωνίες του μικρότερη ή μεγαλύτερη της ορθής γωνίας,*

τότε τα τρίγωνα είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες που περιέχονται από τις ανάλογες πλευρές.

Απόδειξη

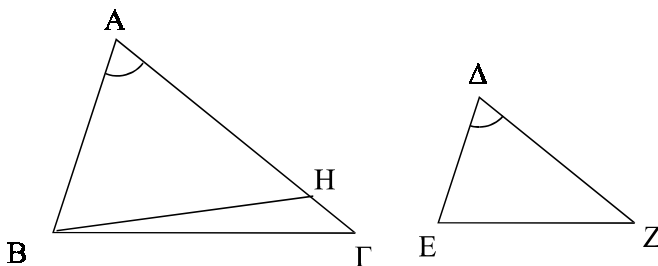
Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ , που έχουν $\hat{B}A\Gamma = \hat{E}\Delta Z$, και $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ (Σχ.15). Θα δείξουμε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΔEZ και ότι $\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}EZ$.

Ας υποθέσουμε ότι οι οξείες γωνίες $\hat{A}B\Gamma$ και $\hat{\Delta}EZ$ δεν είναι ίσες και έστω $\hat{A}B\Gamma > \hat{\Delta}EZ$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μία γωνία με κορυφή B και μία πλευρά την AB , έστω την $\hat{A}BH$, ίση προς την $\hat{\Delta}EZ$. Τότε τα τρίγωνα ABH και ΔEZ είναι ισογώνια, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 1, θα έχουμε την αναλογία:

$$\frac{AB}{BH} = \frac{\Delta E}{EZ},$$

ή, λόγω της υπόθεσης, θα ισχύει:

$$\frac{AB}{BH} = \frac{AB}{B\Gamma}, \text{ οπότε προκύπτει ότι } BH = B\Gamma \text{ και } \hat{B}\Gamma A = \hat{B}H\Gamma.$$



Σχήμα 15

Από την υπόθεση όμως έχουμε ότι $\hat{B\Gamma A} < 90^\circ$, οπότε θα είναι και $\hat{B\eta\Gamma} < 90^\circ$, με συνέπεια η εφεξής παραπληρωματική γωνία της $\hat{B\eta\Gamma}$ να είναι αμβλεία, δηλαδή $\hat{A\eta B} > 90^\circ$.

Όπως αποδείξαμε, τα τρίγωνα ABH, ΔΕΖ είναι ισογώνια και είναι $\hat{A\eta B} = \hat{E\Z\Delta}$, οπότε θα είναι και $\hat{E\Z\Delta} > 90^\circ$, που είναι άτοπο, γιατί η γωνία $\hat{E\Z\Delta}$ έχει θεωρηθεί μικρότερη της ορθής.

Άρα θα είναι $\hat{A\B\Gamma} = \hat{\Delta E\Z}$ και συνεπώς τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ θα είναι ισογώνια.

Ομοίως εργαζόμαστε, αν καθεμία από τις γωνίες $\hat{B\Gamma A}$ και $\hat{E\Z\Delta}$ θεωρηθεί μεγαλύτερη της ορθής.

Ὡ.ξ.δ.

Σχόλια

Ο Heath [83] αναφέρει ότι ο Toddhunter έδωσε στη πρόταση 7 την παρακάτω ισοδύναμη μορφή:

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές του ενός ανάλογες προς δύο πλευρές του άλλου και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από κάθε ζεύγος ανάλογων πλευρών ίσες, τότε οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το τρίτο ζεύγος των πλευρών τους θα είναι είτε ίσες είτε παραπληρωματικές.

Παρατηρούμε ότι θα μπορούσαμε να αποδείξουμε τη πρόταση 7 με τον ίδιο τρόπο που αποδείξαμε την 6.

Πρόταση 8 (VI. 8)

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας κάθετη προς τη βάση, τότε τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται με μία πλευρά την κάθετη αυτή είναι όμοια μεταξύ τους, και προς το αρχικό τρίγωνο.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και την ΑΔ κάθετη προς τη ΒΓ (Σχ. 16).

Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ είναι όμοια μεταξύ τους, καθώς και προς το τρίγωνο ΑΒΓ.

Επειδή είναι

$$\hat{B}\hat{A}\hat{G} = \hat{A}\hat{A}\hat{B} = 90^\circ \text{ και η γω-}$$

νία $\hat{B}$ είναι κοινή στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΒ, αυτά θα είναι ισογώνια, οπότε από την πρόταση 4 θα ισχύει:

$$\frac{B\hat{G}}{B\hat{A}} = \frac{B\hat{A}}{B\hat{A}} = \frac{A\hat{G}}{A\hat{A}}$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΒ είναι όμοια (ορισμός 1). Ομοίως αποδεικνύουμε και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι όμοια.

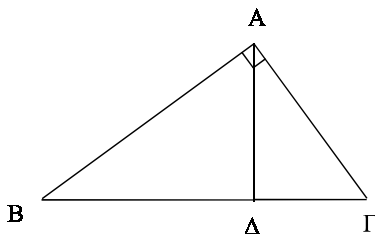
Τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ έχουν τις γωνίες τους $\hat{A}\hat{A}\hat{B}$, $\hat{A}\hat{A}\hat{G}$ ορθές και όπως αποδείξαμε παραπάνω είναι $B\hat{A}\hat{A} = A\hat{G}\hat{A}$ ή $B\hat{A}\hat{A} = A\hat{G}\hat{A}$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, οπότε θα είναι ισογώνια και συνεπώς (πρόταση 4) θα ισχύει:

$$\frac{B\hat{A}}{A\hat{A}} = \frac{A\hat{A}}{A\hat{G}} = \frac{A\hat{B}}{A\hat{G}}$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι όμοια, σύμφωνα με τον ορισμό 1.

Ὡ.ξ.δ.

Από την προηγούμενη πρόταση είναι φανερό ότι:



Σχήμα 16

Πόρισμα

Αν από την κορυφή της ορθής γωνίας ορθογωνίου τριγώνου φέρουμε κάθετη προς την υποτείνουσα, η κάθετη αυτή είναι μέση ανάλογος των δύο τμημάτων που ορίζονται πάνω στην υποτείνουσα.

Σχόλια

Σε αρκετούς ελληνικούς κώδικες μετά το " ὁ.ἔ.δ." και πριν από το πόρισμα της πρότασης 8 υπάρχουν λίγες φράσεις, που σύμφωνα με τον Heiberg είναι παρεμβολές νεότερων, αφού δεν υπάρχουν ούτε σε χειρόγραφα που χαρακτηρίζονται εκδόσεις του Θέωνα ούτε και σε κάποιες αραβικές και μεσαιωνικές μεταφράσεις.

Ο Simpson επισημαίνει ότι η απόδειξη της πρότασης 8 που αναφέρεται εδώ, μάλλον δεν ανήκει στον Ευκλείδη, αλλά σε κάποιον εκδότη, γιατί δεν υπάρχει σε αραβικές μεταφράσεις των "Στοιχείων".

5. Διαίρεση τμημάτων σε μέρη με δοθέντα λόγο.

Στην ενότητα αυτή συμπεριλαμβάνονται προτάσεις που αναφέρονται σε γεωμετρικές κατασκευές τμημάτων. Αυτές είναι οι προτάσεις 9 μέχρι 13. Η πρόταση 9 αναφέρεται στην αφαίρεση από ένα ευθύγραμμο τμήμα ενός μέρους αυτού. Στην πρόταση 10 προσδιορίζονται δύο σημεία πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, που ορίζουν σε αυτό τρία ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται σε δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα από δύο δεδομένα σημεία του. Στις προτάσεις 11 και 13 κατασκευάζεται η τρίτη και η μέση ανάλογος, αντιστοίχως, δύο δοθέντων ευθύγραμμων τμημάτων, ενώ στην πρόταση 12 κατασκευάζεται η τέταρτη ανάλογος τριών δοθέντων ευθύγραμμων τμημάτων.

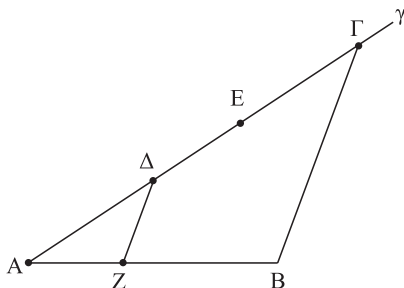
Πρόταση 9 (VI. 9)

Από δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να αφαιρεθεί ένα μέρος του.

Απόδειξη

Έστω AB ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα (Σχ.17) από το οποίο πρέπει να αφαιρεθεί ένα μέρος του, για παράδειγμα το ένα τρίτο αυτού.

Με αρχή το A φέρουμε ημιευθεία $A\gamma$ που δεν περιέχει το B και πάνω σε αυτήν θεωρούμε σημεία Δ , E και Γ , τέτοια ώστε $A\Delta = \Delta E = E\Gamma$.



Σχήμα 17

Φέρουμε τη $B\Gamma$ και από το Δ την ΔZ παράλληλη προς την $B\Gamma$. Σύμφωνα με την πρόταση 2, αφού στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η ΔZ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$, θα έχουμε:

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Delta A} = \frac{BZ}{ZA}$$

Όμως η $\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της ΔA . Συνεπώς και η BZ θα είναι διπλάσια της AZ , οπότε η BA θα είναι τριπλάσια της AZ .

Άρα από το ευθύγραμμο τμήμα AB αφαιρέθηκε το τμήμα AZ , που είναι το ένα τρίτο αυτού.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Είναι προφανές ότι η απόδειξη των *Στοιχείων* είναι γενική και με την ίδια κατασκευή μπορούμε να διαιρέσουμε το τμήμα AB σε n ($n \in \mathbb{N}^*$) ίσα μέρη, γεγονός χωρίς ιδιαίτερη σημασία.

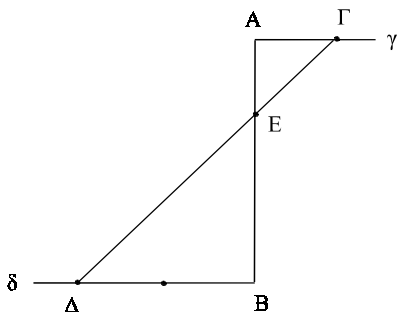
Νεότεροι μεταφραστές παρατηρούν ότι η έκφραση "τυχαία γωνία που σχηματίζει η $A\gamma$ με την AB " δεν είναι πλέον δόκιμη, γιατί στην πραγματικότητα πρόκειται για τυχαία ημιευθεία $A\gamma$. Πιθανόν λοιπόν η παραπάνω κατασκευή να μην είναι του Ευκλείδη, αλλά να γράφτηκε αργότερα.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και ο Simpson, ο οποίος αποδεικνύει την 9 με τη βοήθεια του ορισμού 5 του βιβλίου V, από τον οποίο

προκύπτει ότι, αν δοθεί τμήμα α και αριθμός κ , τότε υπάρχει τμήμα β ώστε $\frac{\kappa}{1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Σε διάφορους κώδικες (Βιέννης κ.ά.) η κατασκευή γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Από τα A, B φέρουμε κάθετες $A\gamma, B\delta$ στο AB (Σχ.18). Στην $A\gamma$ παίρνουμε τμήμα $A\Gamma$ και στην $B\delta$ τμήμα $B\Delta = 2A\Gamma$. Φέρουμε τη $\Gamma\Delta$, που τέμνει το AB στο ζητούμενο σημείο E .



Σχήμα

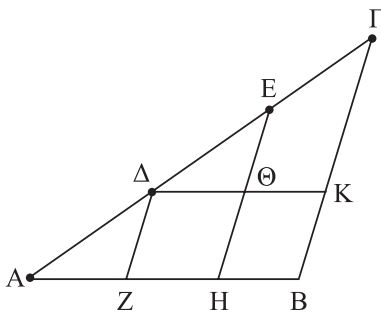
Πρόταση 10 (VI. 10)

Δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να τμηθεί με το τρόπο που τέμνεται άλλο ευθύγραμμο τμήμα.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB και το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$, το οποίο τέμνεται από τα σημεία Δ και E (Σχ.19).

Φέρουμε τη $B\Gamma$ και από τα Δ, E φέρουμε παράλληλες προς αυτήν, τις ΔZ και $E\Theta$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει τις $E\Theta$ και $B\Gamma$ στα σημεία Θ και K αντίστοιχα. Επομένως, καθένα από τα τετράπλευρα $\Delta Z\Theta$ και $\Theta H B K$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι:



Σχήμα 19

$$\Delta\Theta = ZH \text{ και } \Theta K = HB$$

Στο τρίγωνο $\Delta K\Gamma$ η ΘE είναι παράλληλη προς την $K\Gamma$, οπότε

$$\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{K\Theta}{\Theta\Delta} \quad (\text{πρόταση 2})$$

Όμως είναι $K\Theta = BH$ και $\Theta\Delta = HZ$, οπότε

$$\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{BH}{HZ}$$

Επίσης, στο τρίγωνο AHE η ΔZ είναι παράλληλη προς την EH , οπότε θα ισχύει

$$\frac{E\Delta}{\Delta A} = \frac{HZ}{ZA} \quad (\text{πρόταση 2})$$

Επομένως το τμήμα AB έχει τμηθεί από τα σημεία Z και H , όπως και το τμήμα $A\Gamma$ από τα σημεία Δ και E , αντίστοιχα.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλιο

Η πρόταση 10 είναι γενικότερη από την πρόταση 9, αλλά πολλοί σχολιαστές παρατηρούν ότι μπορούν να κάνουν την κατασκευή της πρότασης 10 με την ίδια μέθοδο που εφαρμόζουν στη πρόταση 9.

Πρόταση 11 (VI. 11)

Να βρεθεί η τρίτη ανάλογος δύο δοθέντων ευθύγραμμων τμημάτων.

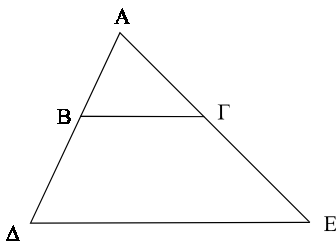
Απόδειξη

Θεωρούμε δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$, που δε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία (Σχ. 20).

Προεκτείνουμε το AB κατά τμήμα $B\Delta = A\Gamma$ και από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει τη προέκταση της $A\Gamma$ στο E .

Επειδή στο τρίγωνο ΔDE η $B\Gamma$ είναι παράλληλη προς την DE , θα έχουμε την αναλογία (πρόταση 2)

$$\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$$



Σχήμα 20

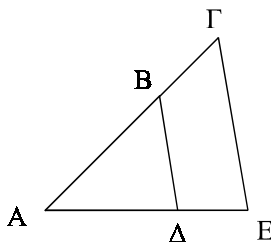
και αφού $B\Delta = A\Gamma$ έχουμε ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$, δηλαδή η ΓE είναι τρίτη ανάλογος των AB και $A\Gamma$.
 ὁ.ἔ.π.

Πρόταση 12 (VI. 12)

Να βρεθεί η τέταρτη ανάλογος τριών δοθέντων ευθύγραμμων τμημάτων.

Απόδειξη

α _____
 β _____
 γ _____



Σχήμα 21

Θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα α , β , γ (Σχ.21) και ζητάμε ευθύγραμμο τμήμα x , τέτοιο, ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$

Παίρνουμε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$ και τμήμα $A\Delta = \gamma$, που δεν είναι στην ίδια ευθεία με τα AB και $B\Gamma$. Από το Γ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Delta$, η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E (πρόταση I. 31).

Επειδή στο τρίγωνο $A\Gamma E$ η $B\Delta$ είναι παράλληλη προς τη ΓE , θα έχουμε την αναλογία (πρόταση 2)

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta E} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\Delta E}$$

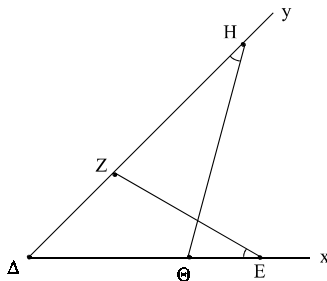
Άρα η τέταρτη ανάλογος των ευθυγράμμων τμημάτων α , β , γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΔE .

ὁ.ξ.π.

Σχόλια

Ο Heath παρατηρεί ότι η κατασκευή της τετάρτης αναλόγου μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια αντιπαράλληλης από το Γ στη $B\Delta$.

Πράγματι, αν σε γωνία $\hat{x}\Delta y$ (Σχ.22) πάρουμε $\Delta E = \alpha$, $\Delta Z = \beta$ και $\Delta H = \gamma$ και φέρουμε την $Z\Theta$ και την αντιπαράλληλο από το H (δηλαδή την $H\Theta$, ώστε $\hat{\Delta H\Theta} = \hat{\Delta EZ}$) τότε $\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{\Delta H}{\Delta \Theta}$, λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ΔEZ , $\Delta H\Theta$.



Σχήμα 22

Πρόταση 13 (VI. 13)

Να βρεθεί η μέση ανάλογος δύο δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων.

Απόδειξη

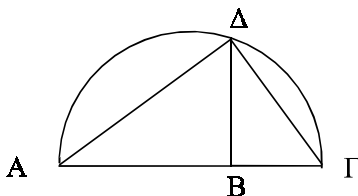
Θεωρούμε ευθύγραμμα τμήματα α , β και ζητάμε τη μέση ανάλογό τους, δηλαδή ζητάμε ευθύγραμμο τμήμα x τέτοιο, ώστε:

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\beta}$$

Παίρνουμε πάνω σε μια ευθεία διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$

(Σχ. 23) και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου $ΑΓ$. Στο B φέρουμε κάθετη προς τη $ΑΓ$, που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ .

α —————
 β —————



Σχήμα 23

Επειδή το τρίγωνο $\triangle A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Δ , αφού η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A\Delta\Gamma}$ βαίνει σε ημικύκλιο (πρόταση III. 31) και η ΔB είναι ύψος του τριγώνου, σύμφωνα με το πόρισμα της πρότασης 8, η ΔB είναι η μέση ανάλογος των ευθύγραμμων τμημάτων AB και $A\Gamma$, δηλαδή είναι $x = \Delta B$.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλια

Η πρόταση 13 είναι ισοδύναμη με την πρόταση:

"Να κατασκευάσετε τετράγωνο που να έχει εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν δοθέντος ορθογωνίου"

δηλαδή την πρόταση II.14.

Ο Ευκλείδης φαίνεται ότι θεωρούσε σημαντική την πρόταση αυτή (αφού την επαναλαμβάνει), γιατί πράγματι με τη βοήθεια της πρότασης αυτής οι αρχαίοι Έλληνες υπολόγιζαν την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού.

6. Αναλογίες Εμβαδών

Πρόταση 14 (VI. 14)

Στα ισεμβαδικά και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογοι.

Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα, των οποίων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογοι, είναι ισεμβαδικά.

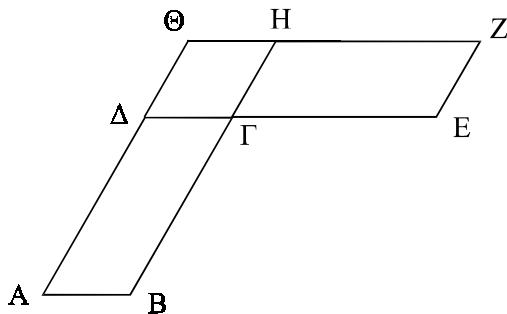
Απόδειξη

Θεωρούμε ισεμβαδικά και ισογώνια παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $\Gamma E\Z H$ (Σχ. 24) που έχουν ίσες τις γωνίες και κοινή κορυφή Γ . Οι πλευρές τους $B\Gamma$ και ΓH είναι στην ίδια ευθεία, οπότε και οι πλευρές τους $\Gamma\Delta$ και ΓE θα είναι στην ίδια ευθεία.

Θα αποδείξουμε ότι οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογοι, ότι δηλαδή ισχύει

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma H} = \frac{\Gamma E}{\Delta\Gamma}.$$

Σχηματίζουμε και το παραλληλόγραμμο $\Gamma H\Theta\Delta$, οπότε θα έχουμε



Σχήμα 24

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\Gamma\Theta\Delta)} = \frac{(\Gamma\epsilon\zeta\eta)}{(\Gamma\Theta\Delta)}$$

Όμως, από την πρόταση 1 έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\Gamma\Theta\Delta)} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Theta} \quad \text{και} \quad \frac{(\Gamma\epsilon\zeta\eta)}{(\Gamma\Theta\Delta)} = \frac{\Gamma\epsilon}{\Delta\Gamma}$$

οπότε θα είναι και $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{\Gamma\epsilon}{\Delta\Gamma}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα ισογώνια παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $\Gamma\epsilon\zeta\eta$ έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{\Gamma\epsilon}{\Delta\Gamma}$$

Θα δείξουμε ότι τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $\Gamma\epsilon\zeta\eta$ έχουν ίσα εμβαδά.

Πράγματι, σύμφωνα με την πρόταση 1, θα έχουμε:

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\Gamma\Theta\Delta)} \quad \text{και} \quad \frac{\Gamma\epsilon}{\Delta\Gamma} = \frac{(\Gamma\epsilon\zeta\eta)}{(\Gamma\Theta\Delta)}$$

οπότε, λόγω της υπόθεσης, θα είναι

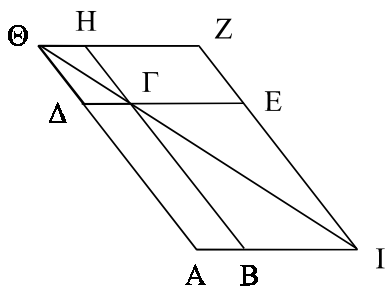
$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\Gamma\Theta\Delta)} = \frac{(\Gamma\epsilon\zeta\eta)}{(\Gamma\Theta\Delta)} \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma\Delta) = (\Gamma\epsilon\zeta\eta)$$

ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 14 είναι μερική περίπτωση της 23 και επιπλέον μας θυμίζει έντονα τις προτάσεις I. 29, I. 34, όπου γίνεται η μελέτη παρόμοιων ιδιοτήτων παραλληλογράμμων, καθώς και προτάσεων που έχουν σχέση με το γνώμονα. Π.χ. αν φέρουμε τη διαγώνιο ΘΓ και την προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την ΑΒ στο Ι (Σχ. 25), τότε το ΑΙΖΘ είναι παραλληλόγραμμο και το ΕΖΘΑΒΓ είναι γνώμονας. Οπότε προκύπτει άμεσα ότι τα τρίγωνα ΓΒΙ και ΘΔΓ είναι

όμοια, επομένως $\frac{\Theta\Delta}{\Gamma\beta} = \frac{\Gamma\Delta}{\beta\iota}$.



Σχήμα 25

Πρόταση 15 (VI. 15)

Αν δύο τρίγωνα είναι ισεμβαδικά και έχουν μία γωνία ίση, τότε οι πλευρές τους που περιέχουν την ίση γωνία τους είναι αντιστρόφως ανάλογοι.

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση και τις πλευρές που περιέχουν την ίση γωνία τους ανάλογες, τότε τα τρίγωνα είναι ισεμβαδικά.

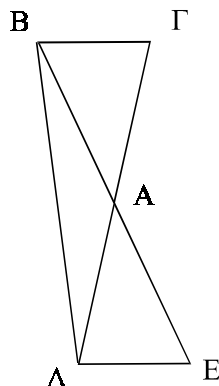
Απόδειξη

Θεωρούμε τα ισεμβαδικά τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ που έχουν μία γωνία ίση, $\hat{B}\hat{A}\hat{G} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ (Σχ. 26).

Θα δείξουμε ότι οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογοι, δηλαδή ισχύει

$$\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{E\Lambda}{\Lambda\beta}$$

Πράγματι, αφού $(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΔΕ})$, θα είναι



Σχήμα 26

$$\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{(A\Delta E)}{(AB\Delta)}$$

Όμως, από την πρόταση 1, είναι

$$\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{\Gamma A}{A\Delta} \quad \text{και} \quad \frac{(A\Delta E)}{(AB\Delta)} = \frac{EA}{AB}$$

οπότε θα είναι $\frac{\Gamma A}{A\Delta} = \frac{EA}{AB}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{D}\hat{A}\hat{E}$ και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες.

Θα δείξουμε ότι $(AB\Gamma) = (A\Delta E)$.

Πράγματι, από την υπόθεση έχουμε ότι $\frac{\Gamma A}{A\Delta} = \frac{EA}{AB}$

και από την πρόταση 1 είναι:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{\Gamma A}{A\Delta} \quad \frac{(A\Delta E)}{(AB\Delta)} = \frac{EA}{AB}.$$

Επομένως θα είναι και

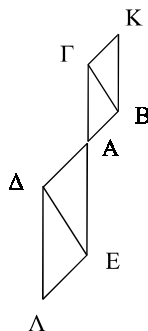
$$\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{(A\Delta E)}{(AB\Delta)}$$

οπότε $(AB\Gamma) = (A\Delta E)$, (πρόταση V. 9).

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 15 περιέχει δύο αντίστροφες εν μέρει προτάσεις και είναι πολύ απλό να αναγάγουμε την 15 στην προηγούμενη πρόταση 14. Πράγματι, αν $AB\Gamma$, $A\Delta E$ τα τρίγωνα και τα μετασχηματίσουμε στα παραλληλόγραμμα $ABK\Gamma$, $A\Delta\Lambda E$ (Σχ. 27), οπότε κλπ.



Σχήμα 27

Πρόταση 16 (VI.16)

Αν τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, το ορθογώνιο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές τους άκρους όρους της αναλογίας, είναι ισεμβαδικό προς το ορθογώνιο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές τους μέσους όρους της αναλογίας και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, \Gamma\Delta, \alpha, \beta$, που είναι τέτοια, ώστε

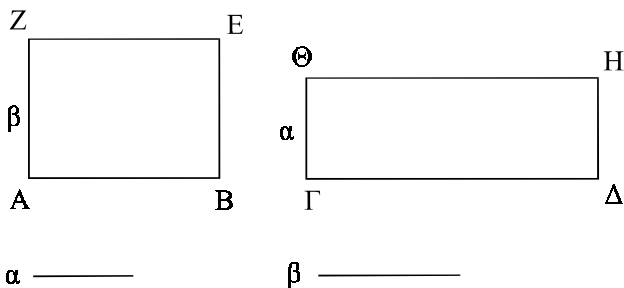
$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

και τα ορθογώνια $ABEZ, \Gamma\Delta H\Theta$, για τα οποία έχουμε $AZ = \beta, \Gamma\Theta = \alpha$ (Σχ. 28).

Θα δείξουμε ότι $(ABEZ) = (\Gamma\Delta H\Theta)$.

Πράγματι, από τις υποθέσεις θα έχουμε

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma\Theta}{AZ}$$



Σχήμα 28

δηλαδή στα ορθογώνια $ABEZ$ και $\Gamma\Delta H\Theta$ οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 14, τα ορθογώνια $ABEZ$ και $\Gamma\Delta H\Theta$ θα είναι ισεμβαδικά.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $(ABEZ) = (\Gamma\Delta H\Theta)$ και θα δείξουμε ότι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Πράγματι, τα ορθογώνια ABEZ και ΓΔΕΘ έχουν ίσα εμβαδά και είναι ισογώνια, οπότε σύμφωνα με την πρόταση 14, οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες θα είναι αντιστρόφως ανάλογες, δηλαδή θα έχουμε:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma\Theta}{AZ} \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλιο

Η πρόταση είναι μερική περίπτωση της πρότασης 14 και μπορεί να πάρει διάφορες μορφές. Π.χ. είναι ισοδύναμη με την πρόταση:

Το γινόμενο δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το γινόμενο του ύψους που άγεται από την κοινή κορυφή των πλευρών και της διαμέτρου του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

Πρόταση 17 (VI. 17)

Αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, το ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές τους άκρους όρους της αναλογίας είναι ισεμβαδικό προς το τετράγωνο με πλευρά το μέσο όρο της αναλογίας και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ τέτοια, ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \quad (\text{Σχ. 29}). \quad \text{Θα δείξουμε}$$

ότι το ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές α, γ είναι ισεμβαδικό προς το τετράγωνο πλευράς β.

α _____

β _____

γ _____

δ _____

Πράγματι, αν θεωρήσουμε και τέταρτο ευθύγραμμο τμήμα δ ίσου μήκους προς το β, τότε θα έχουμε την ισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma}$$

Σχήμα 29

οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 16, το ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές α και γ είναι ισεμβαδικό προς το τετράγωνο πλευράς $\beta = \delta$.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι το ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές α , γ και το τετράγωνο πλευράς $\beta = \delta$ είναι ισεμβαδικά, σύμφωνα με την πρόταση 16, θα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Δηλαδή, τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι ανάλογα.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

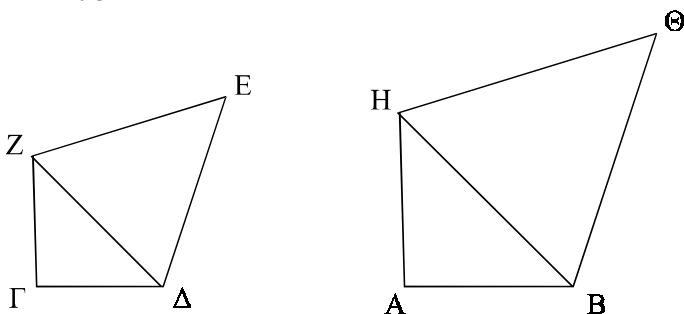
Προφανώς, η πρόταση 17 είναι μερική περίπτωση της 16 στην περίπτωση που $\beta = \gamma$. Πολλοί νεότεροι σχολιαστές των *Στοιχείων* πιστεύουν ότι η πραγματική θέση της 17 θα ήταν μεταξύ των προτάσεων II. 14 και VI. 13, άποψη που υπάρχει και στον Αριστοτέλη.

7. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Πρόταση 18 (VI. 18)

Να γραφεί τετράπλευρο με μία πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα AB, το οποίο να είναι όμοιο και ομοίως κείμενο προς δοθέν τετράπλευρο.

Απόδειξη



Σχήμα 30

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB και το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EZ$ (Σχ. 30). Θα γράψουμε τετράπλευρο $AB\Theta H$ όμοιο προς το $\Gamma\Delta EZ$ και ομοίως κείμενο με αυτό.

Φέρουμε τη ΔZ και κατασκευάζουμε με μία πλευρά την AB τρίγωνο ABH τέτοιο, ώστε $\hat{BAH} = \hat{\Delta\Gamma Z}$ και $\hat{ABH} = \hat{\Gamma\Delta Z}$, (πρόταση I. 23 και I. 32).

Τότε τα τρίγωνα ABH και $\Gamma\Delta Z$ θα είναι ισογώνια, οπότε θα έχουν (πρόταση 4) τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{Z\Delta}{HB} = \frac{Z\Gamma}{HA} = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τρίγωνο $HB\Theta$ τέτοιο, ώστε $\hat{HB\Theta} = \hat{Z\Delta E}$ και $\hat{BH\Theta} = \hat{\Delta ZE}$. Τότε τα τρίγωνα $HB\Theta$ και $Z\Delta E$ θα είναι ισογώνια, οπότε θα έχουν (πρόταση 4) τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{Z\Delta}{HB} = \frac{ZE}{H\Theta} = \frac{\Delta E}{B\Theta}$$

Επομένως θα έχουμε

$$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Theta} = \frac{ZE}{H\Theta} = \frac{Z\Gamma}{HA}$$

δηλαδή τα τετράπλευρα $AB\Theta H$ και $\Gamma\Delta EZ$ έχουν τις πλευρές ανάλογες.

Επιπλέον, από τις κατασκευές των τριγώνων ABH και $HB\Theta$ που έγιναν, έχουμε $\hat{\Delta\Gamma Z} = \hat{BAH}$, $\hat{Z\Delta E} = \hat{H\Theta B}$, ενώ οι γωνίες $\hat{AH\Theta}$ και $\hat{\Gamma ZE}$ είναι ίσες ως αθροίσματα ίσων γωνιών και ομοίως οι γωνίες $\hat{AB\Theta}$ και $\hat{\Gamma\Delta E}$ είναι ίσες.

Άρα το τετράπλευρο $AB\Theta H$ είναι όμοιο προς το δοθέν τετράπλευρο $\Gamma\Delta EZ$ και ομοίως κείμενο προς αυτό.

ὁ.ἔ.π.

Σχόλιο

Την έκφραση "όμοιο και ομοίως κείμενο" πολλοί νεότεροι σχολιαστές τη μεταφράζουν "όμοιο και ομοιόθετο". Όμως η απόδοση αυτή της έκφρασης περιέχει πλεονασμό, αφού δύο ομοιόθετα σχήματα είναι και όμοια.

Πάντως, με τη βοήθεια της πρότασης 18, γεωμέτρες του 18^{ου} και του 19^{ου} αιώνα (π.χ. Simpson, Steiner) δημιούργησαν πλήρη θεωρία όμοιων σχημάτων, από την οποία αργότερα προήλθε η θεωρία των ομοιόθετων σχημάτων.

Πρόταση 19 (VI. 19)

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους.

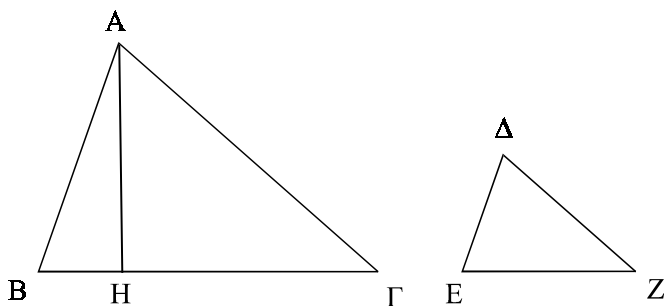
Απόδειξη

Θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, που έχουν

$$\hat{A}B\Gamma = \hat{\Delta}E\text{Z} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ} \quad (\Sigma\chi. 31).$$

Δηλαδή η ΒΓ είναι ομόλογη πλευρά προς την ΕΖ. Θα δείξουμε ότι:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{(B\Gamma)^2}{(EZ)^2}$$



Σχήμα 31

Πάνω στο ΒΓ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΗ, που είναι τρίτο ανάλογο των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΓ και ΕΖ (πρόταση 11), δηλαδή ισχύει:

$$\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{ZE}{BH}$$

Επειδή είναι

$$\frac{AB}{BG} = \frac{AE}{EZ} \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{BG}{EZ} \quad (\text{πρόταση V.16}),$$

θα έχουμε και

$$\frac{AB}{AE} = \frac{EZ}{BH}$$

Επομένως, τα τρίγωνα ABH και ΔΕΖ έχουν ίσες τις γωνίες τους $\hat{ABH}$ και $\hat{ΔΕΖ}$ και τις πλευρές που τις περιέχουν αντιστρόφως ανάλογες. Οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 15, θα έχουμε: $(ABH) = (ΔΕΖ)$

Επιπλέον, επειδή $\frac{BG}{EZ} = \frac{EZ}{BH}$, σύμφωνα με τον ορισμό 9 του βιβλίου V, θα ισχύει:

$$\frac{BG}{BH} = \frac{(BG)^2}{(EZ)^2}$$

Όμως ισχύει και η ισότητα (πρόταση 1)

$$\frac{BG}{BH} = \frac{(ABG)}{(ABH)}$$

οπότε ισχύει και

$$\frac{(ABG)}{(ABH)} = \frac{(BG)^2}{(EZ)^2}$$

Πόρισμα

Αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, ο λόγος του πρώτου προς το τρίτο ισούται με το λόγο των εμβαδών των όμοιων πολυγώνων που αναγράφονται με πλευρές το πρώτο και δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα.

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

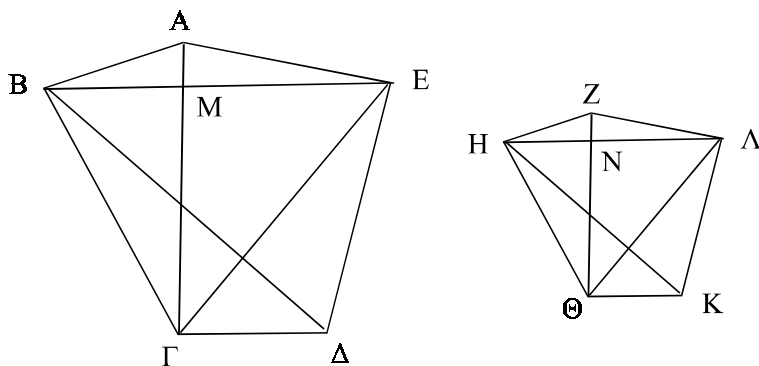
Η πρόταση αυτή είναι εισαγωγική για μια σειρά προτάσεων που έχουν άμεση αλληλοεξάρτηση και αναφέρονται στα εμβαδά όμοιων σχημάτων (προτάσεις 20, 22 και 23). Σύμφωνα με τον Ιωάννη Φιλόπονο και το Μ. Ψελλό [145], είναι προτιμότερο να θεωρούμε όμοια τρίγωνα, γιατί

τα όμοια πολύγωνα μπορούν να χωρισθούν σε τρίγωνα όμοια. Με την παραπάνω άποψη συμφωνεί και ο Heiberg. Δηλαδή, οι παραπάνω μελετητές λαμβάνουν υπόψη και την επόμενη πρόταση 20.

Πρόταση 20 (VI. 20)

Τα όμοια πολύγωνα υποδιαιρούνται στον ίδιο αριθμό όμοιων τριγώνων, τα οποία είναι ομόλογα ως προς όλα τα στοιχεία τους και ο λόγος των εμβαδών των δύο πολυγώνων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους.

Απόδειξη



Σχήμα 32

Θεωρούμε τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ και έστω ότι η ΑΒ είναι ομόλογη προς τη πλευρά ΖΗ (Σχ. 32).

Θα δείξουμε ότι τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ μπορούν να διαιρεθούν στο ίδιο αριθμό τριγώνων που είναι ανά δύο όμοια μεταξύ τους.

Φέρουμε τις ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ και ΛΘ και αφού τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΚΛ είναι όμοια με τις ΑΒ, ΑΕ, ομόλογες πλευρές προς τις ΖΗ, ΖΛ αντίστοιχα, θα είναι $\hat{B}\hat{A}\hat{E} = \hat{H}\hat{Z}\hat{A}$ και $\frac{BA}{AE} = \frac{HZ}{Z\Lambda}$ (ορισμός 1).

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΗΖΛ είναι όμοια (πρόταση 6), οπότε θα είναι και $\hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{Z}\hat{H}\hat{\Lambda}$. Όμως είναι και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{Z}\hat{H}\hat{\Theta}$ από την

ομοιότητα των πολυγώνων, οπότε και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} - \hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{Z}\hat{H}\hat{\Theta} - \hat{Z}\hat{H}\hat{\Lambda}$ ή
 $\hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Lambda}\hat{H}\hat{\Theta}$

Επιπλέον έχουμε:

$$\frac{EB}{BA} = \frac{\Lambda H}{HZ} \quad (\text{από ομοιότητα των τριγώνων } ABE, ZH\Lambda) \text{ και}$$

$$\frac{BA}{B\Gamma} = \frac{HZ}{H\Theta} \quad (\text{από ομοιότητα πολυγώνων}),$$

οπότε προκύπτει και ότι (πολλαπλασιασμός κατά μέλη), (πρόταση V.22).

$$\frac{EB}{B\Gamma} = \frac{\Lambda H}{H\Theta}$$

Άρα τα τρίγωνα $EB\Gamma$, $\Lambda H\Theta$ έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, οπότε τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $\Lambda H\Theta$ είναι όμοια (πρόταση 6).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και τα τρίγωνα $E\Gamma\Delta$ και $\Lambda\Theta K$ είναι όμοια.

Θα δείξουμε και ότι τα όμοια ανά δύο τρίγωνα στα οποία υποδιαιρέσαμε τα πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ είναι ομόλογα ως προς όλα, δηλαδή έχουν εμβαδά ανάλογα ως εξής:

$$\frac{(ABE)}{(ZH\Lambda)} = \frac{(EB\Gamma)}{(\Lambda H\Theta)} = \frac{(E\Gamma\Delta)}{(\Lambda\Theta K)}$$

Επιπλέον θα δείξουμε ότι:

$$\frac{(AB\Gamma\Delta E)}{(ZH\Theta K\Lambda)} = \frac{(AB)^2}{(ZH)^2}$$

Φέρουμε τις $A\Gamma$, $Z\Theta$. Από την ομοιότητα των πολυγώνων έχουμε ότι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{Z}\hat{H}\hat{\Theta}$ και $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{ZH}{H\Theta}$,

οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZH\Theta$ είναι όμοια (πρόταση 6).

Άρα θα είναι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{H}\hat{Z}\hat{\Theta}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{H}\hat{\Theta}\hat{Z}$. Έχουμε δηλαδή ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{M} = \hat{H}\hat{Z}\hat{N}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{M} = \hat{Z}\hat{H}\hat{N}$, οπότε θα είναι και $\hat{A}\hat{M}\hat{B} = \hat{Z}\hat{N}\hat{H}$ (πρόταση I. 32), και τα τρίγωνα ABM και ZHN είναι όμοια.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι όμοιο προς το τρίγωνο $HN\Theta$. Έτσι έχουμε $\frac{AM}{MB} = \frac{ZN}{NH}$, $\frac{BM}{M\Gamma} = \frac{HN}{N\Theta}$ (πρόταση 4),

οπότε, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη θα είναι και $\frac{AM}{M\Gamma} = \frac{ZN}{N\Theta}$.

Όμως τα τρίγωνα ABM , $MB\Gamma$ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή B , οπότε:

$$\frac{AM}{M\Gamma} = \frac{(ABM)}{(MB\Gamma)}$$

και ομοίως

$$\frac{AM}{M\Gamma} = \frac{(AME)}{(EM\Gamma)}$$

Άρα θα είναι

$$\frac{AM}{M\Gamma} = \frac{(ABM) + (AME)}{(MB\Gamma) + (EM\Gamma)} = \frac{(ABE)}{(GBE)} \quad (\text{πρόταση V. 12}).$$

Ομοίως έχουμε και την ισότητα

$$\frac{ZN}{N\Theta} = \frac{(ZH\Lambda)}{(H\Lambda\Theta)}$$

οπότε από τις παραπάνω ισότητες θα έχουμε

$$\frac{(ABE)}{(GBE)} = \frac{(ZH\Lambda)}{(H\Lambda\Theta)} \quad \text{ή} \quad \frac{(ABE)}{(ZH\Lambda)} = \frac{(GBE)}{(H\Lambda\Theta)}$$

Αν φέρουμε τις $B\Delta$ και $H\K$, ομοίως αποδεικνύουμε ότι

$$\frac{(GBE)}{(H\Lambda\Theta)} = \frac{(E\Gamma\Delta)}{(\Lambda\Theta\K)}$$

οπότε έχουμε και

$$\frac{(ABE)}{(ZH\Lambda)} = \frac{(GBE)}{(H\Lambda\Theta)} = \frac{(E\Gamma\Delta)}{(\Lambda\Theta\K)} = \frac{(ABE) + (GBE) + (E\Gamma\Delta)}{(ZH\Lambda) + (H\Lambda\Theta) + (\Lambda\Theta\K)} = \frac{(AB\Gamma\Delta E)}{(ZH\Theta\K\Lambda)}$$

Όμως είναι

$$\frac{(ABE)}{(ZHL)} = \frac{(AB)^2}{(ZH)^2} \quad (\text{πρόταση 19}),$$

οπότε θα έχουμε

$$\frac{(ABΓΔΕ)}{(ZHΘΚΛ)} = \frac{(AB)^2}{(ZH)^2}$$

ὁ.ξ.δ.

Πόρισμα 1^ο

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τετραπλεύρων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους.

Πόρισμα 2^ο

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται προ το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους.

Παρατηρήσεις

1. Αν θεωρήσουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα α είναι τρίτη ανάλογος των ευθύγραμμων τμημάτων AB και ZH , τότε το AB προς το α έχει λόγο ίσο προς το λόγο του τετραγώνου του AB προς το τετράγωνο του ZH .

2. Τα παραπάνω έχουν αποδειχθεί και για τρίγωνα, οπότε είναι γενικά φανερό ότι, αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, τότε ο λόγος του πρώτου προς το τρίτο θα είναι ίσος προς το λόγο των εμβαδών των σχημάτων που αναγράφονται πάνω στο πρώτο και δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα και είναι όμοια και ομοίως αναγραφόμενα.

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν ισχύει η ισότητα

$$\frac{AB}{ZH} = \frac{ZH}{\alpha}$$

τότε προκύπτουν και οι ισότητες:

$$\frac{AB}{\alpha} = \frac{(ZH)^2}{\alpha^2} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{\alpha} = \frac{(AB)^2}{(ZH)^2}$$

Σχόλια

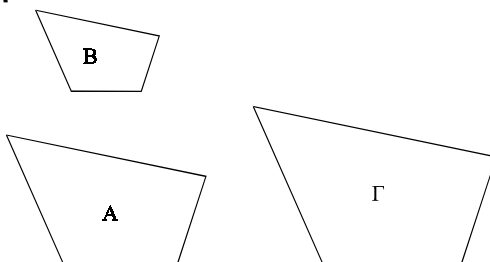
Ο Heiberg επισημαίνει το γεγονός ότι υπάρχουν και άλλες αποδείξεις της πρότασης 20 σε διάφορους κώδικες. Αλλά και νεότεροι μεταφραστές έδωσαν "διαφορετικές" αποδείξεις, που όμως όλες στηρίζονται στην έννοια "*όμοια τρίγωνα*", ομοίως κείμενα.

Η πρόταση 20 χρησιμοποιείται στις προτάσεις 22 και στο βιβλίο XII.

Πρόταση 21 (VI. 21)

Δύο πολύγωνα που είναι όμοια προς το ίδιο πολύγωνο είναι και μεταξύ τους όμοια.

Απόδειξη



Σχήμα 33

Υποθέτουμε ότι τα πολύγωνα A, B είναι όμοια προς το πολύγωνο Γ (Σχ. 33). Θα δείξουμε ότι και τα πολύγωνα A, B είναι όμοια μεταξύ τους.

Πράγματι, επειδή το πολύγωνο A είναι όμοιο προς το πολύγωνο Γ, θα είναι ισογώνιο με αυτό και οι πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες θα είναι ανάλογες. Ομοίως και το πολύγωνο B θα είναι ισογώνιο προς το πολύγωνο Γ και οι πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες θα είναι ανάλογες. Επομένως και το πολύγωνο A θα έχει ίσες γωνίες με το πολύγωνο B και οι πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες θα είναι ανάλογες. Δηλαδή τα πολύγωνα A, B είναι όμοια (ορισμός 1).

ὁ.ῥ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 21 εκφράζει τη μεταβατική ιδιότητα της έννοιας "*ομοιότητα*", δηλαδή κατά τη σύγχρονη ορολογία η "*ομοιότητα*" είναι μια ισοδυναμία.

Η απόδειξη της πρότασης 21 γίνεται με τη βοήθεια του ορισμού VI.1, που προφανώς αποτελεί μια συνέπεια της κοινής έννοιας 1, όπως και η μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας ευθειών. Ο Heiberg πιστεύει ότι οι τελευταίες φράσεις της απόδειξης οφείλονται στο Θέωνα.

Πρόταση 22 (VI. 22)

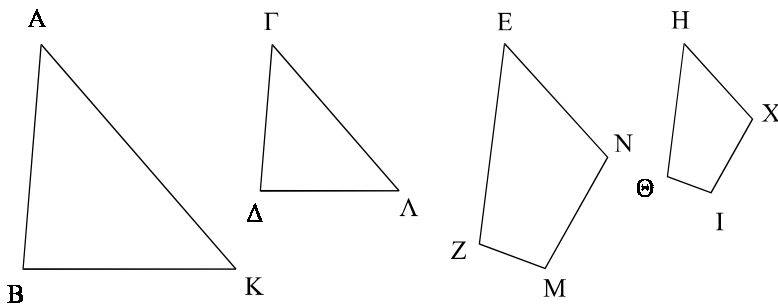
Αν τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα και τα όμοια πολύγωνα που έχουν μία πλευρά τους ένα από τα παραπάνω ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα, με την ίδια σειρά λαμβανόμενα, είναι ανάλογα και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τέσσερα ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ δηλαδή ισχύει:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{\text{Η}\Theta}$$

και γράφουμε με πλευρές AB, ΓΔ δύο όμοια και ομοίως κείμενα τρίγωνα KAB, ΛΓΔ ενώ με πλευρές EZ, ΗΘ γράφουμε δύο όμοια και ομοίως κείμενα τετράπλευρα EZMN και ΗΘΙΧ (Σχ. 34).



Σχήμα 34

Θα δείξουμε ότι τα εμβαδά των παραπάνω τριγώνων και τετραπλεύρων είναι ανάλογα, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{(KAB)}{(\Lambda\Gamma\Delta)} = \frac{(EZMN)}{(H\Theta I\chi)}$$

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα α , που είναι τρίτη ανάλογος των τμημάτων AB , $\Gamma\Delta$ και το ευθύγραμμο τμήμα β , που είναι τρίτη ανάλογος των EZ και $H\Theta$ (πρόταση 11). Τότε θα έχουμε:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \quad \text{και} \quad \frac{EZ}{H\Theta} = \frac{H\Theta}{\beta}$$

Οπότε, λόγω της υπόθεσης θα είναι

$$\frac{\Gamma\Delta}{\alpha} = \frac{H\Theta}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{\alpha} = \frac{EZ}{\beta}$$

Όμως θα έχουμε (πόρισμα πρότασης 19)

$$\frac{AB}{\alpha} = \frac{(KAB)}{(\Lambda\Gamma\Delta)} \quad \text{και} \quad \frac{EZ}{\beta} = \frac{(EZMN)}{(H\Theta IX)}$$

οπότε προκύπτει και ότι

$$\frac{(KAB)}{(\Lambda\Gamma\Delta)} = \frac{(EZMN)}{(H\Theta IX)}$$

Αντίστροφα. Υποθέτουμε ότι αληθεύει η ισότητα

$$\frac{(KAB)}{(\Lambda\Gamma\Delta)} = \frac{(EZMN)}{(H\Theta IX)}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η ισότητα

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta}$$

Αν δεν αληθεύει η παραπάνω ισότητα, τότε θα υπάρχει (πρόβλημα 12) ευθύγραμμο τμήμα ΠP τέτοιο, ώστε

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{\Pi P}$$

Με πλευρά ΠΡ γράφουμε τετράπλευρο όμοιο και ομοίως κείμενο προς τα τετράπλευρα ΕΖΜΝ και ΗΘΙΧ (πρόταση 18).

Τότε θα είναι, σύμφωνα με το πρώτο μέρος του θεωρήματος

$$\frac{(ΚΑΒ)}{(ΛΓΔ)} = \frac{(ΕΖΜΝ)}{(ΠΡΣΤ)}$$

οπότε, λόγω της υπόθεσης για το αντίστροφο του θεωρήματος, θα έχουμε

$$\frac{(ΕΖΜΝ)}{(ΗΘΙΧ)} = \frac{(ΕΖΜΝ)}{(ΠΡΣΤ)}$$

με συνέπεια την ισότητα $(ΗΘΙΧ) = (ΠΡΣΤ)$.

Επειδή το τετράπλευρο ΠΡΣΤ είναι όμοιο και ομοίως κείμενο προς το τετράπλευρο ΗΘΙΧ και $(ΗΘΙΧ) = (ΠΡΣΤ)$, θα έχουμε και ότι

$$\frac{(ΗΘ)^2}{(ΠΡ)^2} = \frac{(ΗΘΙΧ)}{(ΠΡΣΤ)} = 1 \quad \text{ή} \quad ΗΘ = ΠΡ$$

Επομένως, από την ισότητα $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΕΖ}{ΠΡ}$ προκύπτει ότι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΕΖ}{ΗΘ}$

ὁ.ἔ.δ.

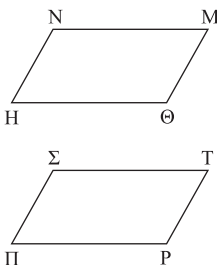
Λήμμα

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια και ισεμβαδικά, τότε οι ομόλογες πλευρές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω όμοια και ίσα πολύγωνα ΗΘΜΝ και ΠΡΤΣ, και έστω

$$\frac{ΘΗ}{ΗΝ} = \frac{ΠΡ}{ΠΣ} \quad (\Sigma\chi.35)$$



Σχήμα 35

Θα δείξουμε ότι $\Theta H = P\Pi$.

Αν υποθέσουμε ότι ήταν άνισες, τότε η μία από αυτές θα ήταν μεγαλύτερη από την άλλη και έστω $P\Pi > \Theta H$.

Επειδή είναι

$$\frac{P\Pi}{\Pi\Sigma} = \frac{\Theta H}{H\Nu} \quad \text{ή} \quad \frac{P\Pi}{\Theta H} = \frac{\Pi\Sigma}{H\Nu}$$

και $P\Pi > \Theta H$, θα είναι $\Pi\Sigma > H\Nu$, με συνέπεια και $(\Pi P T \Sigma) > (H \Theta M N)$, που αντίκειται στην υπόθεση. Επομένως, οι πλευρές ΘH και $P\Pi$ δεν είναι δυνατόν να είναι άνισες, οπότε θα είναι ίσες.

Σχόλια

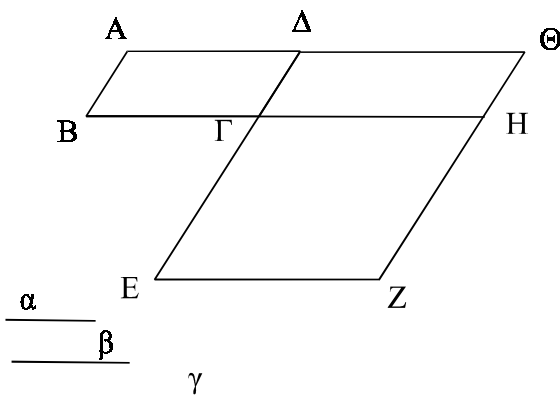
Μια εφαρμογή της πρότασης 22 είναι η πρόταση 37 του βιβλίου XI των *Στοιχείων*. Εφαρμογές της πρότασης αυτής βρίσκουμε και σε προτάσεις των "*Δεδομένων*" (προτάσεις 50, 51, 54), όπως αναφέρει ο Heath.

Ο De Morgan σημειώνει ότι για την απόδειξη του δεύτερου μέρους της πρότασης 22, αντί του λήμματος που υπάρχει, θα ήταν προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί το λήμμα: "*Δεν είναι δυνατόν δύο διαφορετικοί λόγοι να έχουν ίσα τετράγωνα*".

Πρόταση 23 (VI. 23)

Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το λόγο των γινομένων των πλευρών τους.

Απόδειξη



Σχήμα 36

Θεωρούμε τα ισογώνια παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$ και $EZHΓ$, που έχουν $\hat{BΓΔ} = \hat{EΓΗ}$ (Σχ.36).

$$\text{Θα δείξουμε ότι } \frac{(ABΓΔ)}{(EZHΓ)} = \frac{BΓ}{ΓΗ} \cdot \frac{ΔΓ}{ΓΕ}$$

Αν πάρουμε τις πλευρές $BΓ$ και $ΓΗ$ στην ίδια ευθεία, τότε και οι πλευρές $ΓΔ$ και $ΓΕ$ θα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $ΔΓΗΘ$ και παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ τέτοια, ώστε

$$\frac{BΓ}{ΓΗ} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{ΔΓ}{ΓΕ} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Επομένως, ο λόγος $\frac{\alpha}{\gamma}$ αποτελείται από τους λόγους $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\gamma}$, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{BΓ}{ΓΗ} : \frac{ΓΕ}{ΔΓ} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{BΓ}{ΓΗ} \cdot \frac{ΔΓ}{ΓΕ}$$

$$\text{Επιπλέον, έχουμε ότι (πρόταση 1)} \quad \frac{(ABΓΔ)}{(ΓΗΘΔ)} = \frac{BΓ}{ΓΗ}$$

$$\text{και αφού } \frac{B\Gamma}{\Gamma H} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ θα είναι } \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\Gamma H\Theta\Delta)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{Ομοίως θα έχουμε και ότι (πρόταση 1)} \quad \frac{(\Gamma H\Theta\Delta)}{(\text{EZ}\text{H}\Gamma)} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\text{E}}$$

$$\text{και αφού } \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\text{E}} = \frac{\beta}{\gamma}, \text{ θα είναι } \frac{(\Gamma H\Theta\Delta)}{(\text{EZ}\text{H}\Gamma)} = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\text{Από τις ισότητες } \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\Gamma H\Theta\Delta)} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ και } \frac{(\Gamma H\Theta\Delta)}{(\text{EZ}\text{H}\Gamma)} = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\text{προκύπτει με πολλαπλασιασμό κατά μέλη ότι } \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\text{EZ}\text{H}\Gamma)} = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ και αφού,}$$

$$\text{όπως δείξαμε παραπάνω, είναι } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{B\Gamma}{\Gamma H} \cdot \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\text{E}}, \text{ θα έχουμε:}$$

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\text{EZ}\text{H}\Gamma)} = \frac{B\Gamma}{\Gamma H} \cdot \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\text{E}}$$

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Παρόμοια πρόταση με την 23 υπάρχει και στα "Δεδομένα" (προτάσεις 68, 69 70). Προφανώς, η 23 μπορεί να αποδειχθεί και με ιδιότητες του γινώμονα.

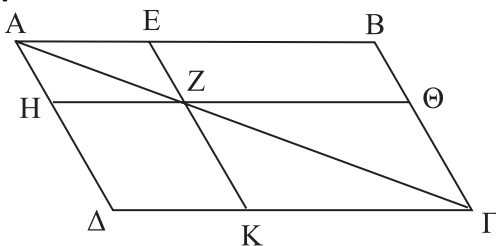
Από την πρόταση 23 έπεται άμεσα ότι ορθογώνια και συνεπώς τυχόντα παραλληλόγραμμα ή τρίγωνα έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το σύνθετο λόγο του λόγου των βάσεων τους προς το λόγο των υψών τους.

Η αντίστροφη της πρότασης 23 είναι επίσης αληθής. Γενικότερα ισχύει ότι:

Αν δύο παραλληλόγραμμα ή τρίγωνα έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το σύνθετο λόγο των λόγων δύο γειτονικών πλευρών τους, τότε οι γωνίες που περιέχονται από τις πλευρές αυτές είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Πρόταση 24 (VI. 24)

Σε κάθε παραλληλόγραμμο τα παραλληλόγραμμα που γράφονται γύρω από μια διαγώνιο είναι όμοια μεταξύ τους καθώς και με το αρχικό παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

Σχήμα 37

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από σημείο Ζ της διαγώνιου φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του παραλληλογράμμου. Σχηματίζουμε έτσι παραλληλόγραμμο ΑΕΖΗ και ΖΘΓΚ γύρω από την διαγώνιο ΑΓ (Σχ. 37).

Θα δείξουμε ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΕΖΗ και ΖΘΓΚ είναι όμοια μεταξύ τους και όμοια προς το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΕΖ είναι παράλληλη προς την ΒΓ, οπότε από την πρόταση 2 θα είναι

$$\frac{BE}{EA} = \frac{GZ}{ZA}$$

Επίσης στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΖΗ είναι παράλληλη προς την ΓΔ, οπότε από την πρόταση 2 θα είναι:

$$\frac{GZ}{ZA} = \frac{DH}{HA}$$

Επομένως, θα είναι

$$\frac{BE}{EA} = \frac{DH}{HA}$$

Με σύνθεση των δύο λόγων προκύπτει ότι

$$\frac{BE + EA}{EA} = \frac{DH + HA}{HA} \quad \text{ή} \quad \frac{BA}{EA} = \frac{DA}{HA} \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{DA} = \frac{EA}{HA}$$

δηλαδή οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΑΕΖΗ που περιέχουν την κοινή γωνία $\hat{B\hat{A}A}$ είναι ανάλογες.

Επιπλέον, η ΗΖ είναι παράλληλη προς την ΔΓ, οπότε θα είναι $\hat{A\hat{Z}H} = \hat{\Delta\hat{\Gamma}A}$ και, αφού η γωνία $\hat{\Delta\hat{\Gamma}A}$ των τριγώνων ΗΑΖ και ΔΑΓ είναι κοινή τους γωνία, τα τρίγωνα αυτά θα είναι ισογώνια. Επομένως θα έχουν και $\hat{A\hat{H}Z} = \hat{A\hat{\Delta}\Gamma}$, οπότε τα παραλληλόγραμμα ΑΕΖΗ και ΑΒΓΔ είναι ισογώνια.

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 4, θα έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{H\text{Z}}{Z\text{E}}, \quad \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma A} = \frac{H\text{Z}}{Z A}, \quad \frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A\text{Z}}{Z\text{E}}, \quad \frac{\Gamma B}{B A} = \frac{Z\text{E}}{E A}$$

Από τις δύο παραπάνω ενδιάμεσες ισότητες προκύπτει ότι

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma B} = \frac{H\text{Z}}{Z\text{E}} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{H\text{Z}}{H A}$$

Δηλαδή, οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΑΕΖΗ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο ΑΕΖΗ.

Για τους ίδιους λόγους το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο ΖΘΓΚ.

Επομένως, από την πρόταση 21 και τα παραλληλόγραμμα ΑΕΖΗ και ΖΘΓΚ θα είναι όμοια μεταξύ τους.

ὁ.ἔ.δ.

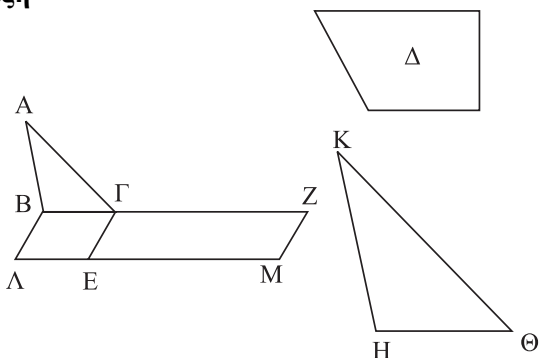
Σχόλιο

Ο Heath [83] γράφει ότι ο Simpson έχει τη γνώμη ότι η απόδειξη αυτή πρέπει να έγινε από κάποιον εκδότη που δε γνώριζε καλά το θέμα αυτό, αφού οι πλευρές των παραλληλογράμμων που περιέχουν την ίδια γωνία είναι ανάλογες.

Πρόταση 25 (VI. 25)

Να κατασκευασθεί σχήμα, το οποίο να είναι όμοιο προς δοθέν σχήμα και ισεμβαδικό προς δοθέν πολύγωνο.

Απόδειξη



Σχήμα 38

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο πολύγωνο Δ (Σχ. 38). Θα κατασκευάσουμε τρίγωνο όμοιο προς το $AB\Gamma$ και ισεμβαδικό προς το δοθέν πολύγωνο Δ .

Με πλευρά $B\Gamma$ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο $BΓΕΛ$ ισεμβαδικό προς το τρίγωνο $AB\Gamma$ και μετά, προεκτείνοντας τις $B\Gamma$, ΔE , κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο $\Gamma ΕΜΖ$ ισεμβαδικό προς το δοθέν πολύγωνο Δ . Στη συνέχεια παίρνουμε την $H\Theta$ μέση ανάλογο των $B\Gamma$, ΓZ και κατασκευάζουμε τρίγωνο $KΗ\Theta$ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το τρίγωνο $AB\Gamma$ (πρόταση 18).

Επειδή είναι

$$\frac{B\Gamma}{H\Theta} = \frac{H\Theta}{\Gamma Z}$$

σύμφωνα με το πόρισμα της πρότασης 19, θα έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(K\eta\Theta)} = \frac{B\Gamma}{\Gamma Z}$$

Επίσης, σύμφωνα με την πρόταση 1, έχουμε:

$$\frac{(B\Gamma E\Lambda)}{(\Gamma E M Z)} = \frac{B\Gamma}{\Gamma Z}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(K\eta\Theta)} = \frac{(B\Gamma E\Lambda)}{(\Gamma E M Z)} \quad \text{ή} \quad \frac{(AB\Gamma)}{(B\Gamma E\Lambda)} = \frac{(K\eta\Theta)}{(\Gamma E M Z)}$$

και αφού $(AB\Gamma) = (B\Gamma\epsilon\Lambda)$, έπεται ότι: $(K\Theta) = (\Gamma\epsilon MZ)$, οπότε το τρίγωνο $K\Theta$ θα είναι ισεµβαδικό προς το πολύγωνο Δ .

Άρα το τρίγωνο $K\Theta$ έχει κατασκευασθεί όµοιο προς το τρίγωνο $AB\Gamma$ και είναι ισεµβαδικό προς το πολύγωνο Δ .

ὅ.ξ.δ.

Σχόλια

Σύμφωνα με τον Πλούταρχο (Συμποσιαστές VIII. 2,4), το σημαντικό αυτό πρόβλημα επιλύθηκε για πρώτη φορά από τους Πυθαγορείους.

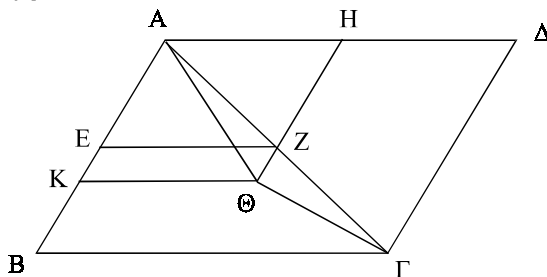
Ο Ευκλείδης στα "Δεδομένα" παραθέτει ανάλογα προβλήματα για το χώρο. Δεν είναι εξάλλου τυχαίο το γεγονός ότι ο Ευκλείδης κατανοεί ότι, προκειμένου να γίνει η κατασκευή, αρκεί να γίνει για τρίγωνα.

8. Γεωμετρική Άλγεβρα

Πρόταση 26 (VI. 26)

Αν από παραλληλόγραμμο αφαιρεθεί παραλληλόγραμμο όμοιο, ομοίως κείμενο και με μία γωνία κοινή με αυτό, τότε το αφαιρούμενο παραλληλόγραμμο θα έχει διαγώνιο ένα τμήμα μιας διαγωνίου του αρχικού παραλληλογράμμου, θα είναι δηλαδή περί την ίδια διαγώνιο με το αρχικό παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη



Σχήμα 39

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο $AHZE$ με κοινή τη γωνία $\hat{A}$ και όμοιο με το αρχικό (Σχ. 39). Θα δείξουμε ότι η $AZ\Gamma$ είναι διαγώνιος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, δηλαδή ότι το Z βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο $A\Gamma$.

Αν υποθέσουμε ότι η $AZ\Gamma$ δεν είναι διαγώνιος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, τότε θα υπάρχει άλλη διαγώνιος, την οποία τέμνει η EZ , έστω ότι την τέμνει στο Θ , δηλαδή θα είναι η $A\Theta\Gamma$ διαγώνιος (προτάσεις I. 30, I. 31).

Επειδή το παραλληλόγραμμο $AH\Theta K$ είναι περί την ίδια διαγώνιο με το $AB\Gamma\Delta$, θα έχουμε:

$$\frac{\Delta A}{AB} = \frac{HA}{AK}$$

Όμως, το παραλληλόγραμμο $AHZE$ είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, οπότε:

$$\frac{\Delta A}{AB} = \frac{HA}{AE}$$

Επομένως θα έχουμε και

$$\frac{HA}{AK} = \frac{HA}{AE},$$

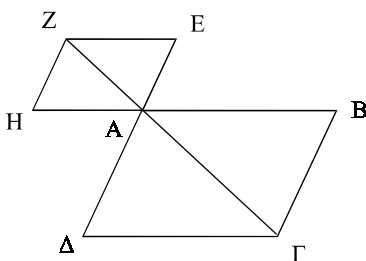
οπότε $AK = AE$, ή ισοδύναμα, $HZ = H\Theta$ (πρόταση V. 9), που αντίκειται στην υπόθεσή μας. Άρα η $AZ\Gamma$ είναι διαγώνιος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

ὁ.ἔ.δ.

Σχόλια

Η πρόταση 26 ουσιαστικά είναι η αντίστροφη της πρότασης 24 και, σύμφωνα με το Heath, δεν υπάρχει λόγος να διαχωριστούν οι δύο αυτές προτάσεις από την πρόταση 25.

Η πρόταση επίσης αληθεύει και όταν το "αφαιρούμενο" παραλληλόγραμμο βρίσκεται στο εξωτερικό του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 40). Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη που δίνει ο Ευκλείδης.



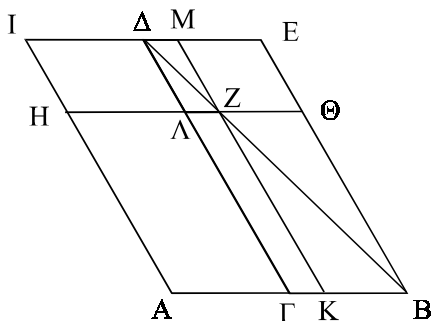
Σχήμα 40

Πρόταση 27 (VI. 27)

Από όλα τα παραλληλόγραμμα που έχουν μία πλευρά πάνω σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα και από τα οποία λείπουν παραλληλόγραμμα όμοια και ομοίως κείμενα προς αυτό που γράφεται με πλευρά το μισό του ευθύγραμμου τμήματος, μέγιστο είναι αυτό που γράφεται με πλευρά το μισό του ευθύγραμμου τμήματος και είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμα που λείπει.

Απόδειξη

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσο Γ . Με πλευρά $A\Gamma$ γράφουμε παραλληλόγραμμα $A\Gamma\Delta I$, από το οποίο λείπει το παραλληλόγραμμα $\Gamma B E \Delta$ για να συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμα $A B E I$ (Σχ. 41).



Σχήμα 41

Θεωρούμε και τυχαίο σημείο K του ευθύγραμμου τμήματος AB , διαφορετικό από το Γ και γράφουμε παραλληλόγραμμα $AKZH$, από το οποίο λείπει το παραλληλόγραμμα $KB\Theta Z$, που είναι όμοιο και ομοίως κείμενο προς το παραλληλόγραμμα $A\Gamma\Delta I$, για να συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμα $AB\Theta H$.

Θα δείξουμε ότι $(A\Gamma\Delta I) > (AKZH)$.

Επειδή το παραλληλόγραμμα $\Gamma B E \Delta$ είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμα $KB\Theta Z$, σύμφωνα με την πρόταση 26, αυτά θα είναι γύρω από την ίδια διαγώνιο ΔB .

Επομένως, αν συμπληρώσουμε το παραλληλόγραμμα $Z\Theta E M$, θα έχουμε $(\Gamma K Z \Lambda) = (Z\Theta E M)$ και αν προσθέσουμε σ' αυτά το $(KB\Theta Z)$, θα προκύψει η ισότητα $(\Gamma B \Theta \Lambda) = (KB E M)$ ή ισοδύναμα $(A\Gamma \Lambda H) = (KB E M)$, αφού $A\Gamma = \Gamma B$, (πρόταση 1).

Αν στην τελευταία ισότητα προσθέσουμε το εμβαδόν $(\Gamma K Z \Lambda)$, θα προκύψουν οι σχέσεις:

$$(AKZH) = (ΓΚΖΛ) + (KBEM) \text{ ή}$$

$$(AKZH) < (ΓΒΕΔ) \text{ ή}$$

$$(AKZH) < (ΑΓΔΙ)$$

ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Σε πολλούς κώδικες εξετάζονται και άλλες περιπτώσεις από αυτήν που εξετάζει ο Ευκλείδης, π.χ. όταν το Κ βρίσκεται μεταξύ των Α, Γ.

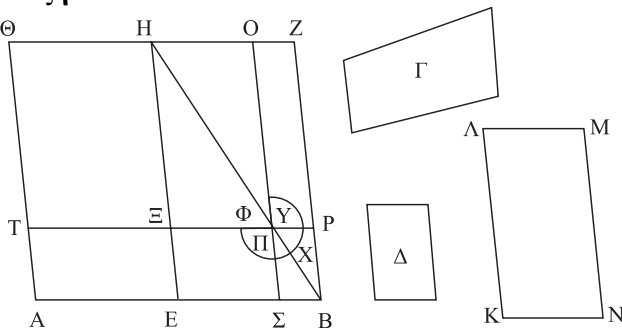
Ο Heiberg όμως δεν τις θεώρησε σημαντικές και δεν τις περιέλαβε στο κείμενο των *Στοιχείων*, αλλά στο παράρτημά του.

Διάφοροι σχολιαστές παρατήρησαν ότι για να έχει το πρόβλημα λύση, πρέπει η εξίσωση $ax - x^2 = \beta^2$ να έχει λύση, όπου $AB = \alpha$, $AK = y$, $KB = x$ και $xy = \beta^2$.

Πρόταση 28 (VI. 28)

Πάνω σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να γραφεί παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρέσουμε παραλληλόγραμμο, όμοιο και ομοίως κείμενο με δοσμένο παραλληλόγραμμο Δ, το παραλληλόγραμμο που μένει είναι ισοδύναμο με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ. Το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ δεν μπορεί να έχει εμβαδό μεγαλύτερο από το εμβαδόν παραλληλογράμμου που γράφεται με πλευρά το μισό του ευθυγράμμου τμήματος και είναι όμοιο με αυτό που αφαιρούμε.

Απόδειξη



Σχήμα 42

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB , πολύγωνο Γ και παραλληλόγραμμο Δ (Σχ. 42). Αν E το μέσο της AB , κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $EBZH$ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ καθώς και το παραλληλόγραμμο $AEH\Theta$.

Το Γ δεν μπορεί να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του $AEH\Theta$. Αν $(AEH\Theta) = (\Gamma)$, τότε το πρόβλημα έχειλυθεί, αφού

$$(ABZ\Theta) = (\Gamma) + (EBZH)$$

και το $EBZ\Theta$ είναι όμοιο με το Δ . Αν, όμως, το $AEH\Theta$ είναι μεγαλύτερο του Γ , τότε και το $EBZH$ θα είναι μεγαλύτερο του Γ .

Έστω $K\Lambda MN$ παραλληλόγραμμο όμοιο και ομοίως κείμενο του Δ που έχει εμβαδόν τη διαφορά των εμβαδών των $EBZH$ και Γ . Άρα το $K\Lambda MN$ είναι όμοιο και ομοίως κείμενο με το $EBZH$

Έστω ότι η $K\Lambda$ είναι ομόλογος της EH και η ΛM της HZ . Επειδή

$$(EBZH) = (\Gamma) + (K\Lambda MN) \quad \text{τότε} \quad (EBZH) > (K\Lambda MN)$$

οπότε $HE > K\Lambda$, $HZ > \Lambda M$. Επί της EH παίρνουμε $H\Xi = K\Lambda$ και επί της HZ παίρνουμε $HO = \Lambda M$, οπότε δημιουργείται το παραλληλόγραμμο $H\Xi\Pi O$, το οποίο είναι όμοιο με το $K\Lambda MN$, άρα και με το $HEBZ$. Τότε, όμως (πρόταση 26) το Π βρίσκεται στη διαγώνιο HB . Από το Π φέρουμε τις $PT \parallel AB$, $O\Sigma \parallel BZ$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο γνώμονας $YX\Phi$ έχει το ίδιο εμβαδόν με το Γ και επειδή

$$(\Pi PZO) = (E\Sigma\Pi\Xi) \quad \text{τότε} \quad (BZO\Sigma) = (B\Pi\Xi E).$$

Αλλά το $(B\Pi\Xi E) = (E\Xi T A)$, οπότε το $(A\Sigma\Pi T)$ είναι ίσο με όλον το γνώμονα $YX\Phi$, ο οποίος έχει το ίδιο εμβαδόν με το Γ .

Επομένως, $(ABPT) = (A\Sigma\Pi T) + (\Sigma B\Pi P) = (\Gamma) + (\Sigma B\Pi P)$ και το $\Sigma B\Pi P$ είναι όμοιο και ομοίως κείμενο με το Δ .

ὅ.ἔ.π.

Σχόλια

Στην πρόταση 28, όπως και στις 27 και 29, ο Ευκλείδης υποθέτει ότι αν δύο όμοια παραλληλόγραμμα έχουν εμβαδά άνισα, τότε το μεγαλύτερο έχει τις αντίστοιχες πλευρές μεγαλύτερες από αυτές του μικρότερου. Αυτή η πρόταση είναι το γεωμετρικό ισοδύναμο της συνθήκης για

να έχει λύση η εξίσωση $ax - \frac{\beta}{\gamma} x^2 = S$, όπου (βλέπε σχήμα. πρόταση 27)

$KB = \frac{\beta}{\gamma} x$, και S το εμβαδόν του ορθογωνίου $AKZH$.

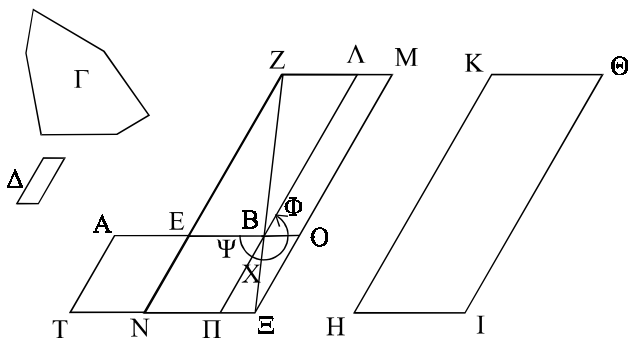
Αντίστοιχες προτάσεις υπάρχουν και στα "Δεδομένα".

Πρόταση 29 (VI. 29)

Πάνω σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να γραφεί παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό προς δοθέν πολύγωνο, το οποίο να είναι όμοιο προς το δοθέν και να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο κατά το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB , το δοθέν πολύγωνο Γ και το δοθέν παραλληλόγραμμο Δ . (Σχ. 43). Πάνω στο AB θα γράψουμε παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό προς το πολύγωνο Γ και το οποίο θα υπερβάλλει το αντίστοιχο παραλληλόγραμμο πλευράς AB κατά παραλληλόγραμμο όμοιο προς το Δ .



Σχήμα 43

Αν είναι E το μέσον του AB , γράφουμε πάνω στο EB παραλληλόγραμμο $EBAZ$ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ . Σύμφωνα με την πρόταση 25, κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο $HIOK$ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ , το οποίο να έχει εμβαδόν ίσο προς το άθροισμα των εμβαδών των Γ και $EBAZ$. Τότε το $HIOK$ θα είναι όμοιο και ομοίως

κείμενο και προς το παραλληλόγραμμο ΕΒΛΖ. Έστω ότι η ΚΘ είναι ομόλογη προς την ΖΛ και η ΚΗ είναι ομόλογη προς την ΖΕ.

Επειδή $(\text{ΗΙΘΚ}) > (\text{ΕΒΛΖ})$, θα είναι και $\text{ΚΘ} > \text{ΖΛ}$ και $\text{ΚΗ} > \text{ΖΕ}$.

Προεκτείνουμε τις ΖΛ και ΖΕ προς το μέρος των Λ και Ε, αντίστοιχα, και θεωρούμε ευθύγραμμα τμήματα ΖΛΜ και ΖΕΝ τέτοια, ώστε

$$\text{ΖΛΜ} = \text{ΚΘ}, \quad \text{ΖΕΝ} = \text{ΚΗ}$$

και συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΖΝΞΜ, το οποίο πλέον είναι ισεμβαδικό και όμοιο προς το παραλληλόγραμμο ΗΙΘΚ.

Επομένως, το ΖΝΞΜ θα είναι όμοιο και προς το παραλληλόγραμμο ΕΒΛΖ, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 26, τα παραλληλόγραμμα ΖΝΞΜ και ΕΒΛΖ θα είναι περί την ίδια διαγώνιο ΖΞ.

Από το Β φέρουμε παραλλήλους προς τις ΖΛ και ΖΕ, που τέμνουν τις ΞΜ και ΝΞ στα σημεία Ο και Π, αντίστοιχα.

Επειδή είναι $(\text{ΗΙΘΚ}) = (\text{ΕΒΛΖ}) + \text{Εμβ}(\Gamma)$ και $(\text{ΗΙΘΚ}) = (\text{ΖΝΞΜ})$, θα είναι και: $(\text{ΖΝΞΜ}) = (\text{ΕΒΛΖ}) + \text{Εμβ}(\Gamma)$. Επομένως:

$$(\text{ΖΝΞΜ}) - (\text{ΕΒΛΖ}) = \text{Εμβ}(\Gamma)$$

οπότε το εμβαδόν του "γνώμονα" ΨΧΦ ισούται προς το εμβαδόν του Γ. Επειδή είναι $\text{ΑΕ} = \text{ΕΒ}$, θα είναι και $(\text{ΑΤΝΕ}) = (\text{ΕΝΠΒ}) = (\text{ΒΟΜΛ})$.

Οπότε:

$$(\text{ΑΤΝΕ}) + (\text{ΕΝΞΟ}) = (\text{ΒΟΜΛ}) + (\text{ΕΝΞΟ}) \quad \text{ή}$$

$$(\text{ΑΤΞΟ}) = \text{Εμβαδόν "γνώμονα" } \Psi\chi\Phi \quad \text{ή}$$

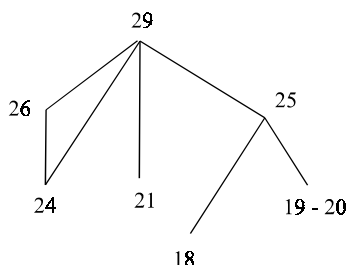
$$(\text{ΑΤΞΟ}) = \text{Εμβ}(\Gamma).$$

Ὡς.ἔ.π.

Σχόλια

Παρόμοια πρόταση παραθέτει ο Ευκλείδης και στα "Δεδομένα".

Ο Mueller [144] παρατηρεί ότι όλες οι προτάσεις του βιβλίου VI μεταξύ των 18 και 27 χρησιμοποιούνται

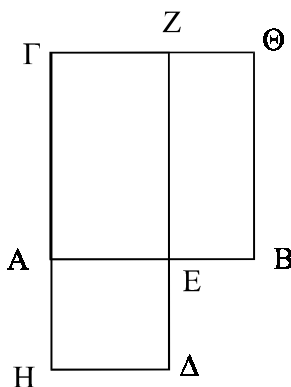


στις προτάσεις 28, 29 με εξαίρεση τις προτάσεις 22, 23. Δίνει ακόμα το παραπάνω διάγραμμα για την δομή της πρότασης 29.

Πρόταση 30 (VI.30)

Να τμηθεί δοθέν ευθύγραμμο τμήμα σε άκρο και μέσο λόγο.

Απόδειξη



Σχήμα 44

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Θα προσδιορίσουμε σημείο Ε στο ΑΒ έτσι ώστε αυτό να χωρίζει το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή να ισχύει:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} \quad (\text{Σχ. 44})$$

Με πλευρά ΑΒ γράφουμε τετράγωνο ΑΒΘΓ και, προεκτείνοντας την πλευρά ΓΑ, κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΓΖΔΗ το οποίο έχει εκτός του τετραγώνου ΑΒΘΓ το παραλληλόγραμμο ΑΕΔΗ, το οποίο είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο ΑΒΘΓ (πρόταση 29).

Επειδή το ΑΒΘΓ είναι τετράγωνο, και το ΑΕΔΗ θα είναι τετράγωνο. Επειδή είναι $(AB\Theta\Gamma) = (\Gamma Z\Delta H)$, αν από τα παραπάνω αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κοινού παραλληλογράμμου ΑΕΖΓ θα προκύψει η ισότητα $(AE\Delta H) = (EB\Theta Z)$. Επιπλέον τα ΑΕΔΗ, ΕΒΘΖ είναι και ισογώνια, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 14, οι πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{ZE}{EA} = \frac{AE}{EB}$$

Όμως έχουμε $ZE = AB$ και $EA = AE$, οπότε $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB}$

και αφού είναι η AB μεγαλύτερη της AE θα είναι και η AE μεγαλύτερη της EB .

ό.ξ.π.

Σχόλια

Παρατηρούμε ότι η κατασκευή της πρότασης 30 είναι μια απευθείας επιμέρους εφαρμογή της 29.

Μια διαφορετική κατασκευή κάνει ο Θέων, παρατηρώντας ότι $EZ = AG = AB$.

Πρόταση 31 (VI. 31)

Στα ορθογώνια τρίγωνα, το πολύγωνο που γράφεται με μία πλευρά την υποτείνουσα, έχει εμβαδόν ίσο προς το άθροισμα των εμβαδών των πολυγώνων τα οποία γράφονται πάνω στις κάθετες πλευρές του τριγώνου και είναι όμοια και ομοίως κείμενα με το πολύγωνο που γράφεται πάνω στην υποτείνουσα.

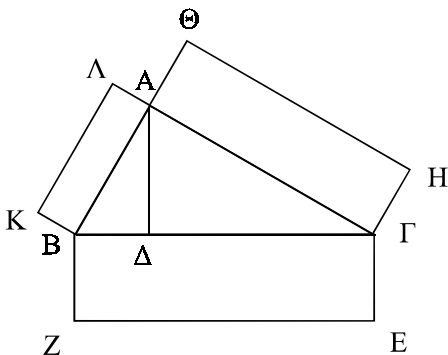
Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθή τη γωνία $\hat{A}$ και επί των τριών πλευρών του κατασκευάζουμε πολύγωνα $B\Gamma EZ$, $A\Gamma H\Theta$ και $ABK\Lambda$, όμοια μεταξύ τους και ομοίως κείμενα (Σχ.45). Θα αποδείξουμε ότι:

$$(B\Gamma EZ) = (ABK\Lambda) + (A\Gamma H\Theta)$$

Φέρουμε το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου. Σύμφωνα με την πρόταση 8, τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια μεταξύ τους και όμοια προς το τρίγωνο $AB\Gamma$, οπότε θα έχουμε

$$\frac{\Gamma B}{BA} = \frac{AB}{B\Delta}$$



Σχήμα 45

Σύμφωνα με το πόρισμα της πρότασης 19, θα ισχύει η ισότητα

$$\frac{(BGEZ)}{(ABK\Lambda)} = \frac{GB}{B\Delta}$$

Ομοίως θα έχουμε και την ισότητα:

$$\frac{(BGEZ)}{(AGH\Theta)} = \frac{BG}{\Gamma\Delta}$$

Από τις παραπάνω ισότητες μπορούμε να έχουμε τις ισότητες

$$\frac{(ABK\Lambda)}{(BGEZ)} = \frac{B\Delta}{GB}, \quad \frac{(AGH\Theta)}{(BGEZ)} = \frac{\Gamma\Delta}{BG}$$

και με πρόσθεση κατά μέλη

$$\frac{(ABK\Lambda) + (AGH\Theta)}{(BGEZ)} = \frac{B\Delta + \Gamma\Delta}{BG} = \frac{BG}{BG} = 1$$

οπότε τελικά προκύπτει ότι:

$$(BGEZ) = (ABK\Lambda) + (AGH\Theta)$$

ὅ.ξ.δ.

Σχόλιο

Την πρόταση 31, που είναι μια επέκταση του Πυθαγορείου θεωρήματος, ο Πρόκλος αποδίδει προσωπικά στον Ευκλείδη.

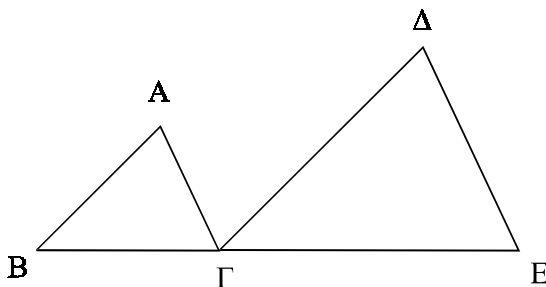
9. Δύο γενικές προτάσεις

Πρόταση 32 (VI. 32)

Αν δύο τρίγωνα, στα οποία οι δύο πλευρές μιας γωνίας του ενός είναι ανάλογες προς τις δύο πλευρές μιας γωνίας του άλλου, τοποθετηθούν έτσι ώστε να έχουν μία κοινή κορυφή και τις ομόλογες πλευρές τους παράλληλες, τότε οι υπόλοιπες πλευρές των τριγώνων θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ που έχουν κοινή την κορυφή Γ , τις πλευρές AB , $A\Gamma$ παράλληλες προς τις πλευρές $\Delta\Gamma$, ΔE αντίστοιχα, και επιπλέον ισχύει $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}$ (Σχ. 46).



Σχήμα 46

Θα δείξουμε ότι οι πλευρές $B\Gamma$ και ΓE βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Επειδή η AB είναι παράλληλη προς τη $\Delta\Gamma$ και αυτές τέμνονται από την $A\Gamma$, οι εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ θα είναι ίσες. Επίσης, ίσες θα είναι και οι γωνίες $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ (πρόταση I. 29). Επομένως θα είναι και

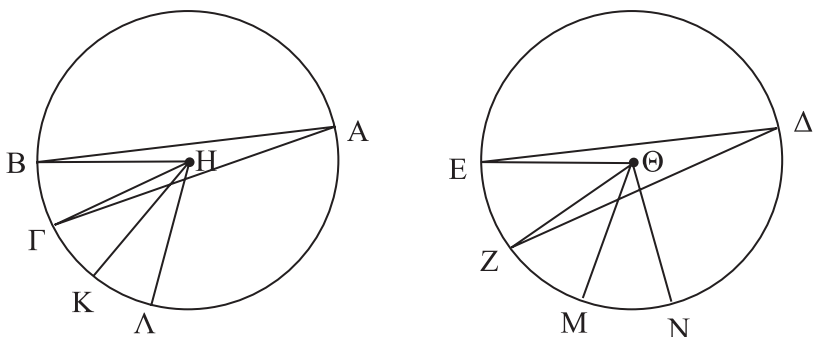
Αν δύο τρίγωνα έχουν πλευρές παράλληλες, τότε οι ευθείες που συνδέουν τις αντίστοιχες κορυφές τους συντρέχουν ή είναι παράλληλες.

Πρόταση 33 (VI. 33)

Σε ίσους κύκλους οι επίκεντρες ή οι εγγεγραμμένες γωνίες είναι όπως τα αντίστοιχα τόξα στα οποία βαίνουν.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Η και Θ, τις επίκεντρες γωνίες $\hat{B}\hat{H}\hat{\Gamma}$, $\hat{E}\hat{\Theta}\hat{Z}$ και τις εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z}$ (Σχ. 48).



Σχήμα 48

Θα δείξουμε ότι τα τόξα $\overset{\cap}{B}\hat{\Gamma}$ και $\overset{\cap}{E}\hat{Z}$ είναι όπως οι επίκεντρες γωνίες $\hat{B}\hat{H}\hat{\Gamma}$ και $\hat{E}\hat{\Theta}\hat{Z}$ και επίσης είναι όπως οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z}$.

Στον κύκλο κέντρου Η παίρνουμε τόξα $\overset{\cap}{\Gamma}\hat{K}$ και $\overset{\cap}{K}\hat{\Lambda}$ ίσα προς το τόξο $\overset{\cap}{B}\hat{\Gamma}$ και στον κύκλο κέντρου Θ παίρνουμε τόξα $\overset{\cap}{Z}\hat{M}$ και $\overset{\cap}{M}\hat{N}$ ίσα προς το τόξο $\overset{\cap}{E}\hat{Z}$.

Φέρουμε τις ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ και ΘΝ.

Επειδή $\overset{\cap}{B}\hat{\Gamma} = \overset{\cap}{\Gamma}\hat{K} = \overset{\cap}{K}\hat{\Lambda}$, θα είναι και (πρόταση III. 27)

$$\hat{B}\hat{H}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{H}\hat{K} = \hat{K}\hat{H}\hat{\Lambda}$$

οπότε, όσες φορές μεγαλύτερο είναι το τόξο $\overset{\cap}{BA}$ από το τόξο $\overset{\cap}{BG}$, τόσες φορές μεγαλύτερη είναι και η γωνία $\overset{\wedge}{BHA}$ από τη γωνία $\overset{\wedge}{BHG}$.

Ομοίως, όσες φορές μεγαλύτερο είναι το τόξο $\overset{\cap}{NE}$ από το τόξο $\overset{\cap}{EZ}$, τόσες φορές μεγαλύτερη είναι και η γωνία $\overset{\wedge}{N\acute{O}E}$ από τη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{O}Z}$.

Επομένως, αν το τόξο $\overset{\cap}{BA}$ είναι ίσο με το τόξο $\overset{\cap}{EN}$, τότε και η γωνία $\overset{\wedge}{BHA}$ είναι ίση με τη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{O}N}$, αν το τόξο $\overset{\cap}{BA}$ είναι μεγαλύτερο από το τόξο $\overset{\cap}{EN}$, τότε και η γωνία $\overset{\wedge}{BHA}$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{O}N}$, και αν το τόξο $\overset{\cap}{BA}$ είναι μικρότερο από το τόξο $\overset{\cap}{EN}$, τότε και η γωνία $\overset{\wedge}{BHA}$ είναι μικρότερη από τη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{O}N}$.

Έχουμε λοιπόν τέσσερα μεγέθη, τα δύο τόξα $\overset{\cap}{BG}$ και $\overset{\cap}{EZ}$ και τις γωνίες $\overset{\wedge}{BHG}$ και $\overset{\wedge}{E\acute{O}Z}$ και πήραμε για το τόξο $\overset{\cap}{BG}$ και τη γωνία $\overset{\wedge}{BHG}$, ίσες φορές πολλαπλάσια το τόξο $\overset{\cap}{BA}$ και τη γωνία $\overset{\wedge}{BHA}$, ενώ για το τόξο $\overset{\cap}{EZ}$ και τη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{O}Z}$ πήραμε ίσες φορές πολλαπλάσια το τόξο $\overset{\cap}{EN}$ και τη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{O}N}$.

Αποδείξαμε ότι, αν $\overset{\cap}{BA} > \overset{\cap}{EN}$, τότε $\overset{\wedge}{BHA} > \overset{\wedge}{E\acute{O}N}$

αν $\overset{\cap}{BA} = \overset{\cap}{EN}$, τότε $\overset{\wedge}{BHA} = \overset{\wedge}{E\acute{O}N}$

αν $\overset{\cap}{BA} < \overset{\cap}{EN}$, τότε $\overset{\wedge}{BHA} < \overset{\wedge}{E\acute{O}N}$.

Επομένως, όπως είναι το τόξο $\overset{\cap}{BG}$ προς το τόξο $\overset{\cap}{EZ}$, έτσι είναι και η επίκεντρη γωνία $\overset{\wedge}{BHG}$ προς την επίκεντρη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{O}Z}$. (Βλέπε βιβλίο V, ορισμός 5).

Όμως, όπως είναι η γωνία $\overset{\wedge}{BHG}$ προς τη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{O}Z}$, έτσι είναι και η εγγεγραμμένη γωνία $\overset{\wedge}{BAG}$ προς την εγγεγραμμένη γωνία $\overset{\wedge}{E\acute{A}Z}$ (πρόταση V.15), γιατί καθεμία από τις γωνίες $\overset{\wedge}{BHG}$ και $\overset{\wedge}{E\acute{O}Z}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\overset{\wedge}{BAG}$ και $\overset{\wedge}{E\acute{A}Z}$ αντίστοιχα (πρόταση III. 20).

Επομένως, όπως είναι το τόξο $\overset{\cap}{\text{B}\Gamma}$ προς το τόξο $\overset{\cap}{\text{E}\text{Z}}$, έτσι είναι η γωνία $\overset{\wedge}{\text{B}\text{H}\Gamma}$ προς τη γωνία $\overset{\wedge}{\text{E}\text{H}\text{Z}}$, και η γωνία $\overset{\wedge}{\text{B}\text{A}\Gamma}$ προς τη γωνία $\overset{\wedge}{\text{E}\text{A}\text{Z}}$.
 ὁ.ξ.δ.

Σχόλια

Ο Πτολεμαίος αναφέρει ότι από το Θέωνα προστέθηκε στην πρόταση 33 μια φράση για τους τομείς που ορίζουν οι εγγεγραμμένες είτε οι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στα τόξα.

Επίσης ο Θέων δίνει και το πόρισμα:

Οι επίκεντρες γωνίες είναι ανάλογες των αντίστοιχων τομέων.

Με κριτήριο και το πόρισμα, ο Peyrard κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο κώδικας του Βατικανού γράφτηκε πριν από το Θέωνα.

Πιθανόν απόδειξη της 33 να έδωσε και ο Αριστοτέλης.

Ο Knorr αναφέρει ότι η πρόταση 33 είναι μερική περίπτωση ενός λήμματος που υπάρχει στα "Στοιχεία" του Θεόδωρου Τριπολίτη.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

- 1 Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση πάνω σε δοθείσα ευθεία και με πλευρές δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα.
- 2 Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη βάση $B\Gamma$ πάνω σε δοθείσα ευθεία, του οποίου οι ίσες πλευρές έχουν μήκος διπλάσιο της βάσης.
- 3 Έστω τμήμα AB και σημείο Γ εκτός αυτού. Να βρείτε επί του AB σημείο Δ , ώστε $\Gamma\Delta = k$ (k δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα). Είναι πάντα δυνατή η εύρεση τέτοιου σημείου Δ ;
- 4 Ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται η κορυφή A και η κορυφή B της βάσης $B\Gamma$. Να βρείτε την κορυφή Γ , αν είναι γνωστό ότι βρίσκεται σε δοσμένη ευθεία ε .
- 5 Να κατασκευάσετε ρόμβο, του οποίου γνωρίζετε τις δύο απέναντι κορυφές A, Γ και το μήκος της πλευράς του.
- 6 Τα σημεία M, N ανήκουν στο τμήμα AB . Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$, τέτοιο ώστε $A\Gamma = AN$ και $B\Gamma = BM$.
- 7 Τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma, \Delta B\Gamma$ έχουν την ίδια βάση $B\Gamma$, αλλά βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta$.
- 8 Στο ίδιο σχήμα να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}, \hat{\Delta}$.
- 9 Αν $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}B$.
- 10 Αν το κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει $B\Gamma = A\Delta$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $B\Delta = A\Gamma$.

- 11 Να διαιρέσετε μια γωνία σε 4 ίσα μέρη
- 12 Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας των ίσων πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι διάμεσος της βάσης του.
- 13 Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο, του οποίου δίνεται η βάση και το άθροισμα των ίσων πλευρών του.
- 14 Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος.
- 15 Αν Δ , E τα μέσα των ίσων πλευρών AB , AG ισοσκελούς τριγώνου ABG , τότε $GD = BE$.
- 16 Αν οι απέναντι πλευρές κυρτού τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε και οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- 17 Οι διαγώνιες ενός ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται δίχα και καθέτως.
- 18 Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.
- 19 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που ορίζουν τα μέσα των πλευρών ενός ισόπλευρου τριγώνου, είναι ισόπλευρο.
- 20 Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο, του οποίου γνωρίζετε τη βάση και το ύψος του επί την βάση.
- 21 Επί ευθείας ϵ να προσδιορίσετε σημείο που να ισαπέχει από δύο δοσμένα σημεία. Πότε το πρόβλημα έχει λύση;
- 22 Αν οι προεκτάσεις μιας πλευράς ενός τριγώνου σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις πλευρές του, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- 23 Οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών, των οποίων οι μη κοινές πλευρές είναι αντικείμενες ημιευθείες, είναι κάθετες.

- 24 Να αποδείξετε ότι τα αθροίσματα ίσων γωνιών (εφ' όσον ορίζονται) είναι ίσα.
- 25 Αν $AB\Gamma\Delta$ ρόμβος και O το μέσον της $A\Gamma$, τότε τα σημεία B, O, Δ είναι συνευθειακά.
- 26 Αν προεκτείνουμε μια πλευρά ενός τριγώνου εκατέρωθεν, τότε το άθροισμα των δύο εξωτερικών γωνιών που σχηματίζονται είναι μεγαλύτερο από 180° .
- 27 Να εξετάσετε ποια σχέση υπάρχει (αν υπάρχει) μεταξύ της πρότασης I.17 και του 5^{ου} αιτήματος.
- 28 Η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου.
- 29 Προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και στην προέκταση θεωρούμε σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι $A\Delta > AB$.
- 30 Στο κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, η πλευρά AB είναι η μικρότερη και η $\Gamma\Delta$ η μεγαλύτερη. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} > \hat{\Delta}$.
- 31 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB \geq A\Gamma$ έστω σημείο Δ της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $AB \geq A\Delta \geq A\Gamma$.
- 32 Να εξετάσετε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της πρότασης I.19 και του 5^{ου} αιτήματος.
- 33 Αν Δ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\hat{B}\Delta\Gamma > \hat{B}\Delta\Gamma$.
- 34 Το άθροισμα των αποστάσεων σημείου στο εσωτερικό τριγώνου από τις κορυφές του τριγώνου, είναι μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρο, αλλά μικρότερο από την περίμετρο του τριγώνου.
- 35 Έστω $B\Delta, \Gamma\epsilon$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma, \epsilon B\Gamma$ είναι ίσα.

- 36** Να αποδείξετε ότι τα ύψη από τη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσα.
- 37** Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- 38** Το μικρότερο τμήμα που συνδέει σημείο A εκτός ευθείας ε με σημείο της ε είναι το κάθετο τμήμα AB από το A στην ε .
- 39** Έστω σημεία A, B στο ίδιο ημιεπίπεδο ευθείας ε . Να προσδιορίσετε σημείο M της ε , ώστε το άθροισμα $AM + MB$ να είναι ελάχιστο.
- 40** Επί της ευθείας ε να προσδιορίσετε σημείο A που να ισαπέχει από δύο τεμνόμενες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
- 41** Από δοσμένο σημείο A να φέρετε ευθεία ε , ώστε να ισαπέχουν από αυτή δύο δοσμένα σημεία B, Γ . Πότε το πρόβλημα έχει λύση;
- 42** Δύο ευθύγραμμα τμήματα $AB, \Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο O , που τα διχοτομεί. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma \parallel B\Delta$.
- 43** Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
- 44** Αν ευθεία τέμνει παράλληλες ευθείες και είναι κάθετη στη μία από αυτές, είναι κάθετη σε όλες.
- 45** Αν οι τεμνόμενες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες στις δ_1, δ_2 ($\varepsilon_1 \parallel \delta_1$), τότε μια από τις γωνίες που σχηματίζουν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ίση με μια από τις γωνίες που σχηματίζουν οι δ_1, δ_2 .
- 46** Αν από σημείο μιας πλευράς γωνίας φέρουμε παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας, το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ισοσκελές.
- 47** Από σημείο A εκτός ευθείας ε να φέρετε ευθεία που να σχηματίζει με την ε δοσμένη γωνία.
- 48** Από σημείο P της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$, που τέμνει τις $AB, A\Gamma$ στα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔE είναι ισοσκελές.

- 49** Αν η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου είναι παράλληλη σε μια πλευρά του, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- 50** Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες στις ευθείες δ_1, δ_2 ($\varepsilon_1 \perp \delta_1$), τότε μια οξεία γωνία που σχηματίζουν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ίση με μια οξεία γωνία που σχηματίζουν οι δ_1, δ_2 .
- 51** Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου διαιρεί το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.
- 52** Στις πλευρές AB, BΓ, ΓΑ τριγώνου ABΓ λαμβάνουμε τα σημεία Γ_1, A_1, B_1 , ώστε $BA_1 = \lambda B\Gamma, \Gamma B_1 = \lambda \Gamma A, A\Gamma_1 = \lambda AB$ με $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. Να αποδείξετε ότι η ημιπερίμετρος τ του ABΓ και η ημιπερίμετρος τ_1 του $A_1B_1\Gamma_1$ ικανοποιούν τη σχέση $(2\lambda - 1)\tau < \tau_1 < \lambda\tau$.
- 53** Αν η κορυφή A τριγώνου ABΓ βρίσκεται σε κύκλο με διάμετρο BΓ, να αποδείξετε, μόνο με τη βοήθεια των προτάσεων του βιβλίου I, ότι η $\hat{A}$ είναι ορθή.
- 54** Κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο παραλληλογράμμου, το διαιρεί σε δύο ισεμβαδικά σχήματα.
- 55** Από δεδομένο σημείο A να φέρετε ευθεία που να διαιρεί δοθέν παραλληλόγραμμο σε δύο ισεμβαδικά σχήματα.
- 56** Να διαιρεθεί δοθέν παραλληλόγραμμο σε δύο ισεμβαδικά σχήματα με ευθεία παράλληλη προς δοθείσα ευθεία.
- 57** Αν Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών AB, BΓ, ΓΑ τριγώνου ABΓ, τότε $(\Delta EZ) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$.
- 58** Εστω τραπέζιο ABΓΔ με βάσεις AB, ΓΔ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται, αν από το μέσο Μ της BΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ.

- 59** Το εμβαδόν τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB , $\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το εμβαδόν παραλληλογράμμου, το οποίο έχει βάση το ημιάθροισμα των βάσεων AB , $\Gamma\Delta$ και το ίδιο ύψος.
- 60** Δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές έχουν λόγο εμβαδών ίσο με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες.
- 61** Τα σημεία Δ , E βρίσκονται στις πλευρές AB , $A\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι $A\Delta = \Gamma E$ και $AE = B\Delta$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $B\Delta E\Gamma$ είναι τουλάχιστον τριπλάσιο από το εμβαδόν του $A\Delta E$.
- 62** Με τη βοήθεια της πρότασης II.4 να αποδείξετε ότι το τετράγωνο με πλευρά ένα τμήμα είναι τετραπλάσιο από το τετράγωνο με πλευρά το μισό του τμήματος.
- 63** Με τη βοήθεια της πρότασης II.4 να αποδείξετε ότι το τετράγωνο με πλευρά ένα τμήμα που έχουμε διαιρέσει σε τρία τμήματα α , β , γ είναι ίσο με τα τετράγωνα που έχουν ως πλευρές τα τμήματα α , β , γ και τα διπλάσια ορθογώνια με πλευρές τα τμήματα αυτά.
Δηλαδή $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$.
- 64** Αν $A\Delta$ το ύψος επί την υποτείνουσα $B\Gamma$ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, τότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.
- 65** Η διαφορά του τετραγώνου δύο τμημάτων ισούται με το ορθογώνιο που έχει διαστάσεις το άθροισμα και τη διαφορά των τμημάτων.
- 66** Το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το ορθογώνιο που σχηματίζει το άθροισμα και η διαφορά της υποτείνουσας και της άλλης κάθετης πλευράς (Πυθαγόρειο θεώρημα).
- 67** Το τετράγωνο με πλευρά το τμήμα που άγεται από την κορυφή ενός ισοσκελούς τριγώνου μέχρι τη βάση του είναι μικρότερο από το τετράγωνο, με πλευρά μια από τις ίσες πλευρές αυξημένο κατά το ορθογώνιο που ορίζουν τα τμήματα στα οποία το τμήμα διαιρεί τη βάση.

- 68** Στην πλευρά AB τετράγωνου $AB\Delta\Gamma$ παίρνουμε σημείο Θ τέτοιο, ώστε $A\Theta^2 = AB \cdot \Theta B$. Από το Θ φέρουμε παράλληλη στην $A\Gamma$, που τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο K . Στην προέκταση της $K\Theta$ παίρνουμε σημείο H , ώστε $\Theta H = A\Theta$ και σχηματίζουμε τετράγωνο ΘHZA . Αν E το μέσο της $A\Gamma$ φέρουμε την EB . Να αποδείξετε ότι:
- Αν η $\Gamma\Theta$ προεκταθεί, θα τμήσει την BZ στο Λ και τότε $\Gamma\Lambda \perp BZ$.
 - Αν οι BE , $\Gamma\Theta$ τέμνονται στο O , τότε $AO \perp \Gamma\Theta$.
 - Οι ευθείες BH , ΔZ , AK είναι παράλληλες.
- 69** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι οξείες. Αν E, Z τα ίχνη των καθέτων που άγονται από τα Γ, B στις $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $B\Gamma^2 = AB \cdot BZ + A\Gamma \cdot \Gamma E$.
- 70** Αν πάνω σε ευθεία θεωρήσετε τα σημεία A, B, Γ, Δ με τη σειρά αυτή, να αποδείξετε ότι $AB \cdot \Gamma\Delta + B\Gamma \cdot A\Delta = A\Gamma \cdot B\Delta$.
- 71** Το τετράγωνο της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ισούται με το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν η μια πλευρά του και η προβολή της βάσης σ' αυτήν.
- 72** Αν μια γωνία τριγώνου είναι 60° , να αποδείξετε ότι το τετράγωνο με πλευρά την πλευρά του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία των 60° είναι μικρότερο από τα αθροίσματα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών συν το ορθογώνιο που ορίζουν οι δύο πλευρές του.
- 73** Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του είναι ίσο με το διπλάσιο τετράγωνο της διαμέσου στην τρίτη πλευρά συν το διπλάσιο τετράγωνο του ημίσεως της τρίτης πλευράς.
- 74** Το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.
- 75** Πάνω σε δύο ευθείες $\varepsilon, \varepsilon_1$ θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ και A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα. Τα τμήματα AB_1, BA_1 τέμνονται στο K , τα τμήματα $A\Gamma_1, \Gamma A_1$ στο Λ και τα $B\Gamma_1, \Gamma B_1$ στο M . Να αποδείξετε ότι τα K, Λ, M είναι συνευθειακά.

- 76** Να κατασκευάσετε ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με τη διαφορά των εμβαδών δύο τετραγώνων.
- 77** Να προσδιορίσετε την πλευρά ενός ορθογωνίου, του οποίου δίνεται μια πλευρά και το εμβαδόν ενός τετραγώνου ισεμβαδικού με το ορθογώνιο.
- 78** Να προεκτείνετε ένα δοθέν τμήμα, ώστε το ορθογώνιο που ορίζουν το τμήμα και η προέκταση να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δοθέντος τετραγώνου.
- 79** Έστω ένα επίπεδο του Hilbert, στο οποίο ισχύει το αξίωμα του Αρχιμήδη. Έστω ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ και τμήμα $ΕΖ$. Τότε υπάρχει ορθογώνιο $ΕΖΗΘ$ ισοδιαχωρίσιμο με το $ΑΒΓΔ$.
- 80** Αν σημείο A ανήκει σε κύκλο $c(O,R)$, τότε κάθε σημείο B του c είναι η εικόνα του σημείου A σε μιαν αξονική συμμετρία ως προς ευθεία που διέρχεται από το O .
- 81** Αν δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A, B , να αποδείξετε ότι η διάκεντρος είναι μεσοκάθετος στην AB .
- 82** Ενός κύκλου δίδονται δύο χορδές. Να προσδιορίσετε το κέντρο του.
- 83** Να προσδιορίσετε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
- 84** Από σημείο A εσωτερικό του κύκλου c να φέρετε μια χορδή του c που να διχοτομείται από το A .
- 85** Αν δύο κύκλοι τέμνονται και από τα σημεία τομής φέρουμε παράλληλες, αυτές ορίζουν σε κάθε κύκλο ίσα τμήματα.
- 86** Θεωρούμε επίπεδο Hilbert, στο οποίο ισχύει το αξίωμα των παραλλήλων και κύκλος του c . Αν A, B δύο σημεία στο εξωτερικό του κύκλου, τότε υπάρχει σημείο $Γ$ στο εξωτερικό του c , ώστε τα τμήματα $ΓΑ, ΓΒ$ να βρίσκονται στο εξωτερικό του c (λέμε τότε ότι το εξωτερικό του κύκλου είναι *συνεκτικό κατά τμήμα*).

- 87** Να εξετάσετε αν το εξωτερικό ενός κύκλου είναι κυρτό σημειοσύνολο.
- 88** Υπάρχει κατά τη γνώμη σας κενό στην απόδειξη της πρότασης III.1. Αν νομίζετε ότι υπάρχει, ποιο είναι αυτό;
- 89** Με τη βοήθεια των προτάσεων III. 5 και III. 6 να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που έχουν κοινό σημείο δεν είναι ομόκεντροι, εκτός αν συμπίπτουν.
- 90** Να αποδείξετε την αντίστροφη πρόταση της προηγούμενης άσκησης.
- 91** Με τη βοήθεια της πρότασης III. 7 να αποδείξετε ότι από εσωτερικό σημείο ενός κύκλου c που δεν είναι κέντρο του c , δύο μόνο ίσες χορδές μπορούμε να φέρουμε.
- 92** Με τη βοήθεια της III. 8 να αποδείξετε ότι από σημείο A του κύκλου η μεγαλύτερη χορδή που άγεται είναι η διάμετρος από το A .
- 93** Με τη βοήθεια της III.8 να αποδείξετε ότι δύο μόνο ίσα τμήματα υπάρχουν με άκρα σημείο A εκτός του κύκλου και σημεία του κύκλου.
- 94** Με τη βοήθεια της πρότασης III .9 να αποδείξετε ότι 3 μη συνευθειακά σημεία ορίζουν έναν κύκλο.
- 95** Με τη βοήθεια της III.10 να αποδείξετε ότι 3 μη συνευθειακά σημεία ορίζουν έναν κύκλο.
- 96** Δύο κύκλοι που έχουν κοινό τόξο ταυτίζονται.
- 97** Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της III. 11 και να εξετάσετε αν ισχύει.
- 98** Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της III. 12 και να εξετάσετε αν ισχύει.
- 99** Αν δύο κύκλοι έχουν κοινό σημείο εκτός της διακέντρου, οι κύκλοι τέμνονται.

- 100** Αν $c_1 (O_1, \tau_1)$, $c_2 (O_2, \tau_2)$ δύο κύκλοι τότε:
- (α) Αν $\tau_1 + \tau_2 < O_1 O_2$, οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου (0 κοινά σημεία)
 - (β) Αν $\tau_1 + \tau_2 > O_1 O_2$, οι κύκλοι τέμνονται (2 κοινά σημεία)
 - (γ) Αν $|\tau_1 - \tau_2| < O_1 O_2$, ο μεγαλύτερος περιέχει τον μικρότερο (0 κοινά σημεία).
 - (δ) Αν $\tau_1 + \tau_2 = O_1 O_2$, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (1 κοινό σημείο).
 - (ε) Αν $|\tau_1 - \tau_2| = O_1 O_2$, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά (1 κοινό σημείο).
- 101** Σε κύκλο διαμέτρου AB θεωρούμε μεταβλητό σημείο Γ διάφορο των A, B . Αν $\Gamma\Delta \perp AB$ και O το κέντρο του κύκλου να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{O\Gamma\Delta}$ διέρχεται από σταθερό σημείο.
- 102** Να προσδιορίσετε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται σε δοθέν σημείο δοθέντος κύκλου.
- 103** Να αποδείξετε ότι αν AB δοθείσα χορδή ενός κύκλου $c (O,R)$ και $K\Lambda$ μια διάμετρος, τότε το άθροισμα ή η διαφορά των αποστάσεων των K, Λ από την AB είναι σταθερό.
- 104** Να προσδιορίσετε το γεωμετρικό τύπο των μέσων των ίσων χορδών ενός κύκλου.
- 105** Αν δύο χορδές $AB, \Gamma\Delta$ του κύκλου c τέμνονται σε σημείο K , τότε $AK \cdot KB = \Gamma K \cdot K\Delta$.
- 106** Από δοσμένο σημείο A εντός κύκλου $c(O,R)$ να φέρετε τη μικρότερη δυνατή χορδή.
- 107** Σε δοθέντα κύκλο $c (O, R)$ να φέρετε χορδή δοθέντος μήκους, που να έχει το μέσο της σε δοθείσα χορδή. Πότε το πρόβλημα δεν έχει λύση;

- 108** Με την βοήθεια της πρότασης III.16 να αποδείξετε ότι σε κάθε σημείο ενός κύκλου μπορούμε να φέρουμε μόνο μια εφαπτομένη του κύκλου.
- 109** Έστω ΓA και ΓB οι εφαπτόμενες από σημείο Γ εξωτερικό του κύκλου c (O, R). Να αποδείξετε ότι $\Gamma A = \Gamma B$.
- 110** Δίνεται κύκλος c (O, R) και σημείο A στο εξωτερικό του. Να κατασκευάσετε τις εφαπτόμενες του c από το A με άλλη μέθοδο από αυτήν της III.17
- 111** Αν μια ευθεία ε είναι κάθετη στο άκρο A μιας ακτίνας του κύκλου $c(O, R)$, ($A \neq O$), τότε η ευθεία εφάπτεται του c .
- 112** Αν μια ευθεία ε εφάπτεται σε κύκλο c (O, R), τότε είναι κάθετη στην ακτίνα που περνά από το σημείο επαφής.
- 113** Κάθε σημείο ενός κύκλου c ανήκει σε μια μόνο εφαπτομένη του c .
- 114** Κάθε εφαπτομένη ε κύκλου c δεν περιέχει εσωτερικά σημεία του c .
- 115** Σε κάθε τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο το άθροισμα των δύο απέναντι πλευρών του ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων απέναντι.
- 116** Δίνεται ευθεία ε , σημείο O εκτός αυτής και τμήμα AB . Να κατασκευάσετε κύκλο $c(O, R)$ που τέμνει την ε κατά χορδή ίση με AB .
- 117** Δίνεται ευθεία ε , σημείο A εκτός αυτής και σημείο B της ε . Να κατασκευάσετε κύκλο c που να διέρχεται από το A και να εφάπτεται της ευθείας ε στο B .
- Να αποδείξετε τις τρεις επόμενες ασκήσεις με τη βοήθεια των προτάσεων των βιβλίων I-III.
- 118** Από σημείο A εκτός κύκλου $c(O, R)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες AB , AG . Αν η $B\Gamma$ τέμνει την AO στο Δ , να αποδείξετε ότι $OB^2 = OA \cdot OD$.

- 119** Αν από το σημείο επαφής δύο κύκλων φέρουμε δύο τέμνουσες των κύκλων, τότε οι χορδές που ορίζουν στους κύκλους είναι παράλληλες.
- 120** Έστω A σημείο τομής δύο κύκλων c_1, c_2 . Από το A φέρουμε εφαπτόμενη του c_1 , που τέμνει τον c_2 στο B και εφαπτόμενη του c_2 που τέμνει τον c_1 στο Γ . Έστω c ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ . Η εφαπτόμενη του c στο A τέμνει τους κύκλους c_1, c_2 στα Δ, E . Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$.
- 121** Δίνεται ευθεία ε και σημεία A, B εκτός της ε . Να κατασκευάσετε κύκλο που να διέρχεται από τα A, B και να εφάπτεται στην ε .
- 122** Δίνονται δύο τεμνόμενες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και σημείο A που δεν ανήκει σ’ αυτές. Να κατασκευάσετε κύκλο που να διέρχεται από το A και να εφάπτεται στις ευθείες.
- 123** Για την κατασκευή IV.2 (και την απόδειξη της) είναι η πρόταση I.1 αναγκαία; Είναι το 5^ο αίτημα αναγκαίο;
- 124** Να αποδείξετε ότι η κατασκευή IV. 15 είναι δυνατή μόνον αν είναι δυνατή η κατασκευή I. 1 (ή το αξίωμα Dedekind).
- 125** Αν υποθέσουμε ότι δεν είναι δυνατή η κατασκευή I.1 είτε κάποια πρόταση που εξαρτάται από αυτή, τότε ποιες από τις πλευρές του εξαγώνου είναι δυνατό να αποδείξουμε ότι είναι ίσες;
- 126** Για την απόδειξη της πρότασης IV. 15 απαιτείται το 5^ο αίτημα των παραλλήλων ή όχι;
- 127** Τρίγωνα με ίσες βάσεις και ίσες τις απέναντι γωνίες, έχουν ίσες ακτίνες περιγεγραμμένων κύκλων.
- 128** Αν I το έγκεντρο και I_1 το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στη $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ και στις προεκτάσεις των $AB, A\Gamma$ (παράκεντρο), τότε τα σημεία A, I, I_1 είναι συνευθειακά.
- 129** Δίνεται η βάση $B\Gamma$, το ύψος $A\Delta$ και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να κατασκευάσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$.

- 130** Τρεις κύκλοι με κέντρα O_1, O_2, O_3 εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία A, B, Γ . Να αποδείξετε ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 131** Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\alpha\sqrt{\beta\gamma} \leq \rho(\beta + \gamma)$, όπου ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
- 132** Να διαιρέσετε μια ορθή γωνία σε 5 ίσα μέρη.
- 133** Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε δοσμένο κύκλο. Να αποδείξετε ότι το διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς του είναι τριπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο.
- 134** Να κατασκευάσετε τρίγωνο του οποίου δίδεται η βάση, η απέναντι γωνία και το σημείο επαφής της βάσης με τον εγγεγραμμένο στο τρίγωνο κύκλο.
- 135** Το εμβαδόν τετραπλεύρου περιγεγραμμένου σε κύκλο, είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο που είναι τοποθετημένες οι πλευρές του.
- 136** Αν $\frac{6}{x} = \frac{1}{y} = \frac{2}{z} = \frac{3}{\kappa}$, να προσδιορίσετε τα x, y, z, κ ώστε $x = yz = 2\kappa$.
- 137** Να προσδιορίσετε τον x από την σχέση: $\frac{[4, x]}{(36, x)} = \frac{(36, x)}{[9, x]}$, όπου (α, β) και $[\alpha, \beta]$ είναι ο Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των α, β αντίστοιχα.
- 138** Αν $\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + 5\varepsilon = 55$, να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, αν $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3} = \frac{\delta}{4} = \frac{\varepsilon}{5}$.
- 139** Το άθροισμα δύο κλασμάτων με ίσους αριθμητές είναι $\frac{16}{15}$, ενώ ο λόγος των παρονομαστών είναι $\frac{1}{3}$. Να προσδιορίσετε τα κλάσματα.

- 140** Αν $\frac{3}{\alpha} = \frac{4}{\beta} = \frac{12}{\gamma} = 13$, να αποδείξετε ότι:
 $(3-\alpha)\alpha + (4-\beta)\beta + (12-\gamma)\gamma = 12$ και $(3+\alpha)\alpha + (4+\beta)\beta + (12+\gamma)\gamma = 14$.
- 141** Να βρείτε τρεις αριθμούς x, y, z των οποίων το άθροισμα είναι α , αν γνωρίζουμε ότι οι x και y είναι ανάλογοι των $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{6}$, ενώ οι y και z αντιστρόφως ανάλογοι των 15 και 9. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του α για να είναι οι αριθμοί φυσικοί;
- 142** Αν η μια βάση τραπεζίου είναι διπλάσια της άλλης, τότε οι διαγώνιες τέμνονται σε σημείο που αποκόβει από κάθε μια τμήμα ίσο με το $\frac{1}{3}$ της.
- 143** Αν δύο τρίγωνα έχουν την ίδια βάση και οι τρίτες κορυφές τους βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς τη βάση, τότε κάθε ευθεία παράλληλη προς τη βάση ορίζει τρίγωνα ισεμβαδικά.
- 144** Αν τα τμήματα PE, AB τέμνονται στο O , ώστε $\frac{PO}{OA} = \frac{BO}{OE}$, τότε τα σημεία P, A, B, E είναι ομοκυκλικά.
- 145** Να προσδιορίσετε σημείο, από το οποίο οι κάθετες προς τις πλευρές ενός δεδομένου τριγώνου έχουν δοσμένο λόγο.
- 146** Ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσος με τον λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσα.
- 147** Αν AA_1, BB_1 διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνονται στο E , να προσδιορίσετε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων $(AEB), (A_1EB_1)$.
- 148** Να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου:
(α) των αντιστοίχων διαμέσων
(β) των ακτίνων των εγγεγραμμένων κύκλων
(γ) των ακτίνων των περιγεγραμμένων κύκλων.

- 149** Να διαιρέσετε ένα τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά σχήματα με ευθεία παράλληλη σε μια βάση του.
- 150** Από σημείο A στο εσωτερικό γωνίας $\hat{xOy}$ να φέρετε ευθεία που να σχηματίζει με τις πλευρές της γωνίας τρίγωνο δοθέντος εμβαδού.
- 151** Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι κάθετες, το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που ορίζουν οι απέναντι πλευρές του είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τετραπλεύρου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Aaboe A. "*Episodes from the Early History of Mathematics*" The Mathematical Association of America, Washington D.C. 1964.
2. Alexander of Aphrodisias, "*Commentary on Aristotle's Sophistici Elenchi*". Wallies, Berlin, p.76.23, 1898.
3. Allman G.J. "*Greek Geometry from Thales to Euclid*", Logmans, Green and Co, Dublin - London 1889.
4. Amir - Moez A. "*Discussion of Difficulties in Euclid*", Scripta mathematica p.p. 276 – 303, 1959.
5. Archibald C.R., "*Euclid's Book on Divisions of Figures with a Restoration Based on Woepcke's Text and the Practica Geometriae of Leonardo Pisano*", Cambridge 1915.
6. Artmann B. "*Euclid, The Creation of Mathematics*", Springer N. Y. 1999.
7. Artmann B. "*Über Voreuklidische Elemente*" Archive for History of Exact Sciences, p.p.291-306, 1985.
8. Ball W. W.R, "*A short account of the history of Mathematics*", Dover 1980.
9. Barbin E. "*The Role of Problems in the History and Teaching Mathematics*", Vita Mathematica p.p. 17-25, 1966.
10. Βαρλαάμ του Καλαβρού, "*Λογιστική*" (δύγλωσση έκδοση), Ousia, Bruxelles 1996.
11. Barnes J., Schofield M. and Sorabji R. (eds). "*Articles on Aristotle*", vol. I, II. Duckworth, London 1978,
12. Becker O. "*Das Mathematische Denken der Antike*", Vandenhoeck, Göttingen 1957.
13. Bekker I. Σούδα (Σουΐδα), (Ελλην. Μεταφρ.) ΕΕΕ, Αθήνα , χ.χ.
14. Bell E.T. "*Men of Mathematics*", Simon and Schuster, N. Y. 1965
15. Berggren J. L. "*Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*" Springel, N.Y. 1986.
16. Berggren J. L. "*History of Greek Mathematics: A survey of recent research*", Historia Mathematica vol. 11, p.p. 394-410, 1984.
17. Bergstrasser G., "*Pappus Kommentar zum Zehnten Buch von Euclid's Elementen*". Der Islam 21, 1933.

18. Boezio R. "*Porfirio Isagoge*", Wien - Leipzig 1906 (επανεκ. G. Girgenti, Milano 1995).
19. Boltyanski G. V. "*Equivalent and Equide - composable Figures*" (μετ. εκ του ρωσ.), D.C. Heath and Company, Boston 1963.
20. Bolyai J. Appendix "*The Theory of Space*", Akademiai kiado, Budapest 1987.
21. Borel E. and Stäckel P. "*Die Element der Mathematik, II. Geometrie*", Teubner, Leipzig - Berlin 1909.
22. Boyer C. B. "*A History of Mathematics*", John Wiley & Sons N.Y. 1989.
23. Briggs Henry, "*Elementorum Euclidis libri VI Priores p.p.195-222*", London 1620.
24. Brunschvicg L. "*Les Etapes de la Philosophie Mathématique*", Blanchard, Paris 1991.
25. Burkert W. "*Weisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*", Carl, Nürnberg 1962.
26. Burnet J. "*Early Greek Philosophy*", Mcmillan, London 1930. (επανεκ. Peugnin 1965)
27. Burton M. D. "*The History of Mathematics*", Dover, N. Y. 1985
28. Bury R. G., "*Sextus Empiricus*", vol. I-IV, Loeb Clas. Libr., London 1983
29. Busard L.L.H. "*The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia*" (?), Leiden 1968.
30. Cajori F. "*A History of Mathematics*", N.Y. 1893 (επανεκ. Dover 1919)
31. Cantor M. "*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*", 3^η έκδοση, Leipzig 1907.
32. Caveing M. "*La figure et le nombre*", PUF, Paris 1997.
33. Clagett Marshal "*Greek Science in Antiquity*", London 1957.
34. Clagett Marshal, "*The science of Mechanics in the middle Ages*", Madison, Wiskonsin 1954.
35. Clagett Marshall "*The Medieval Latin Translations From the Arabic of the Elements of Euclid, with special Emphasis on the version of Adelar of Bath*". Isis 44, p.p. 16-42, 1953.
36. Colerus E. "*Von Pythagoras bis Hilbert*", Springer, Berlin, Wien, Leipzig 1937.
37. Colli G. "*Zenone di Elea*", Adelphi, Milano 1998.
38. Cousin V. "*Procli comentarium in Platonis Parmenidem*", G.Olms, Hildesheim 1961.

39. Curtze M. "*Anarithi in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*", Teubner, Leipzig 1899.
40. Curtze M., "*Das algebrische werkes Eukleides über die Waage*". Zeitschrift für Mathematik und Physik, 19, 1874.
41. Curtze M., "*Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im mittelalter*". Biblioteca Mathematica I, 3rd ser, 1900.
42. De Morgan A. "*Proportion*", Penny Cyclopaedia XIX, p.p. 49-53 (Λονδίνο 1841).
43. De Young G. "*The Arabic textual traditions of Euclid's elements*", History of Science, p.p. 147-160, 1984.
44. Delacy A. E., "*Euclid and Geometry*", London 1965.
45. Diels H. and Kranz W. "*Die Fragmente der Vorsokratiker*" Berlin 1936-37 (επανέκδοση Weidmann, Berlin 1950,1951).
46. Diels H. "*Simplicius, In Aristotelis physicorum libros comentarius*", Vol. 2 Teubner, Berlin 1882 – 1885.
47. Dijksterhuis E. J. "*De elemente van Euclides*" (vol. 1-2), Noordhoff, Groningen 1929-30.
48. Duhem P., "*Les origines de la statique*", Paris 1905.
49. Engel F. - Stäckel P. "*Die theorie der Parallelinien von Euclid bis auf Gauss*", Weidmann, Leipzig 1895.
50. Enriques F. and Amaldi U. "*Elementi di geometria*", Bologna 1904 (επαν. Feltrinelli, Roma 1990).
51. Eves H. "*An Introduction to the History of mathematics*", Rinehart, N.Y. 1953.
52. Eves H. "*College Geometry*", Allyn and Bacon, Boston 1995.
53. Eves H. "*Great moments in Mathematics before 1650*" MAA, N.Y. 1985.
54. Eves H. and Newson C.V. "*Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*", Dover N.Y. 1997.
55. Εξαρχάκος Γ. Θ. "*Εισαγωγή στα Μαθηματικά*" τόμος Α', Άλγεβρα (1991) και τόμος Β' Ανάλυση, (1995) Αθήνα.
56. Εξαρχάκος Γ. Θ. "*Ιστορία των Μαθηματικών*" τόμος Α', Τα Μαθηματικά των βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων (1997) και τόμος Β', Τα Μαθηματικά των Ινδών και των Κινέζων (1999) Αθήνα.
57. Εξαρχάκος Γ.Θ., "*Η αρχαία Ελλάδα κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης*", Πρακτικά 17^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., Αθήνα 2000.
58. Exarchakos Th. "*The method of mathematical induction and the Pell equation in ancient Greek Mathematics*", Mentor, A Journal of

- Scientific and Educational Research, Hellenic Pedagogical Institute, vol 1, p.p. 4-16, Athens 1999.
59. Fowler D.H. "*The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction*", Oxford 1987.
 60. Frajese A. "*Attraverso la Storia della Matematica*", Rusconi, Firenze 1977.
 61. Frajese A. "*La Matematica nel mondo antico*", Rusconi, Roma 1972.
 62. Frajese A. and Macioni L., "*Gli Elementi di Euclide*" La Monnier, Turin 1970.
 63. Frank E. "*Plato und die sogenannten Pythagoreer*", Halle 1923 (ε-πανεκ. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1962).
 64. Frankland B. W., "*The First Book of Euclid's Elements with a Documentary Based Principally upon that of Proclus Diadochus*" Cambridge 1905.
 65. Frege G., "*The Foundations of Arithmetic*", Basic Blackwell, Oxford 1950.
 66. Friedlein G. "*Proclus, In Primum Euclidis Elementorum Commentari*", Teubner, Leipzig 1873 (επαν. Olms G., Hildsheim 1965).
 67. Gallop D. "*Parmenides of Elea Fragmentas*", Oxford 1984.
 68. Gericke H. "*Mathematik in Antike und Orient*", Fourier, Wiesbaden 1992.
 69. Gilbert O. "*Aristoteles Urtaile über die pythagorische Lehre*", Archive Gesch XXII () p. 165.
 70. Görland A. "*Aristoteles und die Mathematik*", Marburg 1899.
 71. Greenberg J. M. "*Euclidean and non - Euclidean Geometry*", Springer, N.Y. 1993.
 72. Gregory David, "*Ευκλείδου τα σωζόμενα*", Euclidis quae supersunt omnia, Oxford 1703.
 73. Gruber M. P. "*History of Convexity, Handbook of Convex Geometry*", vol. A, Elsevier, Amstredam 1993.
 74. Guillaumin Y. J. "*Mathematiques dans l' Antiquite*", IREM, Saint - Etienne 1992.
 75. Hankel H. "*Beiträge. zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mitelalter*", Leipzig 1874 (επαν. G.Olms Hildesheim 1961).
 76. Hartshorne R. "*Teaching Geometry According to Euclid*", Notices, vol. 47, 4 p.p. 460-465, 2000.
 77. Hasse H. and Scholz H. "*Η κρίσις των αρχών της Ελληνικής Μαθηματικής Επιστήμης*", Δελτίο της EME 1932.

78. Hasse, H. "*Mathematik als Wissenschaft*", Kunst und Macht, Mitt. Deutsche Mathematiker vereinigung vol 4, p.p.28-38 ,1947.
79. Hauser G. "*Geometrie der Griechen von Thales dis Euclid*", Atena, Lucerne 1955.
80. Heath T. L. "*A History of Greek mathematics*", Oxford 1921 (επαν. Dover 1975).
81. Heath T. L. "*A manual of Greek Mathematics*", Oxford 1931.
82. Heath T. L. "*Mathematics in Aristotle*", Oxford 1949
83. Heath T. L. "*The Thirteen books of Euclid' s Elements*", Dover N. Y. 1956
84. Heiberg J. L. - Stamatis E.. "*Euclides Elementa*" (vol. 1-2), Teubner, Berlin 1969.
85. Heiberg J. L. "*Euclide, Les Elements*", (μετάφραση B. Vitrac με εισαγ. του M. Caveing), PUF, Paris 1990.
86. Heiberg J. L. "*Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altermum*", Minerva, München 1925.
87. Heiberg J. L. and Menge H., "*Euclidis opera omnia*", 8 vols, Teubner, Leipzig 1883-1916.
88. Heiberg J. L., "*Paralipomena zu Euklid*", Hermes 38, 46-74, 161-201, 321-356, 1903.
89. Heiberg L. J., "*Naturwissenschaften Mathematik und Medizi im Klassischen Altermum*". Leipzig 1920 δεύτερη έκδοση.
90. Heinemann G. "*Greek Mathematical work (I), Thales to Euclid*", London 1939.
91. Hervagius J. "*Euclidis de levi et Ponderoso Fragmentum*" Euclidis Megarensis Mathematica Clarissimi Elementorum geometricorum libri xv, Basel 1537.
92. Hiller E. "*Expositio rerum mathematicorum*", Teubner, Leipzig 1873 (επαν. 1995)
93. Hofmann E. J. "*Geschichte der Mathematik*" Bd. 1,2, Sam Gössen, Berlin 1953-1957.
94. Hoppe E. "*Mathematik und Astronomie in Klassischen Altermum*", Heidelberg 1911.
95. Hoyrup J. "*The Four sides and the Area*" Vita mathematica, N. Y. 1996.
96. Hultsch F. "*Autolykos und Euclid*". Berichte der Verhandlung der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der wissenschaft zu Leipzig, Phil, hist, classe. 38 1886.
97. Hultsch F., "*Euklides 8*", Pauly-Wissowa II, Leipzig 1907.

98. Hultsch F., "*Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*" 3vols, Berlin 1876-1878 με μια γαλλική μετάφραση από τον Paul ver Eecke.
99. Jones Al. "*Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*", Springer, N.Y. 1986.
100. Jürgen Mau, "*Eukleides 3*", Die Klein Pauly, II p.p. 416-419, Stuttgart 1967.
101. Kasir S. D. "*The Algebra of Omar Khayyam*", Chelsea N.Y. 1931.
102. Κηπουρός Χ. "Ηρώνος Αλεξανδρέως. Ονόματα Γεωμετρικών όρων. Γεωμετρικά", ΕΜΕ, Αθήνα 1995.
103. Kidd I. G., "*Posidonius Fragmenta*", Cambridge 1988.
104. Knorr W. R. "*The ancient tradition of Geometric Problems*", Dover, N. Y. 1986.
105. Κοντογιάννης Δ. και Ντζιαχρήστος Ε. "*Βασικές Έννοιες της Γεωμετρίας*", Αθήνα 1999.
106. Kruoll W. "*Proclus, In Platonis republican commentari*", Leipzig 1901 (επαν. Olms G., Hildelsheim 1972).
107. Lentz A. Paully - Wissowa. "*Real - Encyclopädie der Classischen alter tumwissenschaft*", Stutgard 1894
108. Levet J. "*P. Gerbert d' Aurillac Traité de Géométrie*", Irem 1997.
109. Loomis E.S. "*The Pythagorean Proposition*" National Council of Teachers of Mathematics, Wasington 1968.
110. Loria G. "*Ιστορία των Μαθηματικών*" Μετάφραση Μ.Κωβαίου , ΕΜΕ, Αθήνα 1971.
111. Michel H. P. "*De Pythagore a Euclide*", Les Belles Lettres, Paris 1950.
112. Molodsci V. "*Istoriomathematiceskie iseldovania*" (ρωσ.) Hayka, Moscow - Leningrad 1942.
113. Morrow G. "*Proclus, A Commentary of the first book of Euclid's Elements*", Princeton 1970.
114. Mueller I. "*Greek Mathematics and Greek Logic*", in Corcoran J. "*Ancient Logic and its modern Interpretation*", Dordrecht, p.p. 35-70, 1974.
115. Mugler C. "*Dictionaire historique de la terminologie geometriques des Grecs*" Les belles Letres, Paris 1958.
116. Neuenschwander E. "*Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids*", Archive for History of Exact Sciences 9, p.p.325-380, 1973.
117. Raven E. J. "*Pythagoreans and Elatics*", Ares Publ., Chicago 1948.

118. Reidemeister K. *"Das exacte Denke der Griechen"*, Kroll, Hamburg 1949.
119. Sabra L. A., *"Simpicius Proof of Euclid's Parallels Postulate"* Journal of the Warburg and Courtauld Institutes 32, p.p. 1-24, 1969.
120. Sabra L. A., *"Thabit ibn Qüra on Euclid's Parallels Postulaté"* Journal of the Warburg and conrtau institutes, p.p. 19-32, 1968.
121. Saccheri G., *"Euclides Vindicatus"*, G. B. Halssted, Chicago 1920, (επαν. Chelsea 1956).
122. Sachs E. *"Die fünf platonischen Körper"*, Berlin 1917.
123. Saito K. *"Book II of Euclid's Elemente in the light of the theory of Conic Sections"*, Historia Scientiarum , 28, 1985.
124. Sarton G., *"Ancient science and Modern Civilization"* Lincoln, Nebr. 1954.
125. Sarton G. *"Introduction to the Theory of Science"*. Biblioteca Mathematica I 1900.
126. Simon M. *"Euclid, und die sechs planimetrischen Bücher"*, Teubner, Leipzig 1901.
127. Smith A. *"Porphyrius, Fragmenta"*, Teubner, Stutgardiae et Lipsiae 1993.
128. Smith E. D. *"History of Mathematics"*, N.Y. 1923 – 25 (επαν. Dover . 1958).
129. Spengel L. *"Eudemi, Phodii Peripatetici, Fragmenta quae supersut"*, Berolini 1866.
130. Σταμάτι Ε. *"Απολλωνίου Κωνικά"*, τόμοι 4, Τ.Ε.Ε. , Αθήνα 1975.
131. Σταμάτι Ε. *"Ευκλείδη: Περί διαιρέσεων"*, Αθήνα 1957.
132. Σταμάτι Ε. *"Η Ελληνική Επιστήμη"*, Αθήνα 1968.
133. Stevens H. F. and S. H. Hall. *"Euclid's Elements"*, Mc Millan, London 1894.
134. Suter H., *"Des Kommentar des Pappus zum X Buche der Eucklides aus der arabischen Übersetzung des Abü Othman al-Dimashki ins Deutsche übertragen"*. Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der medizin 4, p.p. 9-78, 1922.
135. Suter Heinrich, *"Das Mathematiken – Verzeichniss im Fihrist"* Abhandlungen sur Geschichte der Mathematik, p.p. 1-87, Leipzig 1892.
136. Szabo Arpad. *"Die Entfaltung der Griechischen Mathematik"*, Bibl. Institute, Mannheim 1994.
137. Szabo Arpad. *"Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών"*, μετάφραση Φ. Βασιλείου, Τ.Ε.Ε. Αθήνα 1973.

138. Tannery P. "*La Geometrie Greque*", Paris 1887 (επαν. Olms G., Hidselshelm 1988)
139. Tannery P. "*Mémoires Scientifiques*" (pub. J-L. Heiberg & H.-G. Zenthen) vol. I Paris 1876, (επαν. Gambay, J. 1995).
140. Tannery P. "*Pour l' histoire des lignes et surfaces courbes dans l' antiquité*", Bulletin des Sciences mathématiques, 1883-1884.
141. Tannery P. "*Sur l' authenticité des axiomes d' Euclide*", Bulletin des Sciences mathématiques, t VIII p.p. 162-175.1884.
142. Tannery P. "*Sur la locution ἐξ ἴσου*", Revue des études grecques, t. X, p.p. 14-18.1897.
143. Taylor E. A. "*Commentary on Platos Timaeus*", Oxford 1928.
144. Taylor Thomas, "*The Philosophical and mathematical Com-medaries of Proclus on the First Book of Euclid's Elements*", Loeb Cl. Lib., Darmstadt 1989.
145. Thaer C. "*Euclid, Die Elemente*", Wissenschaftliche Buchgesel-lschaft, London 1788-1789 και 1791.
146. Thaer C. "*Euclid. Die Data von Euclid*", Springer, Berlin 1962.
147. Thomas I. "*Selections illustrating the history of Greek Mathe-matics*", vol.2, Loeb Classical Library London 1980.
148. Todhunter I. "*The Elements of Euclid, for the use of Schools and Colleges*", London 1882.
149. Unguru S. "*On the Need to Rewrite the History of Greek mathe-matics*", Archive of Hist. Of Exact Scienses, p.p. 67-113 1975.
150. Van Der Waerden B. L. "*Science Awakening*", Noordhoff, Groningen 1954.
151. Van Der Waerden B.L. "*Die Pythagoreer*" Artemis, Zurich 1979.
152. Van Pesch G.J. "*De Procli fontibus*", Leiden 1900
153. Ver Eecke P. "*Pappus Alexandrini. La collection mathématique*", Bruges, Paris 1933.
154. Ver Eecke P. "*Proclus de Lycie, Les Commentaires sur le premier livre des Elements d'Euclide*", Paris 1948.
155. Vitruvius. "*Περὶ ἀρχιτεκτονικῆς*" βιβλία 10, Εγνατία, Θεσσαλονίκη 1988.
156. Vogt Heinrich, "*Die Entdeckungesgeschichte des irrationalen nach Plato usw*". Bibliotheca Mathematica vol. 10, τεύχος 3^ο, σελ. 155, 1910.
157. Vogt Heinrich, "*Die Lebenzeit Euidhs*", Bibliotheca Mathematica 13 p.p. 193-200, 1913
158. Von Fritz K. "*Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissen-schaft*", de Gruyter, Berlin 1971.

159. Wehrli F. (her). "*Die Schule des Aristoteles*" (Texte und Kommentar), Basel 1953.
160. Woepcke F. "*Essai d'une restitution de travaux Perdus d' Apollonius sur les quantités irrationnelles*" Memoires présentés par divers Savants a l' Academie des sciences, vol. 14, p.p. 658-720, 1856.
161. Woepcke F. "*Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d' Euclide*", Journal asiatique 18, ser.4th, σελίδες 233-247, 1851.
162. Woepke F. "*Extrait du Fakhris*", Paris 1853 (επὼν. Olms G., Hildesheim 1982).
163. Zacharias M. "*Das parallelen problem und seine Lösung*", Sam Gössen, Leipzig und Berlin 1937.
164. Zervos P.S. "*On the development of Mathematical Intuition, on the genesis of Geometry, further remarks*", Tensor 26, 1972.
165. Zeuthen H. G. "*Histoire des Mathematiques dans l' Antiquité et le Moyen Age*" Paris 1902.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

- Αγία Γραφή, 9
Αιγύπτιοι, 367
Αίγυπτος, 13, 14
αίτημα, 8, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24,
25, 26, 30, 31, 57, 60, 62, 64, 65,
71, 73, 80, 89, 90, 93, 109, 110,
111, 112, 113, 114, 115, 151, 171,
174, 175, 179, 262, 337, 338, 339
Ακαδημία του Πλάτωνα, 10, 13, 34,
ακτίνιο, 101
Αλγεβρική Γεωμετρία, 231
αλγόριθμος του Ευκλείδη, 33
Αλεξάνδρεια, 10, 11, 12, 14, 17
Αλέξανδρος ο Μέγας, 13
αμβλεία γωνία, 91, 104
άμεση απόδειξη, 261
αναλλοίωτη Zeuthen – Segre, 207
αναλλοίωτη, 15, 180, 192
ανάλογα μεγέθη, 366, 368
αναλογία, 16, 31, 32, 365, 366, 368,
406
αναλογίες εμβαδών, 417, 418, 447
Αναλυτικά Πρότερα, 11, 21, 100,
109, 171
Αναλυτικά Ύστερα, 19, 23, 180,
309, 400, 421
αναλυτική μέθοδος, 7, 24, 367
Αναξίμανδρος, 26, 209
ανάπαλιν ή αντίστροφος λόγος, 369
αναστροφή λόγου, 369
αντιστρόφως ανάλογα ευθύγραμμα
σχήματα, 419, 420
αξίωμα, 8, 11, 19, 21, 22, 23, 24, 25,
27, 30, 51, 52, 57, 93, 98, 110,
111, 114, 115, 116, 119, 256, 288,
294, 298
αξίωμα του Αρχιμήδη, 30, 373
αξιώματα της συνέχειας, 119
αξιώματα του μεταξύ, 119
αξιωματική θεμελίωση, 8, 15, 93
αξιωματική μέθοδος, 90
αξιωματικό σύστημα, 25, 89, 110
απαγωγή σε άτοπο, 261, 263, 272,
276, 283, 295, 321, 334
αποδεικτική διαδικασία, 7, 8, 261
απόδειξη, 8, 15, 16, 18, 19, 21, 22,
23, 24, 25, 32, 34, 39, 47, 48, 57
Απολλόδορος, 202
Απολλώνιος, 11, 12, 14, 15, 16, 18,
49, 53, 58, 60, 102, 105, 106, 107,
115, 144, 162, 180, 319, 338, 423
αραβικό λεξικό Fihrist, 17, 40, 56, 59
Αρεταίος, 207, 244, 247
Αριθμητική δια ψήφων, 15
αριθμητικός μέσος, 366, 367
αριθμοί Fibonacci, 211
Αρισταίος, 49
Αρίσταρχος ο Σάμιος, 273
Αριστόξενος, 45, 46
Αριστοτέλης, 8, 11, 13, 15, 19, 20,
21, 24, 50, 51, 52, 58, 65, 93, 94,
95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103,
105, 106, 107, 108, 109, 116, 129,
155, 171, 173, 175, 176, 180, 202,
228, 256, 257, 274, 280, 287, 309,
366, 421, 422, 430
Αριστοφάνης, 349
Αρμονικά, 46
αρμονικός μέσος, 366
άρρητα μεγέθη, 38
άρρητοι αριθμοί, 36
Αρχαία ελληνική εποχή, 53
Αρχαίοι Έλληνες, 16,
αρχή συνέχειας Dedekind, 120, 261
αρχικές έννοιες, 8, 19, 93
Αρχιμήδης, 10, 11, 13, 14, 16, 18,

- 24, 30, 37, 49, 51, 52, 53, 56, 58,
60, 98, 99, 106, 140, 186, 326,
334, 423, 430
 ασύμμετρα μεγέθη, 30, 36, 37, 38,
39, 81, 371
 ασύμμετροι αριθμοί, 23, 31, 37, 38,
367, 410
 Αυτόλυκος, 12, 13, 19, 20, 44, 93,
253, 299, 326
 Βαβυλώνιοι, 202, 367
 Βαρλαάμ, 72, 107, 111, 209
 Βατικανός Ελληνικός κώδικας 40,
41, 75, 76, 77, 78, 121, 148, 182,
187, 210, 243, 303, 305, 328, 336
 βιβλία των Στοιχείων, 63, 65, 70, 79,
81
 Βιβλίο Κανόνων, 40
 Βιενναίος ελληνικός κώδικας 78,
210
 Βοδληϊανός κώδικας, 78, 210
 Γαλιλαίος, 206, 215, 287
 Γέμινος ο Ρόδιος, 16, 21, 53, 58,
140, 180, 197, 259
 Γεωμετρία Minkowski, 127, 131
 Γεωμετρία των ορθογωνίων, 205
 Γεωμετρία των παραλλήλων, 25
 Γεωμετρίες των Λομπατσέφσκι–Bo-
lyai και Riemann, 262
 γεωμετρικά αντικείμενα, 19, 93, 109,
110
 γεωμετρικά μεγέθη, 20, 32
 Γεωμετρικά, 258, 259
 γεωμετρικές ακολουθίες, 409, 410
 Γεωμετρική Άλγεβρα, 25, 198, 206,
207, 217, 218, 223, 226, 231, 419
 γεωμετρική πρόοδος, 33, 34, 35
 γεωμετρικός μέσος, 33, 228, 367
 γεωμετρικός τόπος, 15, 50
 γνώμονας, 26, 145, 208, 209, 210,
211, 213, 214, 220, 223, 227, 229,
235
 γραμμή, 19, 25, 48, 91, 92, 94, 95,
96, 97, 98, 102, 107
 γωνία, 11, 20, 21, 25, 29, 32, 38, 42,
45, 57, 90, 91, 92, 101, 102, 103,
141, 151
 γωνία δύο ασύμμετρων ευθειών, 103
 γωνία δύο επιπέδων, 103
 γωνία ευθείας και επιπέδου, 103
 γωνία "κατά γνώμονα", 103
 γωνία τμήματος, 255, 259
 γωνία χορδής και εφαπτομένης, 251,
252
 Δάντης, 9
 Δασυπόδιος, 107, 111
 Δεδομένα, 24, 40, 41, 42, 43, 60, 62,
75, 78, 79, 226, 231, 235, 428,
430, 467, 471, 476, 477
 Δημήτριος ο Πολιορκητής, 13
 Δημήτριος ο Φαληρεύς, 13, 14
 Δημόκριτος, 287
 διάγραμμα, 105
 διαγώνιος, 106
 διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο
λόγο, 321
 διάκεντρος δύο κύκλων, 256, 278
 Διάλογοι σχετικά με δύο νέες επι-
στήμες, 206
 διαμετρικοί αριθμοί, 26, 27
 διάμετρος κύκλου, 91, 106
 διγνωμονικές διαιρέσεις, 213
 δι' ίσου λόγος, 369, 370, 410
 Διογένης ο Λαέρτιος, 26, 180, 202,
210, 287
 Διοφαντικές εξισώσεις, 28, 240
 Διόφαντος, 14, 63
 διπλασιασμός του κύβου, 15
 δύναμις του σημείου ως προς κύκλο,
317
 εγγεγραμμένη γωνία, 102, 251, 256,
259
 εγγράφημα και περιγράφημα πολύγω-
να, 293
 ειδική βαρύτητα, 51

- Εισαγωγή Αρμονική, 46
Εισαγωγή στα Μαθηματικά, 120, 241
εκδόσεις των *Στοιχείων* στα Αραβικά, 58
ελαχίστη αναλογία, 369, 371
ελικοειδής καμπύλη, 212
έλλειψη, 49, 97, 106, 196, 197
Ελληνικός Παρισινός κώδικας 2466, 78
εμβαδόν, 105, 183
εναλλάξ λόγος, 369
Εξαρχάκος Θ., 100, 120, 202, 241, 367
εξίσωση δευτέρου βαθμού, 26
εξίσωση Pell, 26
εξώστρεφη ηλιοτροπική καμπύλη, 212
επαγωγική διαδικασία, 24
επίκεντρη γωνία, 102, 251, 256
Επικούρειοι, 157
επίπεδη Γεωμετρία, 309
επίπεδη γωνία, 91
επίπεδη επιφάνεια, 91
επίπεδη κάθετος, 145
επίπεδο, 98, 99, 100, 103, 105, 127
επίπεδο Hilbert, 265, 339
επίπεδο Moulton, 127
επίπεδο σχήμα, 107
επιφάνεια, 91, 96, 98, 99, 100, 103, 114
Ερατοσθένης ο Κυρηναίος, 10, 11, 13, 14
Ερμότινος, 10
εσώστρεφη ηλιοτροπική καμπύλη, 212, 213
Εύδημος, 17, 18, 25, 58, 101, 106, 109, 126, 149, 161, 169, 178, 179, 196, 197, 201, 202, 228, 309, 325
Εύδοξος, 10, 13, 16, 38, 58, 366
ευθεία γραμμή, 90, 91, 94, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 109, 110, 111, 112
ευθεία στήριξης, 291
ευθύγραμμα σχήματα, 92
ευθύγραμμη γωνία, 91, 102, 104, 140, 286
Ευκλείδεια Γεωμετρία, 89, 90, 96, 119, 262, 278, 291, 315, 339
ευκλείδεια γωνία, 295
ευκλείδειο επίπεδο, 127, 130, 292, 294, 315, 325, 339
Ευκλείδειος αλγόριθμος, 211
ευκλείδειος χώρος, 111
Ευκλείδης ο Μεγαρέας, 12
Ευτόκιος, 56, 180, 326, 423
εφαπτόμενη ευθεία, 254
εφαπτόμενοι κύκλοι, 255, 258
εφεξής γωνίες, 90, 91, 103, 147, 149
Ζερβός, 93
Ζήνων ο Ελεάτης, 94, 106
ημικύκλιο, 91, 107, 286
Ήρων, 14, 16, 17, 18, 48, 53, 54, 55, 56, 64, 93, 95, 96, 97, 99, 104, 107, 116, 120, 121, 133, 144, 156, 157, 164, 165, 166, 190, 201, 204, 215, 219, 220, 256, 258, 259, 262, 272, 276, 280, 281, 283, 288, 293, 307, 311, 326, 422
Θαλής, 8, 17, 25, 101, 105, 106, 108, 109, 126, 129, 130, 149, 169, 171, 180, 309, 366
Θαύδιος, 18
Θεαίτητος, 10, 13, 16, 37, 38, 40, 58
θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής, 34
Θεοδόσιος ο Κυρηναίος, 273, 284, 285
Θεόδωρος Τριπολίτης, 485
Θεόφραστος, 13, 107
θέσεις, 8
Θέων, 14, 16, 44, 45, 53, 54, 55, 66, 69, 70, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 92, 96, 153, 170, 280, 309, 317, 423,

- 441, 462, 479, 485
 Θεώνας ο Σμυρναίος, 95, 96, 99, 220
 θεώρημα F. Bolyai – A. Gerwin, 186
 θεώρημα της αμβλείας γωνίας, 244
 θεώρημα της οξείας γωνίας, 247
 θεώρημα του Θαλή, 418, 427
 θεώρημα του συνημιτόνου, 247
 θεωρία των εμβαδών, 183
 θεωρία των παραλλήλων, 171
 Θήβα, 13
 Θησαυρός της Ανάλυσης, 24, 40, 48, 49
 θυρεός, 49, 97
 Ιάμβλιχος, 349, 366
 Ίππαρχος, 14
 Ίππασος ο Πυθαγόρειος, 349
 Ιππίας ο Ηλείος, 140, 205
 Ιπποκράτης ο Χίος, 18, 107, 228, 229, 252
 υποπέδη, 102
 ισαπέχουσες ευθείες από κέντρο κύκλου, 255
 Ισίδωρος, 61
 ισογώνιο τετράπλευρο, 107
 ισοδιαχωρίσιμα σχήματα, 186
 ίσοι κύκλοι, 254
 ισοπεριμετρικά θεωρήματα, 187
 ισόπλευρο τρίγωνο, 92, 107, 108
 ισοσκελές τρίγωνο, 92, 107, 108
 ισότητα, 19, 31
 Ιστορία της Αριθμητικής, 58
 Ιστορία της Αστρονομίας, 58
 Ιστορία της Γεωμετρίας, 17, 18, 58, 228
 Ιστορία των Μαθηματικών, 100, 180, 202
 κανονικά πολύγωνα, 29
 κανονικά στερεά, 39
 κανονικό ν-γωνο, 343
 Κάρπος, 102
 Κάσσανδρος, 13
 κατασκευή, 23, 38
 Κατατομή Κανόνος, 45, 46
 Κατοπτρικά, 41, 45, 78, 79
 κερατοειδής γωνία, 29, 100, 104, 140, 259, 286, 287
 Κικέρων, 64, 202
 κισσοειδής γραμμή, 102
 Κλεονίδης, 46
 κλίση, 91, 102, 270
 κοίλη καμπύλη, 265
 κοινές έννοιες, 8, 11, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 64, 65, 80, 89, 93, 110, 111, 114, 115, 116
 Κόνων ο Σάμιος, 14
 Κρίτων ο Αθηναίος, 18
 κυκλικά τόξα, 258
 κύκλος, 20, 28, 29, 39, 43, 48, 251
 κύκλος του Απολλωνίου, 15
 κύλινδρος, 50
 κυρτή καμπύλη, 265
 κυρτό σύνολο, 264, 265
 κυρτό τόξο, 259
 κώδικας 2457, 39^ο, 62
 κώδικας D' Orville, 163, 248
 κώδικας lat. Mon. 13021, 68
 κώδικας Leidensis 399, 54, 62
 κώδικας Mutin IIIB, 4, του 15^{ου} αιώνα, 70
 κώδικας Paris. gr. 2343, 71
 κώδικας Reginensis lat. 1268 του 14^{ου} αιώνα, 67
 κώδικας Thurston 11, 60
 κώδικας Vat. 192, 73
 κώδικας Vat. 1037, 75
 κώδικας Venetus Marcianus 71
 κώδικας Βατικανού, 78, 143, 149, 153, 157, 209, 210, 228, 247, 259, 268, 270, 303, 305, 485
 κώδικας Βιέννης, 78, 149, 175, 188, 210, 222, 238, 443
 κώδικας Λαυρεντιανός, 210
 κώδικας Μπολώνιας, 149
 κώδικας Παρισινός, 68, 78, 104, 105,

- 140, 170, 171, 222, 256, 258, 282, 299, 349
- κώδικας της Βενετίας, 132, 323
- κώδικας της Δημοτικής Βιβλιοθήκης της Μπολόνια, 78
- κώδικας της Φλωρεντίας, 78, 142, 194, 209, 210, 233, 238, 244
- κώδικες pal. 273 και 313, 61
- Κωνικά, 41, 49, 63, 180, 231
- Κωνικές τομές, 31, 49, 50, 60, 196
- κώνος, 50
- Λεξικό Σούδα, 209
- Λέων ο Αθηναίος, 18
- λόγος, 30, 366, 367, 368
- μαθηματικές έννοιες, 19
- Μαθηματική Συναγωγή, 55
- μαθηματικό βιβλίο, 12, 19
- Μαρίνος, 40, 41, 42, 45, 78, 79
- μεγέθη, 404, 405
- μέθοδοι απόδειξης, 7, 24, 352
- μέθοδος απαγωγής σε άτοπο, 8, 24, 25, 34, 62, 367
- μέθοδος Πυθαγορείων, 374, 376
- μέθοδος συνθετική 7, 24, 367
- μέθοδος τέλειας επαγωγής 8, 24, 27, 34
- μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής, 280
- μέθοδος της εξάντλησης, 36, 39, 155
- μέθοδος "της επίθεσης", 111, 116, 126
- μέθοδος της σύγκρισης εμβαδών, 196
- μέθοδος της συνεπαγωγής, 7, 24
- μεικτή γωνία, 29, 140, 286
- Μένων, 105, 108
- μέση ανάλογος, 441
- μεσημβρινός κύκλος, 44
- μέσος αριθμητικός, 366
- μέσος αρμονικός, 366
- μέσος γεωμετρικός, 366
- μέσος και άκρος λόγος, 420
- Μετά τα Φυσικά, 93, 94, 108, 180, 309
- μεταφράσεις και εκδόσεις των Στοιχείων, 52
- Μετεωρολογικά, 15, 138, 155, 257, 274, 422
- Μετρικά, 48, 64
- μετρικές σχέσεις στον κύκλο, 252, 315
- μετρική Γεωμετρία, 288, 291
- μη ευκλείδειες Γεωμετρίες, 22, 25, 96, 113, 153, 174, 335, 338, 339
- μη-ευκλείδειοι χώροι, 103
- μηνίσκος, 252, 258
- μη-ομογενή μεγέθη, 373
- Μηχανικά, 107
- Μηχανική, 41, 51, 52
- Μικρή Αστρονομία, 44
- Μιχαήλ Εφέσιος, 50
- μοίρα, 101
- μονογενωμονικές διαιρέσεις, 213
- μοχλός, 51, 52
- Νεύσις, 15, 259
- Νεύτων, I., 287
- Νεφέλες, 349
- Νικόμαχος Γερασινός, 107, 366
- Νικομήδης, 140
- Οινοπίδης, 145, 161
- ομοειδή, 405
- όμοια σχήματα, 259
- ομοιόθετα σχήματα, 455
- ομοιότητα τριγώνων και πολυγώνων, 417
- ομόλογα μεγέθη, 369
- οξεία γωνία, 91, 104
- οξυγώνιο, 92, 108
- Οπτικά, 40, 41, 44, 45, 78, 79
- ορθή γωνία, 20, 25, 91, 104, 111
- ορθογώνιο, 92, 108
- ορίζοντας, 44
- όριο ακολουθίας, 36
- ορισμός, 8, 15, 19, 20, 23, 24, 26, 29,

- 30, 31, 32, 33, 38, 42, 44, 45, 63, 64, 80
 Ουδέτερη (Απόλυτη) Γεωμετρία, 25, 90, 116, 127, 131, 153, 262, 265, 266, 285, 288, 289, 292, 294, 298
 παλίμνηστο της Βερόνας, 65
 Παμφίλη, 180
 Πάππος, 11, 14, 16, 17, 18, 21, 24, 37, 38, 40, 43, 44, 48, 49, 50, 53, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 76, 102, 105, 111, 116, 130, 131, 203, 231, 257, 259, 326, 327
 παραβολή, 49, 196, 197, 235
 παραβολοειδές, 50
 παραδοχές, 19, 45
 παράλληλες, ευθείες, 21, 92
 παραλληλόγραμμο, 19, 43, 47, 106
 παραπληρωματικές γωνίες, 147
 Παρμενίδης, 97, 103
 πεπερασμένες γεωμετρικές, 96, πέρας, 91, 95, 99, 105
 Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων, 40, 41, 51
 Περί διαιρέσεων, 40, 41, 45, 46, 47, 60
 Περί εκείνων των μερών της Γεωμετρίας που είναι απαραίτητα στους Τεχνικούς, 144
 Περί ζώων γενέσεως, 104
 Περί κινουμένης σφαίρας, 12, 19, 252, 299
 Περί μεγεθών και αποστάσεων από τον Ήλιο και τη Σελήνη, 273
 Περί Ουρανού, 94
 Περί οχουμένων, 97
 Περί προτάσεων, 62
 Περί ρητορικής, 64
 Περί σοφιστικών ελέγχων, 50
 Περί σφαίρας και κυλίνδρου, 37, 56, 98
 Περί Ψυχής, 96, 108, 256
 περιεχόμενο σχήματος, 25
 περιφέρεια κύκλου, 276
 Πλάτων, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 20, 37, 38, 39, 58, 65, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 102, 103, 105, 107, 108, 115, 241, 349, 366
 πλατωνικά στερεά, 39
 πλευρικοί αριθμοί, 26, 27
 Πλούταρχος ο Αθηναίος, 102, 109, 202, 471
 Πλωτίνος, 116
 Πολιτεία, 241
 πολυδιάστατος χώρος, 103
 πολυεδρική γωνία, 103
 πολύπλευρο, 92, 107
 πόρισμα, 24, 40, 41, 48, 54, 134
 Πορφύριος, 17, 46, 53, 58, 133, 154, 157, 158, 169, 365
 Ποσειδώνιος, 21, 95, 105, 106
 πρόβλημα της χρυσής τομής, 26
 πρόβλημα του Απολλωνίου, 338
 προ-ευκλείδεια ελληνικά Μαθηματικά, 171, 365
 Πρόκλος, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 32, 40, 41, 44, 45, 47, 48, 50, 53, 54, 57, 58, 70, 76, 93, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 111, 112, 115, 120, 121, 124, 126, 129, 132, 133, 134, 135, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 149, 150, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 169, 170, 172, 173, 175, 177, 178, 179, 180, 181, 186, 188, 190, 192, 194, 195, 196, 197, 199, 201, 202, 204, 259, 261, 349, 364, 425, 481
 Προς μαθηματικούς, 95
 πρότασης βήματα, 23
 Πτολεμαίος, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 21, 46, 53, 58, 112, 423, 485
 Πτολεμαίος ο 3^{ος} ο Ευεργέτης, 11
 Πτολεμαίος ο 4^{ος} ο Φιλοπάτορας, 12

- Πτολεμαίος ο Κλαύδιος, 14
 Πυθαγόρας, 180, 201, 202, 366
 Πυθαγόρειο θεώρημα, 26, 32, 90, 129, 200, 202, 203, 204, 283, 481
 Πυθαγόρειοι, 8, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 94, 95, 98, 102, 108, 109, 171, 178, 198, 252, 365, 471
 ρομβοειδές, 92, 109
 ρόμβος, 92, 109
 Σατυρικόν, 64
 Σέξτος ο Εμπειρικός, 95
 σημείο, 19, 21, 25, 48, 50, 117, 118, 121
 Σιμμίας ο Θηβαίος, 18
 Σιμπλίκιος, 17, 21, 53, 54, 100, 109, 325
 σκαληνό τρίγωνο, 92, 107
 Σταμάτης Ε., 9, 79
 στερεά γωνία, 98, 103
 στερεά κάθετος, 145
 Στομάχιον, 186
 Στωβαίος, 107
 σύμμετρα μεγέθη, 30, 32, 37, 371, 374, 376, 425
 σύμμικτα υπομονήματα, 180
 συμπέρασμα, 24, 48
 συμπληρωματικές γωνίες, 146
 Συμποσιαστές, 471
 Συναγωγή, 11, 24, 43, 44, 49, 50, 55, 203, 257, 259
 συνέχεια του χώρου, 20
 συνεχείς αναλογίες, 33, 34, 369
 συνεχή κλάσματα, 211
 συνεχής διαίρεση, 241, 243
 σύνθεση λόγου, 369
 σύνθετα σχήματα, 105
 σύνθετος λόγος, 418, 423, 467
 σύνορο, 91
 Σύνταξη, 423
 Συριανός ο Αλεξανδρινός, 102
 σφαίρα, 38, 39, 40, 50, 96, 98, 106
 Σφαιρικά, 43, 273, 285
 σφαιροειδές, 50, 105
 σχάμα, 105
 σχήμα, 90, 91, 92, 103, 105, 107, 112
 Σχολή του Πλάτωνα, 11
 σχόλια, 9, 10, 16, 17, 18, 40, 41, 46, 50, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 66, 70, 71, 73, 74, 79, 92
 Σχόλια των "Κωνικών", 231
 Σχόλια των "Φυσικών", 228
 Σωκράτης, 18, 105, 108
 τέλειος αριθμός, 33, 35, 36
 τεταγμένη αναλογία, 409, 410
 τέταρτη ανάλογος, 445
 τετραγωνισμός ευθύγραμμου σχήματος, 198, 247
 τετραγωνισμός του κύκλου, 15
 τετράγωνο, 107, 108
 Τίμαιος, 34, 39, 349
 τμήμα κύκλου, 255
 τομέας, 255
 τοπικό θεώρημα, 186, 192
 Τόποι προς επιφάνειες, 24, 40, 41, 49, 50
 τραπέζιο, 47, 92
 τριγωνική ανισότητα, 158
 τρίπλευρο, 92, 107
 τρίτη ανάλογος, 444, 445
 τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας, 15
 Υπατία, 14
 υπερβολή, 49, 196, 197
 Υπερβολική Γεωμετρία, 153
 υπερβολοειδές, 50
 υπερεπίπεδο, 103
 υποεφαπτομένη, 291, 292
 υποθέσεις, 8, 15, 19, 45, 110, 115
 Φαίδων, 365
 Φαινόμενα, 12, 40, 41, 43, 44, 49, 78
 Φίλιππος ο Μενδαίος, 10
 Φιλόλαος, 18, 21
 Φιλόπονος Ιωάννης, 456
 Φύλωνας ο Βυζαντινός, 138

χειρόγραφο 18-19 της Δημόσιας
Βιβλιοθήκης της Μπολόνια, 41
χορδές τεμνόμενων ή εφαπτόμενων
κύκλων, 252
Χρυσή τομή, 231
Ψελλός Μ., 456
Ψευδάρια, 41, 50

Abû I Wafa al-Buzjani, 63
Abû Jafar al-Khazin, 63
Abûl Faraj, 64
Abu Uthmam al-Dimashgi, 55, 60
Adelard του Bath, 66, 67, 68
Agrimensores, 65
al-Abbas b. Said al-Jauhari, 63
al-Battani, 58
al-Farabi, 63, 144
al-Haithan, 63
al-Hajjaj, 54, 59, 60, 61, 62, 63, 66,
67
al-Hazen, 63
al-Kindi, 63
al-Ma'mun, 59, 63
al-Mansûr, Χαλίφης, 58, 59
Almagest, 53
al-Nadim, 59, 60, 62, 63
al-Nayrizi, 16, 17, 21, 54, 62, 95, 97,
100, 116, 120, 133, 144, 155, 190,
201, 204, 215, 219, 220, 245, 256,
262, 266, 268, 272, 276, 280, 283,
293, 307, 311
al-Tusi, 61, 62, 66, 112
Archibald, R.C., 46
Ars Magna, 208
Artmann, B, 323, 418
August, E.F., 220
Austin, W, 76
Avicenna, 61
Bacon, R., 68
Barocius, 23, 107
Barrow, I., 31, 76

Bayfios, L., 71
Becker, O., 110
Bergstrasser, G., 56
Besthorn, R.O., 54, 62
Biblionomia, 68
Bibliothecae Regiae Universitatis
Monacensis 2^o .757, 65
Billingsley, H., 72
Birkhoff, G., 110
Björnbo, A. A., 67
Bodleian βιβλιοθήκη, 51, 60, 63, 78
Boethius, A., 65
Bolyai, F., 338
Bolyai, J., 22, 113, 338
Bolzano, B., 131
Borelli, 76
Bretschneider, F., 169
Briggs, H., 73
Brunschvicg, L.O., 90, 92
Bryant, 399
Burkert, W., 365
Caiani, A., 71
Cajori, E., 100
Camerarius, J., 71
Camerer, J.G., 75, 275, 278
Campanus, J., 68, 69, 70, 71, 72, 73,
320, 337, 423
Cantor, M., 12, 169
Capella, M., 64, 93
Cardano, G., 208, 287
Caroll, L., 130
Cassiodorus, M.A., 65
Cayley, A., 31
Censorinus, 64
Chasles, M., 48
Cherard, 62
Clagett, M., 51
Clairaut, A., 203
Clanvill, 116
Clavius, C., 74, 76, 287
Codex Berlin 5942, 62
Cod. Bononiens. 196 του 14^{ου} αι., 67

- Cod. Brugens. 521 του 14^{ου} αι., 67
 Cod. Digby 174 του 12^{ου} αι., 67
 Codex Leidensis 399, 59, 62
 Codex Paris 2467, 5^ο, 62
 Codex Paris. 7216 του 15^{ου} αι., 67
 Codex Vaticanus 190, 75, 76, 93
 Codex Vaticanus 204, 75
 Codex Vaticanus 1038, 75
 Commandinus, 48, 73, 76
 Curtze, M., 21, 51, 62, 66, 79
 Da Vinci, L., 202
 Dasypodius, C., 71, 72, 118
 De die natali, 64
 De expetendis et fugiendis rebus, 70
 De Foix, F., 72
 De Fournival, R., 68
 De Moivre, A, 280
 De Morgan, A., 30, 136, 143, 164,
 259, 330, 362, 465
 De Nuptiis, 64
 Dedekind, R., 120, 373
 Dee, J., 48, 72
 Desarques, R., 482
 Dijksterhuis, E.J., 80
 Dimashgi, 66
 Dodgson, C. L., 130
 Duart, F. J., 53, 69
 Duhen. P., 51, 52
 Enriques, F., 80
 Euclides ab omni naevo Vindicatus,
 22
 Euclidis Opera Omnia, 9
 Euler, L., 35
 Fibonacci, L., 46
 Fihrist, 40, 54, 56, 62
 Finaeus, O., 71
 Five-Books of Boethian Geometry,
 65
 Forcadel, P., 72
 Fowler, D. H., 207
 Frajese, A., 151, 153
 Fraser, P., 12
 Frege, G., 155
 Friedlein, G., 21, 22, 44, 47, 48, 50,
 57, 58
 Gandz, S., 100
 Garfield, J.A., 202
 Gauss, C. F., 100
 Gerard της Cremona, 54, 66, 67
 Gergone, G., 335
 Geymonat, M., 65
 Gow, G., 12
 Gracilis, S., 71
 Gregory, D., 48, 51, 73, 74, 75
 Grynæus, S., 70, 71, 73, 75
 Hadamard, J., 354
 Hall, S.H., 130, 135, 276, 284, 295
 Hankel, H., 12, 365
 Harum al-Rashid, 59
 Harumian, 59
 Hasse, H., 116
 Hauber, C. F., 75
 Heath, T.L., 9, 12, 17, 18, 31, 38, 41,
 48, 52, 54, 67, 69, 71, 76, 79, 97,
 98, 100, 102, 105, 107, 130, 136,
 160, 169, 170, 171, 180, 182, 196,
 201, 216, 217, 226, 228, 229, 256,
 259, 284, 286, 302, 352, 362, 372,
 422, 423, 427, 439, 446, 469, 472
 Heiberg, J.L., 9, 17, 23, 29, 31, 37,
 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 54, 56,
 60, 62, 66, 71, 73, 76, 77, 78, 79,
 80, 90, 116, 118, 140, 182, 201,
 220, 259, 275, 276, 278, 337, 362,
 410, 441, 457, 461, 462, 474
 Helmholtz, R., 127
 Hervagius, 51
 Herz – Fischler, R., 350, 354
 Hilbert, D., 25, 110, 120, 127
 Holtzmann, W., 72
 Hoppe, E., 12
 Horsley, S., 73
 Hultsch, F., 11, 12, 43, 44, 48, 55
 Ibn Muadh al-Tayani, 62

- Ibn al Sari, 64
 Institutiones, 65
 Ishaq - Thabit, 59, 60, 61, 62, 63, 66
 Ishaq Ibn Hunayn, 60
 Itard, J., 80
 Jordan, M., 338
 Junge, G., 56
 Kant, E., 15
 Kelvin, L., 101
 Khayyam, O., 63
 Kitab al-shifa, 61
 Klamroth, M., 60, 62, 76
 Knorr, R., 485
 Legendre, A., 151, 425
 Leibnitz, C., 90, 131
 Lenstra, H., 354
 Liber de canonio, 52
 Lobatsevski, N., 22, 25, 113, 174, 338
 Loomis, E.S., 202
 Loria, G., 9, 12, 48
 Magistros, G., 63
 Mamunian, 59
 Marolois, S., 249
 Marrow, G. R., 58
 Martin, G., 130
 Menge, H., 9, 31, 37, 40, 41, 44, 45, 56, 73, 76, 77, 78, 79, 80
 Michel, P.H., 197, 226, 323
 Molodski, V., 11
 Moody, E.A., 51
 Morduchai – Boltovskogo, D.D., 80
 Mueller, I., 106, 170, 477
 Mugler, C., 95, 182, 362
 Muhamed b. Tsa Abu Abdallah al-Mahani, 62
 Muhammad Bagdadinus, 48
 Muhammad ibn Abdal-Bagi, 66
 Müller, J.W., 202
 Murdoch, J., 66
 Nazif ibn Yumn, 60
 Nesselman, K. H., 223
 Neuenschwander, E., 323, 350
 Neugebauer, O., 202
 Newton, I., 15
 Nipsus, M.J., 169
 Pacioli, L., 70
 Peletier, J. (Peletarius), 71, 76, 127, 221, 287, 352
 Peyrard, F., 75, 76, 77, 485
 Playfair, 175, 176
 Plimpton, 202
 Prenowitz, W., 338
 Principia, 15
 Pseudo-al-Tusi Tahrir, 64
 Ratdolt, E., 69
 Recorder, B., 72
 Rey, A., 365
 Riccardi, P., 69
 Riemann, B., 22, 25, 174
 Rvelliuss, I., 71
 Saccheri, G., 22, 113
 Sachs, E., 11, 353
 Sarton, G., 51
 Scheubel, I., 71, 72
 Schmidt, M., 169
 Scholz, H., 116
 Simon, M., 131, 135, 182
 Simplicius, 94, 228
 Simson, R., 48, 73, 76, 99, 106, 135, 160, 164, 224, 226, 230, 249, 275, 276, 284, 295, 314, 337, 422, 428, 441, 442, 455, 469, 482
 Smith, A., 399
 Stanford, C. T., 53, 69
 Steck, M., 12, 53, 69
 Steiner, J., 455
 Stevens, H.F., 130, 135, 276, 284, 295
 Supplimentary, 79
 Suter, H., 40, 56, 61
 Szabo, A., 226, 231, 366
 Tabit ben Qurra, 58
 Tacquer, O., 76

- Tannery, P., 17, 44, 115, 116, 169,
197, 207, 226, 231, 374, 427
Tartaglia, N., 71, 76
Taylor, M.H., 352
Taylor, T., 58, 123
Thabit ibn Qurra al-Harrani, 60, 61,
62, 66
Thaer, C., 12, 367
Thodoric, 65
Thomas, I., 9, 51
Thomson, W., 37, 56
Thureau-Dangin, F., 100
Toddhunter, 439
Unguru, S., 226
Valla, G., 69
Van der Waerden, B.L., 12, 27, 59,
109, 197, 226
Van Swinden, 421
Ver Eecke, P., 55, 58
Veronese, G., 127
Viète, F., 287
Vigodski, M., 11
Vogt, H., 12
Von Carinthia, H., 68, 106, 293
Von Fritz, K., 106
Von Wilamowitz-Moellendorff, U.,
11
Wallis, J., 76, 112, 287
Weierstrass, K., 31
Woepcke, F., 46, 52, 56, 60
Zamperti, B., 70, 71, 72, 73
Zeuthen, H.G., 12, 31, 50, 110, 207,
223, 224, 226, 229, 231, 240