

Μαθηματικές μηχανές

Συμμετέχοντες μαθητές: Αλποχωρίτης Μάριος, Αναλυτής Γεράσιμος, Βόσσου Δέσποινα, Γουλιάμη Δήμητρα, Καϊμακάς Κωνσταντίνος, Καρακάσης Κωνσταντίνος, Καρέλα Ολυμπία, Κοκκίνης Δημήτριος, Κύρκος Αναστάσιος, Λούβαρη Εμμέλεια, Παπακώστας Ανδρέας, Τσάτης Αλέξανδρος

Υπεύθυνοι Εκπαιδευτικοί: Ντόντος Γεώργιος ΠΕ03 (gkdodos@sch.gr), Παναγιωτόπουλος Λεωνίδας ΠΕ03 (leopan2009@gmail.com), Τσέτικα Αντιγόνη ΠΕ03 (atset79@yahoo.gr)

Σχολείο: 9^ο Γενικό Λύκειο Πάτρας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο παρόν άρθρο περιγράφεται μία πλέον άγνωστη έννοια στις σχολικές αίθουσες, αυτή των μαθηματικών μηχανών. Αρχικά γίνεται μία ιστορική διαδρομή όπου αναδεικνύεται η σχεδόν παράλληλη πορεία των Μαθηματικών και της Μηχανολογίας, με ενδεικτική αναφορά σε κάποιους που συνετέλεσαν στην ανάπτυξη αυτών των δύο επιστημονικών περιοχών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τέσσερις μαθηματικές μηχανές, αναλύοντας την δομή τους και το αποτέλεσμα της χρήσης τους καθώς έχουν κατασκευασθεί προσομοιώσεις τους μέσω του λογισμικού Geogebra. Περιγράφεται η κατασκευή μίας εκ των τεσσάρων μηχανών με φυσικά υλικά. Τέλος συζητούνται οι εντυπώσεις από την Ιστορία, την ανάλυση και την σύνθεση αυτών των οργάνων μέσω προσομοίωσης αλλά και μέσω της προσπάθειας κατασκευής με φυσικά υλικά.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Μαθηματικές Μηχανές, Παντογράφος, Ευθυγράφος, Δήλιο Πρόβλημα, Παραβολογράφος.

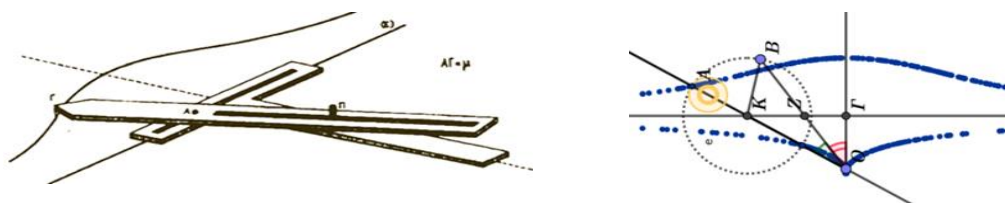
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο **Descartes** (1596-1650) στο έργο του “Geometrie” αποκαλούσε κάποιες μαθηματικές μηχανές ως «άλλους διαβήτες» (Descartes, 1925). Έχει ενδιαφέρον η δομή τους, το αποτέλεσμα της χρήσης τους, οι μαθηματικοί και μηχανολογικοί νόμοι που ενσωματώνουν, αλλά και η κοινωνική και ιστορική παρουσία τους. Η έρευνα έγινε σε ώρες εκτός ωρολογίου προγράμματος και με βασικό εργαλείο την στοχευμένη έρευνα στο διαδίκτυο, το λογισμικό Geogebra και κάποια εργαλεία και υλικά. Η ομάδα χωρίστηκε σε τέσσερις τριμελείς υποομάδες. Υπήρξε προβληματισμός σχετικά με την αξιοπιστία των πηγών και για το άγνωστο αντικείμενο έρευνας. Σκοπός αυτής της εργασίας ήταν (α) να τοποθετηθούν ιστορικά κάποιες μαθηματικές μηχανές, (β) να αναλυθούν τα μαθηματικά τους και να γίνει σύνθεση κάποιων μηχανισμών σε περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας και (γ) να κατασκευασθεί ένας μηχανισμός εξ αυτών.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

Ο **Μέναιχμος** (375-300 π.Χ.) ήταν Έλληνας μαθηματικός και συνεργάτης του Πλάτωνα. Αρχικά μαθήτευσε κοντά στον Εύδοξο. Υπήρξε δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου στα Μαθηματικά και είναι ο πρώτος που ανακάλυψε τις κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή) (Β' Ευκλείδης, 2019, τόμος 114). Ο Μέναιχμος διέθετε μια μηχανική συσκευή για την κατασκευή κωνικών τομών, την οποία χρησιμοποίησε για να λύσει το Δήλιο πρόβλημα (διπλασιασμός του κύβου) (Taimina, 2007).

Ο **Νικομήδης** (200 π.Χ.) με την κογχοειδή καμπύλη του και με τον μηχανισμό χάραξής της (εικόνα 1) κατάφερε να δώσει έναν μηχανικό τρόπο να επιλυθούν τα γεωμετρικά προβλήματα του διπλασιασμού του κύβου και της τριχοτόμησης γωνίας. Η καμπύλη αυτή είναι ο επίπεδος γεωμετρικός τόπος των αντιδιαμετρικών σημείων Γ και Γ' που αποτελούν την τομή μίας ημιευθείας με σταθερή αρχή και ενός κύκλου του οποίου το κέντρο σύρεται πάνω σε μία ευθεία (ε) (School of Mathematics and Statistics/ University of St. Andrews, n.d.).



Εικόνα 1 : μηχανισμός χάραξης της κογχοειδούς καμπύλης και προσομοίωση στο Geogebra.
<https://www.geogebra.org/m/a7e95yde>

Ο **Ισίδωρος ο Μιλήσιος** (442-537 μ.Χ.) ήταν Έλληνας μαθηματικός και μηχανικός και συνεργάτης του μηχανικού Ανθεμίου από τις Τράλλεις (474-534 μ.Χ.), για την ανοικοδόμηση της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη το 537 μ.Χ. επί Ιουστινιανού Α΄. Σημαντική ήταν η συμβολή του στα Μαθηματικά, κυρίως μέσα από τη διάδοση κειμένων του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη. Ήταν καθηγητής Μαθηματικών και ιδρυτής σχολής μηχανικών (Wikipedia, n.d.). Σύμφωνα με τον Ευτόκιο (480-540 μ.Χ.), ο Ισίδωρος ήταν επίσης εφευρέτης οργάνου, σε μορφή διαβήτη, για τη χάραξη παραβολικών τόξων (Johnston Allman, 1877, σ. 163).

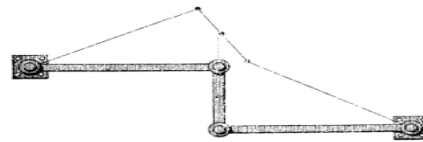
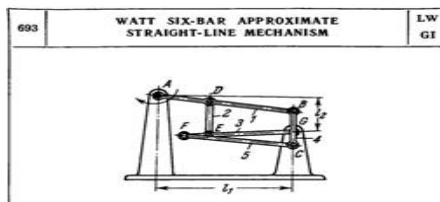
Ο **Francesco Barozzi** (1537-1604) γεννήθηκε στο Ηράκλειο Κρήτης την εποχή της Ενετικής κατοχής. Σπούδασε Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο της Padua. Μετέφρασε το 1560 στα Λατινικά την έκδοση του Πρόκλου για τα Στοιχεία του Ευκλείδη και έργα των Ήρωνα, Πάππου και Αρχιμήδη. Ο Barozzi τόνισε ότι η βεβαιότητα των Μαθηματικών περιέχεται στη «συντακτική αυστηρότητα των επιδείξεων». Ο Barozzi αφιέρωσε αυτό το έργο στον μηχανικό Daniele Barbaro (1514-1570) ο οποίος μετέφρασε και σχολίασε τα έργα του Ρωμαίου μηχανικού και μηχανολόγου Vitruvius (80 π.Χ.-15 μ.Χ.) (Wikipedia, n.d.). Περιέγραψε δύο κωνικογράφους (Barozzi, 1586, σελ. 30 & 31) και ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τις ιδιότητες και την χάραξη κωνικών τομών (εικόνα 2).

Ο **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) ήταν Ιταλός μαθηματικός και καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Bologna. Ο Galileo Galilei (1564 -1642) τον εκτιμούσε για τις γνώσεις του στην Γεωμετρία. Συνδέεται επίσης με τους μαθηματικούς Marin Mersenne (1588 -1648) και Evangelista Torricelli (1608-1647) λόγω της εργασίας του στα προβλήματα οπτικής και κίνησης (mathshistory.st-andrews, n.d). Σημαντική η εργασία του με τα «αδιαίρετα» (indivisibles), πρόδρομα του απειροστικού λογισμού, καθώς και η εισαγωγή των λογαρίθμων στην Ιταλία για θέματα γεωγραφίας και αστρονομίας. Μελέτησε σε βάθος τις κωνικές τομές για την κατασκευή διαθλαστικών και ανακλαστικών τηλεσκοπίων. Περιγράφει (εικόνα 2) τον παραβολογράφο του (Cavalieri, 1632) αναφέροντας την λογική κατασκευής του μηχανισμού που χρησιμοποίησε και ο μαθηματικός Ισίδωρος από την Μίλητο (442- 537 μ.Χ.).



Εικόνα 2 : παραβολογράφος Barozzi (1586) & παραβολογράφος Cavalieri (1632) αλλά και προσομοίωση του στο Geogebra. <https://www.geogebra.org/m/kcb9jeks>

Ο **James Watt** (1736-1819) ήταν μαθηματικός και μηχανολόγος μηχανικός και πρωτοστάτησε για την έλευση της «βιομηχανικής επανάστασης» με την βελτίωση της μηχανής ατμού του Newcomen. Ήταν μία μέθοδος μετατροπής παλινδρομικής κίνησης εμβόλου σε περιστροφική κίνηση. Το σύστημα επέτρεπε στον περιστρεφόμενο τροχό να περιστρέφεται περισσότερες από μία φορές ανά διαδρομή του εμβόλου δεδομένου ότι το έμβολο κινούνταν αργά, και αυτό ήταν σημαντική βελτίωση (engineering.msu.edu, n.d.). Είχε επίσης επινοήσει έναν μηχανισμό (εικόνα 3) για την μετατροπή της καμπυλόγραμμης κίνησης ράβδου σε γραμμική κίνηση εμβόλου.



Εικόνα 3 : ευθυγράφοι Watt ως μηχανισμοί μετατροπής κυκλικής κίνησης σε ευθύγραμμη, από βιβλία των Artobolevskii (1976) και Kempe (1877). <https://www.geogebra.org/m/hywwwfcs>

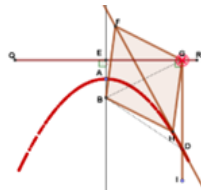
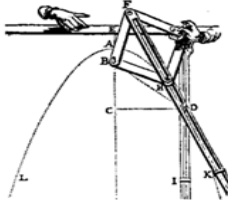
Ο **Franz Reuleaux** (1829-1905), ήταν Γερμανός μηχανολόγος μηχανικός και πρόεδρος της Γερμανικής Ακαδημίας Επιστημών. Ο Reuleaux πίστευε ότι οι μηχανές μπορούν να περιγραφούν ως αλυσίδες στοιχειωδών συνδεσμολογιών που ονομάζονται «κινηματικά ζεύγη». Οι περιορισμοί στη μηχανή περιγράφονται μέσα από περιορισμούς σε κάθε κινηματικό ζεύγος και η ακολουθία των κινήσεων των ζευγών παράγει μια «κινηματική αλυσίδα» (Wikipedia, n.d). Έδειξε πως η σύνδεση των τεσσάρων ράβδων θα μπορούσε να μεταλλαχθεί σε 54 μηχανισμούς, οι οποίοι εμπίπτουν σε 12 κατηγορίες. Κατασκεύασε πάνω από 300 μοντέλα απλών μηχανισμών, όπως ο σύνδεσμος τεσσάρων ράβδων και ο στρόφαλος (εικόνα 4). Εξήντα από τα μοντέλα του στάλθηκαν στο Deutsches Museum και το πιο σημαντικό μέρος της συλλογής καταστράφηκε κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Σήμερα, το πιο πλήρες σύνολο βρίσκεται στο Cornell University College of Engineering (digital.library.cornell, n.d).



Εικόνα 4: Ευθυγράφοι Watt και Peaucellier-Lipkin, από την συλλογή Reuleaux στο Cornell University <https://www.geogebra.org/m/hywwwfcs>

ΜΕΛΕΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

Παραβολογράφος Frans van Schooten: Η παρακάτω πρώτη εικόνα (εικόνα 5) είναι από ακαδημαϊκή εργασία το 1646 του Ολλανδού μαθηματικού και συνεργάτη του Descartes, Frans van Schooten (1615-1660). Δίπλα είναι εικόνα προσομοίωσης του μηχανισμού στο Geogebra και ένας παραβολογράφος που βρίσκεται στο Πανεπιστημίου Πάτρας (εικόνα 5).

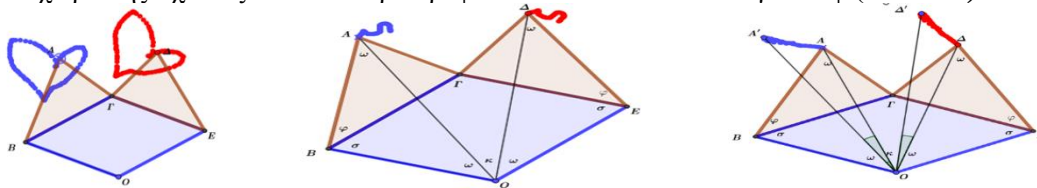


Εικόνα 5: Schooten (1646) & <https://www.geogebra.org/m/fafjvqkq>

Το σημείο B είναι σταθερό καθώς και η ευθεία QR είναι σταθερή και πάνω της ολισθαίνει σημείο G. Στο B και στο G αποτελούν και απέναντι κορυφές ενός ρόμβου. Η ευθεία FH είναι η μία διαγώνιος του ρόμβου. Στο σημείο G αρθρώνεται καθέτως μία ευθεία GI η οποία συναντά την διαγώνιο FH στο D στο οποίο δίνεται η εντολή «ίχνος ενεργό» δηλαδή τοποθετείται μία γραφίδα. Το σημείο D πάντα ισαπέχει από τα άκρα της διαγωνίου BG επειδή ανήκει στην προέκταση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου η οποία είναι μεσοκάθετος της. Επίσης το τμήμα DG πάντα είναι κάθετο στην γραμμή QR. Τελικά το σημείο D ισαπέχει από το B και από την ευθεία QR. Μετακινώντας το σημείο G κατά μήκος της QR, η γραφίδα στο D αποτυπώνει «συνεχώς» όλα τα σημεία που έχουν την ιδιότητα να «ισαπέχουν από σημείο και ευθεία», δηλαδή χαράσσεται ένα παραβολικό τόξο.

Παντογράφος του Sylvester: Ο J.J.Sylvester (1814-1897) ήταν σημαντικός Άγγλος μαθηματικός που συνεργάστηκε με τους Chebyshev και Kempe. Κατασκεύασε παντογράφους που επέτρεπαν την παραγωγή ομοίων σχημάτων με ταυτόχρονη «στροφομεταφορά» τους. Χρησιμοποιήθηκαν και για «στροφομεταφορά» επίπεδης κυκλικής κίνησης σε κινητήρες

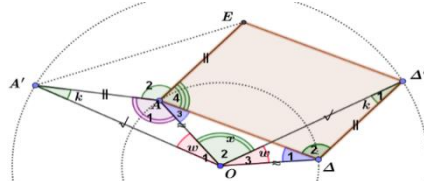
(Artobolevskii, 1976). Οι παντογράφοι είναι μαθηματικοί μηχανισμοί αντιγραφής, στροφής ή ομοιοθεσίας σχημάτων που παράγονται κινηματικά. Ο συγκεκριμένος αντιγράφει το σχήμα που ο χειριστής σχεδιάζει και το περιστρέφει επίπεδα κατά κάποια γωνία φ (εικόνα 6).



Εικόνα 6 : παντογράφος στροφομεταφοράς του Sylvester. <https://www.geogebra.org/m/smyuf3rk>

Το σημείο Ο είναι σταθερό και μπορεί να περιστρέφεται. Το τετράπλευρο ΟΒΓΕ είναι ρόμβος. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ισοσκελή, ίσα μεταξύ τους με κορυφές τα σημεία Β και Ε. Στην πραγματικότητα τα τρίγωνα αυτά είναι δύο «άκαμπτες ισοσκελείς τριγωνικές λαμαρίνες». Τα σημεία Α και Δ έχουν «ίχνος ενεργό» και μετακινώντας το σημείο Α για να σχεδιάσουμε η γραφίδα στο Δ σχεδιάζει επίσης. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΟ έχουμε $2\omega + \varphi + \sigma = 180^\circ$. Επίσης στον ρόμβο έχουμε $2\sigma + 2(2\omega + \kappa) = 360^\circ \Rightarrow \sigma + 2\omega + \kappa = 180^\circ$. Συγκρίνοντας τις 2 σχέσεις προκύπτει ότι $\kappa = \varphi$ σταθερό, δηλαδή αν και μεταβάλλονται όλες οι γωνίες του ρόμβου όμως δεν μεταβάλλεται το μέτρο της γωνίας κ που έχουν τα νοητά τμήματα ΟΑ και ΟΔ. Τα δύο σχήματα είναι ίσα και αποδεικνύεται με ισότητα τριγώνων όταν σχεδιάσουμε ένα στοιχειώδες ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ'. Τα τμήματα ΟΑ και ΟΔ ισούνται καθώς και ΟΑ' = ΟΔ'. Η περιεχόμενη γωνία στο ΑΟΑ' ισούται με την περιεχόμενη γωνία ΔΟΔ', και ισούνται με την συγκεκριμένη γωνία στροφής έτσι ώστε να χαραχθεί το ΑΑ'. Όλο το σχήμα που σχεδιάζουν οι δύο γραφίδες μπορούν να θεωρηθούν ως σύνολα μικρών τέτοιων ευθυγράμμων τμημάτων. Άρα, σχεδιάζεται ίσο σχήμα με το αρχικό το οποίο έχει περιστραφεί επίπεδα κατά γωνία ίση με την γωνία φ των ισοσκελών τριγώνων.

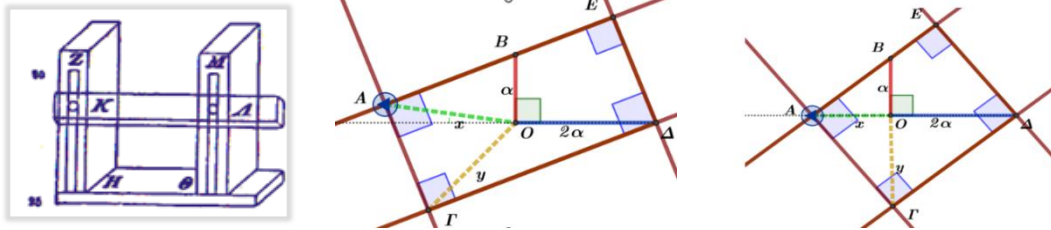
Μπορεί να θεωρηθεί ότι το τρίγωνο ΟΔΔ' έχει περιστραφεί κατά γωνία $w + x$ και πήγε στην θέση του τριγώνου ΟΑΑ'. Αξίζει να αποδειχθεί ότι εκτός από την στροφή των πλευρών ΟΔ και ΟΔ' γύρω από το Ο, την ίδια στροφή υπέστη και το τμήμα ΔΔ' μέχρι να φθάσει και να ταυτισθεί με το ΑΑ' (εικόνα 7). Το τμήμα ΔΔ' υπόκειται δηλαδή σε «στροφομεταφορά» και παραμένει αναλλοίωτο σε μήκος και μορφή. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, εάν μεταφερθεί το τμήμα ΔΔ' στο ΑΕ μέσω του παραλληλογράμμου ΑΔΔ'Ε, αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία $A_2 = w + x$ που είναι η γωνία τυχαίας στροφής του τριγώνου, καθώς και των πλευρών ΟΔ και ΟΔ'. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ προκύπτει ότι $\Delta_1 = A_3 = 90^\circ - \frac{x}{2} - \frac{w}{2}$. (1) Από το τρίγωνο ΟΑΑ' προκύπτει 'ότι $A_1 = 180^\circ - k - w$. (2) Από το τρίγωνο ΟΔΔ' και από την (1) προκύπτει ότι $\Delta_2 = 180^\circ - w - k - \Delta_1 = 180^\circ - w - k - 90^\circ + \frac{x}{2} + \frac{w}{2} = 90^\circ - \frac{w}{2} - k + \frac{x}{2}$. (3) Από το παραλληλόγραμμο προκύπτει ότι $A_4 = 180^\circ - \Delta_2 = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{w}{2} - k + \frac{x}{2}\right) = 90^\circ + \frac{w}{2} + k - \frac{x}{2}$. (4) Άρα, η γωνία $A_2 = 360^\circ - A_1 - A_3 - A_4 = 360^\circ - (180^\circ - k - w) - \left(90^\circ - \frac{x}{2} - \frac{w}{2}\right) - \left(90^\circ + \frac{w}{2} + k - \frac{x}{2}\right) = 360^\circ - 180^\circ + k + w - 90^\circ + \frac{x}{2} + \frac{w}{2} - 90^\circ - \frac{w}{2} - k + \frac{x}{2} = w + x$ με την γωνία στροφής του τριγώνου.



Εικόνα 7 : <https://www.geogebra.org/m/jwe8rgmm>

Κυβιστής του Πλάτωνα: Ο Έλληνας μαθηματικός Ευτόκιος (480-540 μ.Χ.) αποδίδει στον Πλάτωνα (427-347 π.Χ.) την παρακάτω λύση του Δηλίου προβλήματος, η οποία για να υλοποιηθεί απαιτεί μηχανικά όργανα και για το λόγο αυτό οι ερευνητές εικάζουν ότι η λύση αυτή ίσως μην είναι του Πλάτωνα αλλά του Ευδόξου (407-355 π.Χ.) (Σταμάτης, 1949). Θεωρώντας ότι γνωστός κύβος έχει πλευρά μήκους a , τοποθετούνται και σταθεροποιούνται στο επίπεδο δύο κάθετα τμήματα ΟΒ και ΟΔ με μήκη a και $2a$ αντιστοίχως (εικόνα 8). Στη συνέχεια στο σημείο Β αρθρώνεται περιστροφικά και με δυνατότητα ολίσθησης μέσω του Β η ράβδος ΑΒΕ. Επίσης στο σταθερό σημείο Δ αρθρώνονται περιστροφικά δύο κάθετες μεταξύ τους ράβδοι με δυνατότητα να ολισθαίνουν μέσω του Δ αλλά και να περιστρέφονται στο Δ. Η

μία εξ αυτών αρθρώνεται κάθετα, περιστροφικά και με δυνατότητα ολίσθησης στο E της ράβδου ABE. Στα σημεία A και Γ των ABE και ΔΓ αρθρώνεται ράβδος ΑΓ κάθετη με τις ABE και ΔΓ και με περιστροφικές αρθρώσεις στα A και Γ καθώς και με δυνατότητα ολίσθησης μέσω αυτών των σημείων.

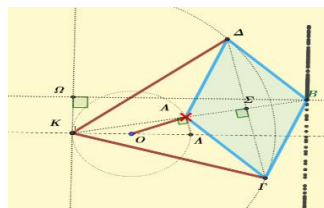


Εικόνα 8: «κυβιστής του Πλάτωνα» (Σταμάτης, 1949)

<https://www.geogebra.org/m/c53pprfs>

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρόκειται για ένα επίπεδο και ορθογώνιο πλαίσιο αρθρωμένων ράβδων που είναι αρθρωμένες μεταξύ τους με δυνατότητα αυξομειώσης των μηκών τους και με περιστροφικές αρθρώσεις στα σταθερά σημεία B και Δ του ορθογωνίου. Μετακινώντας την κορυφή A (κέρσορας) πρέπει τα τμήματα $BO=a$ και $OG=y$ να γίνουν συνευθειακά καθώς και τα τμήματα $OD=2a$ και $OA=x$ να γίνουν επίσης συνευθειακά. Σε αυτήν την θέση και λόγω των ορθογωνίων τριγώνων ABΓ και ΑΓΔ προκύπτουν οι σχέσεις $x^2 = ay$ και $y^2 = 2ax$. Άρα $y = \frac{x^2}{a}$ και $\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = 2ax \Rightarrow x^3 = 2a^3$, το οποίο ερμηνεύεται πως το τμήμα x είναι η ακμή εκείνου του κύβου με διπλάσιο όγκο από κύβο με ακμή ίση με a. Όταν το $a = 1$ τότε κατασκευάζει γεωμετρικά την $\sqrt[3]{2}$.

Ευθυγράφος Peaucellier - Lipkin: Η προσπάθεια κατασκευής μηχανισμού που μετατρέπει μια κυκλική κίνηση σε τελείως ευθύγραμμη επετεύχθη ταυτόχρονα και ανεξάρτητα το 1873 από τον Γάλλο μηχανικό Charles-Nicolas Peaucellier (1832-1919) και το 1871 από τον Λιθουανό μαθηματικό Lipman Lipkin (1846-1875) ο οποίος σπούδασε δίπλα στον Chebyshev (digitaleditions.sheridan, n.d.). Ας υποθέσουμε ότι οι πλευρές του ρόμβου έχουν μήκος 4, η ακτίνα του μεγάλου κύκλου ισούται με 9 και η ακτίνα του μικρού κύκλου ισούται με 3 (εικόνα 9). Τα σημεία K και O δεν μετακινούνται αλλά περιστρέφονται ομοεπίπεδα. Επίσης το K ανήκει στον μικρό κύκλο κέντρου O. Οι μεγάλες ακτίνες είναι αρθρωμένες περιστροφικά στο K αλλά και στις κορυφές Δ και Γ του ρόμβου. Η μικρή ακτίνα είναι αρθρωμένη περιστροφικά στο O καθώς και στην πλησιέστερη κορυφή A του ρόμβου. Το σημείο A είναι η «είσοδος» του μηχανισμού και η κορυφή B του ρόμβου είναι η «έξοδος» του όπου έχει τοποθετηθεί και μία γραφίδα. Στο σημείο K έχει χαραχθεί ευθεία κάθετη με την διάκεντρο ΚΟ. Από την κορυφή B του ρόμβου έχει χαραχθεί ευθεία ΒΩ παράλληλη με την ΚΟ, και επομένως κάθετη με την κάθετη στην ΚΟ. Τα τρίγωνα ΚΑΔ και ΚΑΓ ισούνται λόγω κριτηρίου Π-Π-Π, και προκύπτει ότι οι γωνίες ΚΑΔ και ΚΑΓ ισούνται. Άρα ισούνται και οι παραπληρωματικές γωνίες τους. Άρα η ΚΑ οφείλει να είναι συγγραμμική με την διαγώνιο ΑΒ του ρόμβου. Συνεπώς τα σημεία τα σημεία Κ,Α,Σ,Β είναι συνευθειακά και $(KA) \cdot (KB) = ((KS) - (AS)) \cdot ((KS) + (AS)) = (KS)^2 - (AS)^2 = [(KA)^2 - (\Delta\sigma)^2] - [(\Lambda\Delta)^2 - (\Delta\sigma)^2] = 9^2 - (\Delta\sigma)^2 - 4^2 + (\Delta\sigma)^2 = 81 - 16 = 65 = ct$. Τα τρίγωνα ΚΩΒ και ΚΑΛ είναι ορθογώνια και όμοια λόγω του ότι οι γωνίες ΩΒΚ και ΑΚΛ ισούνται ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων ΒΩ και ΚΟ τεμνόμενων από την ΚΒ. Άρα $\frac{(KA)}{(KB)} = \frac{(AL)}{(OK)} = \frac{(KA)}{(OB)} \Rightarrow (OB) = \frac{(KA) \cdot (KB)}{(KL)} = \frac{65}{4} = ct$. Τελικά, για κάθε θέση του σημείου B, η απόσταση του B από την σταθερή ευθεία ΚΩ παραμένει ίδια, που μεταφράζεται πως η γραφίδα B χαράσσει ευθεία γραμμή ή αλλιώς το σημείο B κινείται ευθύγραμμα.



Εικόνα 9: εικόνα από το co.pinterest.com, προσομοίωση και κατασκευή με πλαστικές ταινίες ευθυγράφου Peaucellier-Lipkin. <https://www.geogebra.org/m/t7qunmrf>

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΥΘΥΓΡΑΦΟΥ PEAUCELLIER-LIPKIN (ΣΥΝΘΕΣΗ)

Έγινε προσπάθεια κατασκευής του ευθυγράφου Peaucellier -Lipkin έχοντας δεδομένη την ξύλινη πινακίδα βάσης του και τις διαστάσεις της όπου έπρεπε να κοπούν μέσω αναλογιών οι επτά «άκαμπτοι» ράβδοι της συνδεσμολογίας αυτής (linkage). Αφού υπολογίσθηκαν τα μήκη των ράβδων μέσω αναλογιών, αρθρώθηκαν (με κατάλληλες βίδες που επιτρέπουν την περιστροφή) οι πλευρές του ρόμβου. Επίσης η μικρή ακτίνα που αποτελεί και την «είσοδο» αρθρώθηκε στην ξύλινη βάση αλλά και στην πλησιέστερη κορυφή του ρόμβου. Οι δύο μεγάλες ακτίνες αρθρώθηκαν μαζί σε σημείο της ξύλινης βάσης και τα άλλα άκρα τους αρθρώθηκαν περιστροφικά με τις άλλες δύο κορυφές του ρόμβου. Στην τέταρτη κορυφή Β του ρόμβου, η περιστροφική άρθρωσή της μπορεί να αντικατασταθεί από κατάλληλη γραφίδα που αποτελεί την «έξοδο» του μηχανισμού.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ & ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όλη η ομάδα (εικόνα 10) κατάλαβε την σημασία της εύρεσης σωστών πληροφοριών. Έγινε αντιληπτό ότι το θέμα των μαθηματικών μηχανών και οργάνων αλλά και ο συνδυασμός Μαθηματικών και Μηχανολογίας είναι σημαντικό και διαχρονικό. Οι μαθηματικές μηχανές εμφανίσθηκαν στις κοινωνίες για κάποιο σκοπό. Τα Μαθηματικά που ενσωματώνουν είναι όμορφα διότι κινούνται και δεν είναι στατικά, και είναι πιο κατανοητά μέσω της χρήσης και χρησιμότητάς τους. Η «κατασκευή» των μηχανισμών αυτών στο Geogebra, έχει ενδιαφέρον και απαιτεί γνώσεις Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα, κατά την προσομοίωση της κατασκευής δύο τμημάτων τα οποία πρέπει να είναι κάθετα συνδεδεμένα στο ένα άκρο τους, στην προσομοίωση έπρεπε να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα εγγεγραμμένης γωνίας κύκλου που βαίνει σε διάμετρο. Όμως για να συνδεθούν δύο ξύλινες ράβδοι κάθετα σε ένα άκρο τους αρκεί ένα «ξύλινο μοιρογνώμονιο», ένα τρυπάνι και μία κατάλληλη βίδα. Αυτή η διαφορά από την θεωρία στην πράξη αναβαθμίζει την πράξη και αναδεικνύει μαθηματικούς νόμους. Τέλος, όλοι οι μαθητές και όλες οι μαθήτριες της ομάδας θεώρησαν ότι δεν είναι κατάλληλο το χρονικό πλαίσιο για τέτοιες δράσεις οι οποίες έχουν πραγματικό ενδιαφέρον, και ότι θα έπρεπε να είχαν τον χώρο τους στο σχολείο αλλά και τον χρόνο τους στο πρόγραμμα μαθημάτων.



Εικόνα 10 : «Εναρξη κατασκευής ευθυγράφου Peaucellier-Lipkin και ολοκλήρωση της προσπάθειας από την ομάδα του «Εργαστηρίου Μαθηματικών Μηχανών» 9^ο ΓΕΛ Πάτρας».

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Artobolevskii, I. I. (1976). *Mechanisms In Modern Engineering Design Vol 2* (2nd ed.). MIR Publishers Moscow.

Barozzi, F. (Ed.). (1586). *Admirandum illud geometricum problema* (1st ed.). Venetis.
<https://archive.org/details/ita-bnc-mag-00001338-001>

Cavalieri, B. (1632). *Lo specchio ustorio, ovvero, Trattato delle settioni coniche, et alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora*. (1st ed.).
<https://play.google.com/books/reader?id=ZX64AAAIAAJ&pg=GBS.PA186&hl=el>

Descartes, R. (1925). *The Geometry of Rene Descartes* (1st ed.). Open Court Publishing Company.

<https://ia802207.us.archive.org/5/items/geometryofrene00desc/geometryofrene00desc.pdf>

Johnston Allman, G. (1877). *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Queen's University in Ireland (Ed.); 1st ed.). University Press. <https://archive.org/search?query=external-identifier%3A%22urn%3Aoclc%3Arecord%3A1045621609%22>

Kempe, A. B. (1877). *How to Draw a Straight Line A Lecture on Linkages* (1st ed.). MacMillan and Co.

Schooten, F. (1646). *De organica conicarum sectionum in plano descriptione (Ex Officina Elzeviriorum)* (Ed.); 1st ed.). <https://play.google.com/books/reader?id=6xNiAAAcAAJ&pg=GBS.PP16>

Σταμάτης, Ε. (1949). *Το Δήλιον πρόβλημα και η τριχοτόμησις γωνίας* (ιδίου (Ed.); 1st ed.). <https://evangelosstamatis.files.wordpress.com/2011/06/1972-epistimonikai-ergasiai-arhra-tomos-a.pdf>

Taimina, D. (2007). Historical mechanisms for drawing curves. *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics, December*, 89–104. <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859766.011>

https://en.wikipedia.org/wiki/Francesco_Barozzi Τελευταία τροποποίηση 22:06, 24/12/2023., Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 16/2/2024 και ώρα 22:00.

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nicomedes/> Τελευταία τροποποίηση 1/Απριλίου/ 1999. Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 17/2/2024 και ώρα 19:07.

<https://archive.org/search?query=external-identifier%3A%22proquest%3Aita-bnc-mag-00001338-001%22> Τελευταία τροποποίηση 2014-10-27 14:51:41. Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 16/2/2024 και ώρα 21:16.

<https://www.egr.msu.edu/~lira/supp/steam/wattbio.html> Τελευταία τροποποίηση 21/Μαΐου/2013., Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 17/2/2024 και ώρα 10:02.

https://en.wikipedia.org/wiki/Franz_Reuleaux Τελευταία τροποποίηση 9 Φεβρουαρίου 2024, στις 03:29, Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 17/2/2024 και ώρα 20:00.

<https://digital.library.cornell.edu/collections/kmoddl> Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 17/2/2024 και ώρα 20:10.

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri/> Τελευταία τροποποίηση Ιούλιος 2014, Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 17/2/2024 και ώρα 22:40.

https://co.pinterest.com/pin/3025924740983657/visual-search/?x=39&y=56&w=349&h=257&cropSource=4&surfaceType=flashlight&full_feed_title=Wall%20shelves&rs=deep_linking

http://www.hms.gr/sites/default/files/subsites/problems/material/EYKLEIDHS_B_114_EYKLEIDHS_2019.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/James_Joseph_Sylvester, Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 14/3/2024 και ώρα 21:18

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menaechmus/>, Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 14/3/2024 και ώρα 21:51

https://digitaleditions.sheridan.com/publication/?i=814988&article_id=4722915&view=articleBrowser, Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 14/3/2024 και ώρα 21:51

<https://www.geogebra.org/u/gkdodos>