

ΘΕΜΑΤΑ στην διάταξη πραγματικών αριθμών (ανισότητες)

Θ1. Έστω , πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α. Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\alpha} > \frac{3}{\beta}$

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$

Θ2. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

β/ i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

β/ii. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει $A + B = 0$?

Θ3. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β. Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$ για κάθε τιμή των α, β .

γ. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Θ4. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

$$(i) \quad \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$$

και

$$(ii) \quad \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$$
