

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ στις συναρτήσεις (πριν τα ΟΡΙΑ)

1. f, g γνησίως αύξουσες συναρτήσεις Άρα $f + g$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση.
2. f γνησίως αύξουσα συνάρτηση & g γνησίως φθίνουσα Άρα $f - g$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση.
3. f γνησίως αύξουσα συνάρτηση & g γνησίως φθίνουσα Άρα $f \cdot g$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση (υπό την προϋπόθεση πως $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$, για κάθε $x \in A_f \cap A_g$)
4. f γνησίως φθίνουσα συνάρτηση & g γνησίως φθίνουσα Άρα $f \circ g$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση.
5. f γνησίως αύξουσα συνάρτηση & g γνησίως φθίνουσα Άρα $f \circ g$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.
6. f γνησίως αύξουσα συνάρτηση σε κάθε διάστημα Δ_1 και Δ_2 .

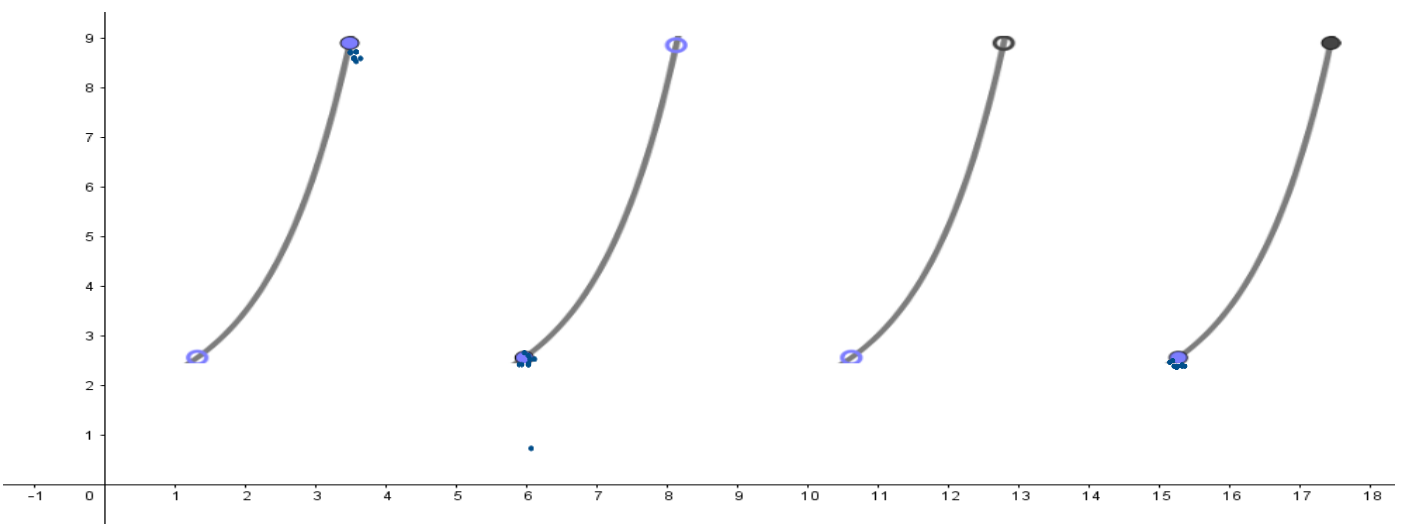
Όμως δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την f ως γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$, εκτός κι αν συντρέχουν ειδικές συνθήκες που θα δούμε αργότερα...

7. f γνησίως αύξουσα συνάρτηση σε διάστημα Δ_1 και έστω η ένας αριθμός του $f(\Delta)$. Τότε η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει ΜΟΝΑΔΙΚΗ λύση στο Δ .
8. f γνησίως αύξουσα συνάρτηση σε διάστημα Δ_1 και έστω η ένας αριθμός. Τότε η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει ΤΟ ΠΟΛΥ ΜΙΑ λύση στο Δ .
9. f γνησίως αύξουσα συνάρτηση σε διάστημα Δ_1 . Τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ΕΝΑ ΤΟ ΠΟΛΥ σημείο.
10. f γνησίως αύξουσα συνάρτηση & g γνησίως φθίνουσα. Τότε η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ΤΟ ΠΟΛΥ ΜΙΑ λύση.

11. ΤΡΟΠΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

α) “**Χτίζουμε**” ανισότητα της μορφής $m \leq f(x) \leq M$, και μετά βρίσκουμε αριθμούς α και β του πεδίου ορισμού της τέτοιους ώστε $m = f(\alpha)$ και $M = f(\beta)$, αλλιώς δεν είναι ΣΙΓΟΥΡΟ πως τα m & M είναι ακρότατά της.

β) Από την γραφική της παράσταση π.χ.:



γ) Από το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της f , όπως: $[\alpha, \beta]$, ή, $[\alpha, \beta)$, ή, $(\alpha, \beta]$, ή, (α, β)

12. Έστω συνάρτηση f ΑΡΤΙΑ. Τότε τα συμμετρικά τμήματα της γραφ. παράστασης, έχουν ΑΝΤΙΘΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ.

13. Έστω συνάρτηση f ΠΕΡΙΤΤΗ. Τότε τα συμμετρικά τμήματα της γραφ. παράστασης, έχουν ΙΔΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ.

14. Έστω συνάρτηση f ΑΡΤΙΑ. Τότε, εάν υπάρχουν (ολικά) ακρότατα m & M , έχουμε: $M = f(a) = f(-a)$, & $m = f(b) = f(-b)$.

15. Έστω συνάρτηση f ΠΕΡΙΤΤΗ. Τότε εάν υπάρχουν (ολικά) ακρότατα m & M , έχουμε: $M = f(a)$ & $m = f(-a) = -f(a)$.

16. Έστω συνάρτηση f άρτια. Τότε η f δεν είναι γν. μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

17. Έστω συνάρτηση f γν. μονότονη στο πεδίο ορισμού της. Τότε η f δεν είναι άρτια.

18. Έστω συνάρτηση f ΠΕΡΙΤΤΗ και το $0 \in A_f$. Τότε $f(0) = 0$.

19. Έστω συνάρτηση f ΠΕΡΙΤΤΗ ή ΑΡΤΙΑ και $f(x_0) = 0$. Τότε ισχύει και

$$f(-x_0) = 0.$$

20. $f(x) = \frac{x-1}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$. Τότε η f είναι γν. φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$.

21. Έστω συνάρτηση f γν. μονότονη στο πεδίο ορισμού της και βρίσκω μία ΠΡΟΦΑΝΗ ΡΙΖΑ της. Τότε ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ άλλη ρίζα. Επίσης εκατέρωθεν της ρίζας αυτής αλλάζει το ΠΡΟΣΗΜΟ της f .

π.χ. $f(x) = e^x + x - 1$ (άσκηση)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να λυθεί η εξίσωση: $\ln x + 1 = \frac{1}{x}$ και στην συνέχεια η ανίσωση $\ln x + 1 < \frac{1}{x}$.

(2) Έχουμε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1, x > 0$.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

β) Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x+3}{x^2+1}$

(3) Έχουμε συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γν. μονότονη και τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(2, -3)$ ανήκουν στην γραφική της παράσταση.

(α) Τι είδους μονοτονία έχει;

(β) $f(x) = \ln x - g(x), x > 0$. Να δειχθεί ότι η f είναι γν. αύξουσα.

(γ) Να λυθεί η ανίσωση: $2\ln x < 2 + g(x^2)$.

(4) Έστω συνάρτηση f (γνησίως αύξουσα) με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f(e^x - x) + f(1 - x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

α) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - 1) < 0$.

(5) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

α) Να δειχθεί ότι $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x), \forall x > 0$.

β) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^8), \text{ για } x > 0$

(6) Εάν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι γν. φθίνουσα και η συνάρτηση g είναι γν. αύξουσα,

α) να δειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα.

β) Στη συνέχεια, για μία συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $h^3(x) + e^{h(x)} - e^{-x} - 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να ελεγχθεί η συνάρτηση h ως προς την μονοτονία.

(7) Έστω συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - 2$ όπου $x \in [1, 2]$. Να βρεθούν τα ακρότατα της.

(8) Έστω συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) = g(x) - x^2 - 3$. Να βρεθεί η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ των γραφικών παραστάσεων αυτών των συναρτήσεων

(ΣΗΜΕΙΩΣΗ: η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «πάνω» από την γραφική παράσταση της g).

(9) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία λαμβάνει ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ μόνο στον αριθμό 1 και $f(1) = 5$, καθώς και $f(\alpha) + f(\ln \beta) = 10$. Να υπολογιστούν οι αριθμοί α, β .

(10) Δίνεται η συνάρτηση f με κλαδικό τύπο $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases}$

(α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία της (σε κάθε διάστημα ξεχωριστά)

(β) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

(γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + 5) < f(2x^2 + 1)$ (αλγεβρικά)

(δ) Αφού υπολογίσετε τις «σύνθετες» συναρτήσεις $f(x^2 + 5)$ και $f(2x^2 + 1)$, στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις. Στην συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 5) < f(2x^2 + 1)$ μέσω των γραφικών τους παραστάσεων (γεωμετρικά).

(11) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με εξισώσεις $f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$, και $g(x) = 2 - \sin x$.

(α) Ναδειχθεί ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή όταν $x = 1$

(κάποιοι αναφέρουν ότι «η f έχει μέγιστο στο 1»)

(β) Να υπολογισθεί η ελάχιστη τιμή της g (εάν υπάρχει).

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2e^x}{2 - \sin x} = e^{2x} + 1$ (με την βοήθεια των ακροτάτων τιμών των f, g).