
ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

• Σεπτέμβριος 2019	2
• Ιούνιος 2020	11
• Ιούνιος 2021	19
• Ιούνιος 2022	28
• Σεπτέμβριος 2022	39

Επιμέλεια: **Γιαννάκαρος Σπύρος**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Λ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ****Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019****ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)****ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

- A2.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει:

$$\text{Αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0, \text{ τότε } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0 .

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Λ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = x^2 + 1 \text{ και}$$

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2}.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και τύπο $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Μονάδες 5

- B2.** Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο $+\infty$.

Μονάδες 6

- B3.** Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$ της συνάρτησης $h: A - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \frac{(g \circ f)(x)}{x-2}$.

Μονάδες 6

- B4.** Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x), & x \in A \\ 1 - x^2, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x) = \varphi(x) \cdot \eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f

διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$. Έστω το σημείο $A(\frac{3}{2}, 0)$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

Μονάδες 6

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

- Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Λ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- Γ4.** Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$ ισούται με $\frac{1}{2}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x) dx < 1$.

Μονάδες 6

- Δ4.** Να λύσετε στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ την εξίσωση $f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\epsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x})$.

Μονάδες 9**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

- Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 144

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 185

Α3.

α) Σωστό, β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Σωστό, ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [2, +\infty)$.

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \end{aligned}$$

Με

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1) - 2} = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x \in D_{g \circ f}.$$

Β2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g \circ f)(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &\stackrel{x \geq 1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 - 0} = 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(g \circ f)(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα η $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\mathbf{B3.} \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x - 2} \right) \stackrel{\sqrt{3} \cdot (-\infty)}{=} -\infty.$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \dots \stackrel{\sqrt{3} \cdot (+\infty)}{=} +\infty.$$

Άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ **δεν** υπάρχει.

B4.

$$\phi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 1 - x^2, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

$$t(x) = \phi(x)\eta\mu(\pi x) = \begin{cases} (1 - x^2)\eta\mu(\pi x), & x \in [0, 1) \\ \sqrt{x^2 - 1}\eta\mu(\pi x), & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} t(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(1 - x^2)\eta\mu(\pi x)] = 0 \cdot \eta\mu\pi = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} t(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [\sqrt{x^2 - 1}\eta\mu(\pi x)] = \sqrt{0} \cdot \eta\mu\pi = 0$$

$$\text{και } t(1) = \sqrt{1^2 - 1}\eta\mu\pi = 0$$

Επομένως, η $t(x)$ είναι συνεχής στο 1.

Επίσης είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1)$ και $(1, 2]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Άρα είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

Επιπλέον:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{t(x) - t(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - x^2)\eta\mu(\pi x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)(x + 1)\eta\mu(\pi x)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(x + 1)\eta\mu(\pi x)] = -2\eta\mu\pi = 0 \end{aligned}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{t(x) - t(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}\eta\mu(\pi x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x - 1)(x + 1)}\eta\mu(\pi x)}{x - 1} = l$$

Θέτουμε $x - 1 = w \iff x = w + 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$. Άρα

$$\begin{aligned} l &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sqrt{w(w + 2)}\eta\mu(\pi(w + 1))}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sqrt{w(w + 2)}(-\eta\mu(\pi w))}{w} = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \left(-\sqrt{w(w + 2)} \cdot \pi \frac{\eta\mu(\pi w)}{\pi w} \right) = \sqrt{0} \cdot \pi \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{διότι } \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi w)}{\pi w} \stackrel{\text{θέτω } \pi w = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1..$$

Οπότε η t είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Επίσης είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, 2)$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Άρα είναι συνεχής στο $(0, 2)$.

Επιπλέον, $t(0) = t(2) = 0$, άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την $t(x)$ στο $[0, 2]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $M(1, 1) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1$

$$f(x)f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^2(x))' = (x)' , \text{ για κάθε } x > 0 ,$$

άρα

$$f^2(x) = x + c , c \in \mathbb{R} .$$

Για $x = 1$: $f^2(1) = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$ οπότε:

$$f^2(x) = x \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x} .$$

Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

Άρα $f(x) \neq 0$, $\forall x > 0$ και f συνεχής, οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Επιπλέον $f(1) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$, $\forall x > 0$ και $f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.
Επομένως $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$, άρα

$$f(x) = \sqrt{x} , \text{ με } x \in [0, +\infty) .$$

Γ2. Η απόσταση ενός σημείου $K(x, f(x)) \in C_f$ από το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ είναι

$$d(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (f(x) - 0)^2} \Leftrightarrow d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}} , x \geq 0 .$$

$$d'(x) = \frac{\left(x^2 - 2x + \frac{9}{4}\right)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} .$$

Η απόσταση $d(x)$ γίνεται ελάχιστη **μόνο** για $x = 1$, άρα το σημείο $M(1, 1)$ απέχει την μικρότερη απόσταση από το σημείο A .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$d'(x)$	—	0	+
$d(x)$			

Γ3. Είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Οπότε $f'(1) = \frac{1}{2}$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} .$$

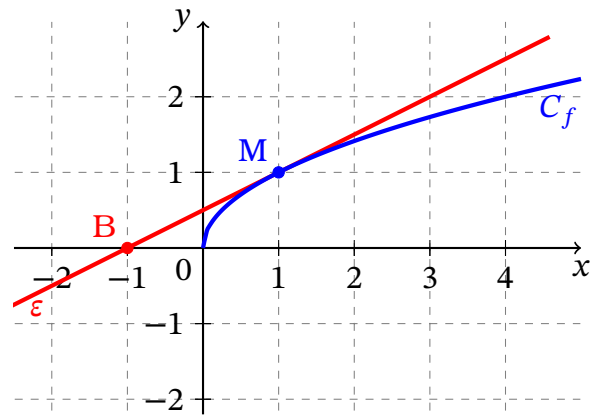
Για $y = 0$ προκύπτει ότι $x = -1$ άρα $B(-1, 0)$ είναι το κοινό σημείο της εφαπτομένης της C_f με τον $x'x$.

Επίσης,

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \text{ για κάθε } x > 0,$$

άρα η f είναι κοίλη, δηλαδή η γραφική της παράσταση (με εξαίρεση το σημείο επαφής) βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη ευθεία, οπότε

$$f(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$



$$E = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \sqrt{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \dots = \frac{1}{3}$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = f(x) - g(x), \text{ με } x \in [0, 1].$$

Η ϕ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$\phi(0) = f(0) - g(0) = -g(0) < 0 \text{ διότι } 0 < g(0) < 1$$

$$\phi(1) = f(1) - g(1) = 1 - g(1) > 0 \text{ διότι } 0 < g(1) < 1$$

Άρα $\phi(0) \cdot \phi(1) < 0$, οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$\phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0).$$

Επιπλέον, για $x_1, x_2 \in [0, 1]$, με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \quad (1)$$

και

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g} g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και προκύπτει ότι

$$\phi(x_1) < \phi(x_2),$$

άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 - 3x + 1) - x^3(6x - 3)}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \dots = \frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = 1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2.

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1} = \frac{1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}.$$

Άρα

$$f(x) + f(1-x) = \frac{3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1} = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επίσης, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

(διότι η διακρίνουσα του $3x^2 - 3x + 1$ είναι $\Delta = -3 < 0$).

$$\text{Άρα: } E = \int_0^1 f(x) dx.$$

Θέτουμε $x = 1 - w$, άρα $dx = -dw$.

Για $x = 0$: $w = 1$ και για $x = 1$: $w = 0$.

Οπότε

$$E = - \int_1^0 f(1-w) dw = \int_0^1 f(1-w) dw.$$

Επομένως

$$2E = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx \Leftrightarrow 2E = \int_0^1 (f(x) + f(1-x)) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2E = \int_0^1 1 dx \Leftrightarrow 2E = 1 \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}.$$

Δ3. Έχουμε ότι $0 \leq x \leq 1$ κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1,$$

άρα $f^2(x) \leq f(x)$.

Επιπλέον, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ και $f^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, άρα

$$f^2(x) \leq f(x),$$

και η ισότητα **δεν** ισχύει για κάθε $x \in [0, 1]$, επομένως

$$\int_0^1 f^2(x) dx < \int_0^1 f(x) dx \stackrel{\Delta 2.}{\Leftrightarrow} \int_0^1 f^2(x) dx < \frac{1}{2},$$

το οποίο ισοδυναμεί με το ζητούμενο.

Δ4. Από το Δ2. ισχύει ότι

$$f(x) + f(1-x) = 1.$$

Αν θέσουμε όπου x το $\eta\mu^2 x$ προκύπτει ότι

$$f(\eta\mu^2 x) + f(1 - \eta\mu^2 x) = 1 \Leftrightarrow f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = 1.$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} f(\epsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}) &= 1 \Leftrightarrow f(\epsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}) = f(1) \xleftrightarrow{f \nearrow \text{άρα } 1-1} \epsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\eta\mu x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x}. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(w) = \frac{e^w}{w}, \quad \mu\epsilon \quad w \in (0, 1)$$

(για $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι $0 < \eta\mu x < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$).

Άρα η εξίσωση γίνεται

$$g(\sigma\upsilon\nu x) = g(\eta\mu x) \quad \mathbf{(1)}.$$

Είναι,

$$g'(x) = \frac{(x-1) \cdot e^x}{x^2} > 0, \quad \text{για κάθε } x \in (0, 1),$$

οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ άρα και $1-1$ στο διάστημα αυτό. Επομένως,

$$\mathbf{(1)} \xleftrightarrow{g \text{ 1-1}} \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \xleftrightarrow{x \in (0, \frac{\pi}{2})} x = \frac{\pi}{4}.$$

NEO

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
NEO ΣΥΣΤΗΜΑ - ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2v+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

NEO

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
NEO ΣΥΣΤΗΜΑ - ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

- B2.** Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, με $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

- B3.** Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

- B4.** Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \lambda > 0.$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

NEO

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
NEO ΣΥΣΤΗΜΑ - ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

- Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

- Γ4.** Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 .

Μονάδες 8**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0) = x_0^2 - (e + 2)x_0 + e - 1.$$

Μονάδες 7

- Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

- Δ3.** Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

Μονάδες 5

- Δ4.** Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho) (f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. α) Ψ

β) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, με

$$f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(0) = 0$.

Α4.

α) Λάθος,

β) Σωστό,

γ) Σωστό,

δ) Σωστό,

ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x > e^0\} \stackrel{e>1}{=} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, +\infty), \end{aligned}$$

με

$$(f \circ g)(x) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x > 0.$$

Β2.

$$(f \circ g)'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Επομένως η $(f \circ g)(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και «1-1».

$$D_{(f \circ g)^{-1}} = (f \circ g)\left((0, +\infty)\right) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x)\right) = (1, +\infty),$$

όπου

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \stackrel{\text{θέτω } e^x = w}{=} \lim_{w \rightarrow +\infty} \frac{w + 2}{w - 1} = \lim_{w \rightarrow +\infty} \frac{w}{w} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(e^x + 2) \cdot \frac{1}{e^x - 1} \right] \stackrel{3 \cdot (+\infty)}{=} +\infty,$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0 \text{ και } e^x - 1 > 0 \text{ όταν } x \rightarrow 0^+.$$

Θέτουμε $(f \circ g)(x) = y$, με $y > 1$.

$$y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow y \cdot e^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y - 1)e^x = y + 2 \xLeftrightarrow{y > 1} e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right) \Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right), y > 1.$$

Άρα

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right), x > 1.$$

B3.

$$\phi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{-3}{(x+2)(x-1)}.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $x + 2 > 0$ και $x - 1 > 0$, άρα

$$\phi'(x) < 0, \text{ για κάθε } x > 1,$$

δηλαδή η ϕ είναι γνησίως αύξουσα.

B4. Θέτουμε $\frac{x+2}{x-1} = w$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+2) \cdot \frac{1}{x-1} \right] \xrightarrow{3 \cdot (+\infty)} +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi(x) = \lim_{w \rightarrow +\infty} (\ln w) = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{w \rightarrow 1} (\ln w) = \ln 1 = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής, άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

απ' όπου προκύπτει

$$1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda - 1 + \ln \lambda = 0 \quad \textbf{(1)}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = x - 1 + \ln x, x > 0.$$

Είναι

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και «1-1». Επιπλέον, $g(1) = 0$, άρα

$$\textbf{(1)} \Leftrightarrow g(\lambda) = g(1) \xLeftrightarrow{1-1} \lambda = 1.$$

Γ2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1.$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

είναι

$$f'(0) = 1.$$

Αν $\hat{\theta}$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον $x'x$, τότε:

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\hat{\theta} = 1 \xLeftrightarrow{0 \leq \hat{\theta} < \pi} \hat{\theta} = \frac{\pi}{4}.$$

Γ3. Για $x < 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (1-x)' = \frac{1}{(1-x)^2} \neq 0, \text{ για κάθε } x < 0$$

 $f'(0) = 1$ (από Γ2).Και για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$:

$$f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

$$f'(x) = 0 \xLeftrightarrow{0 \leq x < \frac{3\pi}{2}} \left(x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \right).$$

Η f λοιπόν είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $D_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$.

και τα κρίσιμα σημεία της είναι τα

$$A\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \text{ και } B\left(\frac{5\pi}{4}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

δηλαδή

$$A\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) \text{ και } B\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right).$$

Γ4.

$$(\varepsilon) : y - f(\alpha(t)) = f'(\alpha(t))(x - \alpha(t)) \Leftrightarrow y - \frac{1}{1 - \alpha(t)} = \frac{1}{(1 - \alpha(t))^2}(x - \alpha(t)).$$

Για $y = 0$ προκύπτει ότι $x = \alpha(t) - 1$, δηλαδή

$$B(2\alpha(t) - 1, 0).$$

Έστω

$$x(t) = 2\alpha(t) - 1.$$

Είναι

$$x'(t) = 2\alpha'(t) = -\frac{2\alpha(t)}{3}$$

κι επειδή $\alpha(t_0) = -1$, συμπεραίνουμε ότι:

$$x'(t_0) = -\frac{2\alpha(t_0)}{3} = -\frac{2 \cdot (-1)}{3} = \frac{2}{3}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x) = e^x + 2x - e, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$f''(x) = e^x + 2 > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, f' συνεχής στο $[0, 1]$ ως παραγωγίσιμη, $f'(0) = 1 - e < 0$ και $f'(1) = 2 > 0$, δηλαδή

$$f'(0) \cdot f'(1) < 0.$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
(το παραπάνω αποδεικνύεται και με εφαρμογή του Θ. Rolle για την f)
και λόγω της μονοτονίας της f' , το x_0 αυτό είναι μοναδικό.

$$x < x_0 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > x_0 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$, γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο $x_0 \in (0, 1)$, το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$. Όμως,

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad \textbf{(1)}.$$

Άρα,

$$f(x_0) \stackrel{\textbf{(1)}}{=} e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e + 2)x_0 - 1.$$

Δ2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(x_0) - f(x_0) = 0$$

και

$$f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty.$$

$$-1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + 1.$$

Είναι,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) \xrightarrow{(+\infty)-1} +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + 1 \right) \xrightarrow{(+\infty)+1} +\infty.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι και το ζητούμενο όριο ισούται με $+\infty$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + x - x_0, \quad x \in [x_0, 1].$$

Η g είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$$g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0 \quad \text{και} \quad g(x_0) = f(x_0) < 0,$$

διότι,

$$x_0 < 1 \xrightarrow{f \nearrow [x_0, +\infty)} f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < 0,$$

επομένως,

$$g(1) \cdot g(x_0) < 0.$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho = x_0.$$

Επιπλέον,

$$g'(x) = f'(x) + 1 > 0, \quad \text{για κάθε } x \in [x_0, 1],$$

διότι

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) + 1 \geq 1 > 0, \quad \text{για κάθε } x \geq x_0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$, οπότε το ρ είναι μοναδικό.

Δ4. Η f συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) .

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

$$\xi < k \xrightarrow{f' \nearrow} f'(\xi) < f'(k) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(k)$$

κι επειδή $x_0 - \rho < 0$,

$$f(x_0) - f(\rho) > (x_0 - \rho) \cdot f'(k).$$

Επιπλέον από το (Δ3) έχουμε ότι $f(\rho) = x_0 - \rho$, άρα

$$f(x_0) - f(\rho) > f(\rho) \cdot f'(k) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho) + f(\rho) \cdot f'(k),$$

που ισοδυναμεί με το ζητούμενο.

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, τότε η f παίρνει στο $[a, b]$ μια μέγιστη τιμή, M , και μια ελάχιστη τιμή, m .

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

B4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha < -3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $X'X$.

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ .

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4.

α) Σωστό, β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Σωστό, ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε στη δοθείσα σχέση $x + 1 = \omega \Leftrightarrow x = \omega + 1 \Leftrightarrow -x = 1 - \omega$ και γίνεται:

$$f(\omega) = \omega \cdot e^{1-\omega}, \omega \in \mathbb{R}$$

άρα, θέτοντας όπου ω το x , προκύπτει ότι

$$f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}.$$

Β2. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

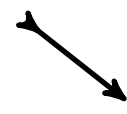
$$f'(x) = (x)' \cdot e^{1-x} + x \cdot (e^{1-x})' = (1-x)e^{1-x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad e^{1-x} = 0 \quad (\text{αδύνατη})$$

Είναι $e^{1-x} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως το πρόσημο της f' εξαρτάται από το $1-x$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το

$$f(1) = 1 \cdot e^0 = 1.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Β3. Είναι

$$f''(x) = (1-x)' \cdot e^{1-x} + (1-x) \cdot (e^{1-x})' = \dots = (x-2) \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$, κυρτή στο $[2, +\infty)$ και το $A\left(2, f(2)\right)$ ή $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Επιπλέον, f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f **δεν** έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \stackrel{1-x=\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow -\infty} e^{\omega} = 0$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} \stackrel{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0$$

Άρα, η ευθεία $y = 0$, (δηλαδή ο $x'x$) είναι οριζόντια σύμπτωτη στη C_f στο $+\infty$.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{1-x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty,$$

άρα η C_f **δεν** έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4. (i)

f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, άρα

$$f((-\infty, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1] = A_1$$

όπου

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1-x}) \stackrel{(-\infty) \cdot (+\infty)}{=} -\infty$$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα

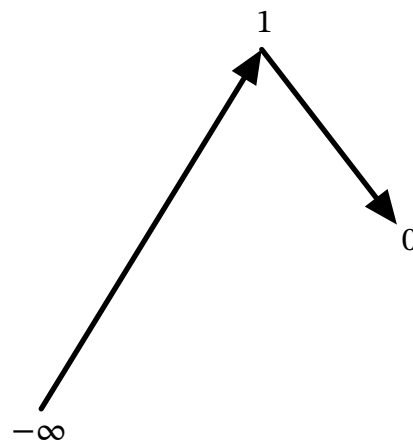
$$f([1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (0, 1] = A_2$$

Επομένως,

$$f(\mathbb{R}) = A_1 \cup A_2 = (-\infty, 1].$$

(ii) Η εξίσωση $f(x) = \lambda$, έχει:

- 2 ρίζες, όταν $\lambda \in (0, 1)$
- 1 ρίζα, όταν $\lambda \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$
- είναι αδύνατη, όταν
 $\lambda \in (1, +\infty)$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική και στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

Επιπλέον, $f(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) = \sin 0 = 1$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

άρα η f συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε f συνεχής στο $D_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (\alpha x^2 - 3x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

άρα η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. (i) f συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \subseteq D_f$ από **Γ1**.

f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, με

$$f'(x) = (\sin x)' = -\eta\mu x.$$

$$f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

άρα **δεν** ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(ii) Είναι

$$f'(x) = 0 \xLeftrightarrow{x \in (0, \frac{3\pi}{2})} -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \xLeftrightarrow{x \in (0, \frac{3\pi}{2})} x = \pi$$

οπότε $\xi = \pi$.

Γ3. Για κάθε $x < 0$, είναι

$$f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1,$$

με

$$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1, \quad x < 0.$$

Έστω ότι υπάρχει κάποιο $x_1 < 0$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha x_1^2 - 6x_1 - 1 = 0$$

$$\Delta = 36 + 12\alpha < 0, \quad \text{διότι } \alpha < -3 \Leftrightarrow 12\alpha < -36 \Leftrightarrow 36 + 12\alpha < 0$$

άρα **δεν** υπάρχει τέτοιο $x_1 < 0$.

Γ4. Από **Γ3** προκύπτει ότι $f'(x) < 0$, για κάθε $x < 0$ και f συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, οπότε

$$f((-\infty, 0]) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [1, +\infty) = A_1$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha x^3) \stackrel{\alpha \cdot (-\infty)}{=} +\infty.$$

Επιπλέον, $f'(x) = -\eta\mu x$, $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Είναι

$$f'(x) < 0, \quad \text{για κάθε } x \in (0, \pi)$$

και

$$f'(x) > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$, με

$$f([0, \pi]) = [f(0), f(\pi)] = [-1, 1] = A_2$$

και f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, με

$$f\left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = [-1, 0] = A_3$$

Είναι

$$f(D_f) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-1, +\infty),$$

επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \pi$, δηλαδή

$$f(x) \leq f(\pi) \Leftrightarrow f(x) \leq -1, \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right].$$

ΘΕΜΑ Δ**Δ1.**

$$(1) \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

φ συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$$\varphi(1) = -1 < 0 \quad \text{και} \quad \varphi(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$$

άρα $\varphi(1) \cdot \varphi(e) < 0$.

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0$.

Επιπλέον,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

Δ2.

$$f(x) = (\ln x_0) \cdot (x + 1) - \ln x - 1, \quad x > 0$$

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

από **Δ1** έχουμε ότι $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$, άρα:

$$f'(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} - \frac{x - x_0}{x_0 \cdot x}$$

όπου $x_0 \cdot x > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα το πρόσημο της f' εξαρτάται από τον αριθμητή $x - x_0$.

Η f γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$, γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολ. ελάχιστο στο x_0 , το

$$f(x_0) = \dots = 0.$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Δ3. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_g και C_h είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x e^{-x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow e x = x_0^{x+1} \quad (2)$$

Αν $x \leq 0$ τότε η **(2)** είναι αδύνατη.

Άρα για $x > 0$

$$(2) \Leftrightarrow \ln(e x) = \ln x_0^{x+1} \Leftrightarrow \ln e + \ln x = (x + 1) \ln x_0 \Leftrightarrow (x + 1) \ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \stackrel{\Delta 2.}{\Leftrightarrow} x = x_0.$$

Επομένως, οι C_g και C_h έχουν κοινό σημείο **μόνο** στο x_0 .

Για να δείξουμε ότι έχουν και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $h'(x_0) = g'(x_0)$.

Πράγματι,

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = \frac{x_0^x(1-x_0)}{e^x \cdot e}$$

και

$$g'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}.$$

Άρα,

$$h'(x_0) = g'(x_0) \Leftrightarrow \frac{x_0^{x_0}(1-x_0)}{e^{x_0} \cdot e} = \frac{1-x_0}{e^{x_0}} \Leftrightarrow x_0^{x_0} = e \Leftrightarrow \ln x_0^{x_0} = \ln e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1 \stackrel{x_0 \in (1, e)}{\Leftrightarrow} \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \quad \text{το οποίο ισχύει.}$$

Δ4.

$$f(x) > g(x), \quad \text{για κάθε } x > 0 \quad (*)$$

Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση AB είναι

$$d(x) = \sqrt{[f(x) - g(x)]^2} = |f(x) - g(x)| \stackrel{(*)}{=} f(x) - g(x), \quad x > 0$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι έχει ελάχιστο στο $x = x_0$.

Αν φ παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε και η d θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με

$$d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0) = -\varphi'(x_0)$$

άρα, από Θ. Fermat προκύπτει ότι:

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0.$$

Αν η φ **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

Επομένως, σε κάθε περίπτωση το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c,$$

με $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $X = X_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο

$$R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$.

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 6

B2. Αν $h(x) = (x - 1)^2$, $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1-1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , \quad x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , \quad x=1 \end{cases}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , \quad x > -1 \end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , \quad x \leq -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases}.$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 .

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ϵ) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ϵ). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου MKG , όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και G είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3, 4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right].$

Μονάδες 8**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 , με $x_1 < 1 < x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

- Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) .$$

Μονάδες 7

- Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

Μονάδες 4

- Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022ΘΕΜΑ Α**A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 186**A2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 142**A3.** Σχολικό βιβλίο σελ. 161**A4.**

α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Σωστό, δ) Λάθος, ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β**B1.** $D_f = (-\infty, 1]$ και $D_g = [0, +\infty)$.

Πεδίο ορισμού:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \leq 1\} = \{x \geq 0 \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1].$$

Τύπος:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

B2. Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με:

$$h'(x) = 2(x - 1)(x - 1)' = 2(x - 1) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1)$$

κι επειδή η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, θα είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1 συνάρτηση.

$$D_{h^{-1}} = h([0, 1]) = [h(1), h(0)] = [0, 1]$$

και

$$h(x) = y \Leftrightarrow (x - 1)^2 = y \xLeftrightarrow{0 \leq y \leq 1} |x - 1| = \sqrt{y}$$

κι επειδή $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x - 1 \leq 0$ έχουμε:

$$-(x - 1) = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y} \text{ με } 0 \leq y \leq 1.$$

Επομένως:

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x} \text{ με } x \in [0, 1].$$

B3. (i)

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0, 1)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1),$$

οπότε είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Επιπλέον, $\varphi(0) = 1 \neq \varphi(1)$ άρα για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών στο $[0, 1]$.

(ii)

$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα:

$$\eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1 \Leftrightarrow \varphi(1) < \eta\mu \alpha < \varphi(0).$$

Κι επειδή (από το προηγούμενο ερώτημα) για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu \alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < -1$:

$$f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$$

άρα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = -2x + c_1$.

Για $x > -1$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$$

άρα υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = x^3 - x + c_2$.

Επιπλέον, έστω $f(-1) = c_3$.

Είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0^3 - 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$. Και η f συνεχής στο -1 (ως παραγωγίσιμη), άρα:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1).$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = c_3.$$

Άρα:

$$2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2 \quad \text{και} \quad c_3 = 0.$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases} = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2.

$$(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0).$$

Για $x = 0$ και $y = -2$:

$$\begin{aligned} -2 - (x_0^3 - x_0) &= (3x_0^2 - 1)(-x_0) \Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow \\ 2x_0^3 &= 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1. \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση της (ε) είναι:

$$y - (1 - 1) = (3 - 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$

Γ3.Τη χρονική στιγμή t έχουμε ότι:

$$M(x(t), 2x(t) - 2), \text{ με } x(t) > 2.$$

Και

$$x(t_0) = 3, \quad x'(t_0) = 2 \text{ και } y(t_0) = 4.$$

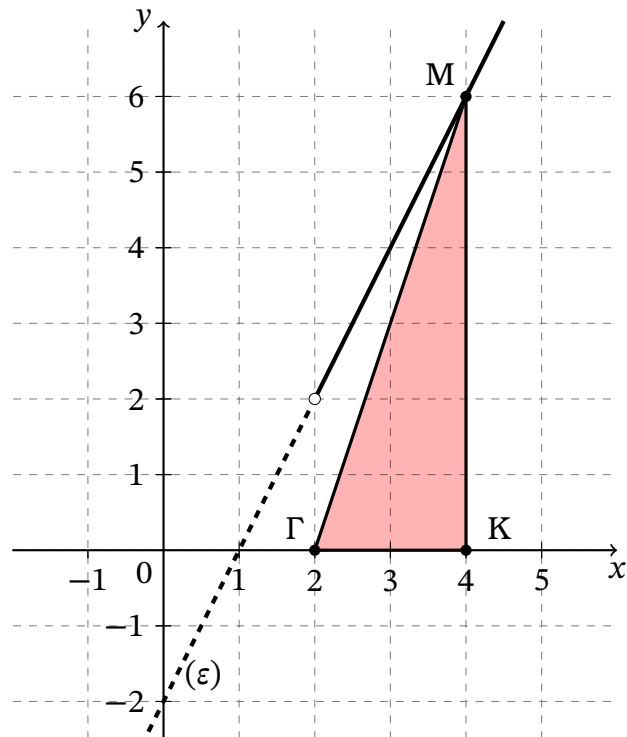
Είναι:

$$E(t) = \frac{(x(t) - 2) \cdot (2x(t) - 2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$$

και

$$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t).$$

Για $t = t_0$:

$$E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \text{ τμ/sec}.$$

Γ4. Έστω l το ζητούμενο όριο. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) \stackrel{-2 \cdot (-\infty)}{=} +\infty.$$

Άρα (θέτοντας $f(x) = w$):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} = \lim_{w \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu w}{w} = l_1,$$

όπου:

$$|\eta \mu w| \leq 1 \stackrel{|w| > 0}{\Leftrightarrow} \left| \frac{\eta \mu w}{w} \right| \leq \frac{1}{|w|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|w|} \leq \frac{\eta \mu w}{w} \leq \frac{1}{|w|}$$

και

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|w|} \right) = \lim_{w \rightarrow +\infty} \frac{1}{|w|} = 0,$$

άρα, από το Κριτήριο Παρεμβολής: $l_1 = 0$. Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1 - x^3} = l_2.$$

Θέτουμε $x = -u$, συνεπώς:

$$l_2 = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1 - (-u)^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u}{1 + u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1.$$

Οπότε: $l = l_1 + l_2 = 0 + 1 = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) $D_f = (0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 1)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$.

Παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, το $f(1) = 1 - \ln 3 = \ln e - \ln 3 = \ln \frac{e}{3} < 0$, αφού $0 < \frac{e}{3} < 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = +\infty,$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ και (θέτοντας $u = 3x$) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(3x)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) \stackrel{-(-\infty)}{=} +\infty$.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right) \stackrel{(+\infty) \cdot (1-0)}{=} +\infty,$$

διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(3x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$f((0, 1]) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty).$$

$$f([1, +\infty)) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty).$$

Επειδή $0 \in f((0, 1])$, υπάρχει $x_1 < 1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$, που είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Επειδή $0 \in f([1, +\infty))$, υπάρχει $x_2 > 1$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$, που είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 , με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη, με:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Οπότε η f είναι κυρτή, αφού είναι συνεχής και ισχύει $f''(x) > 0$ στο $D_f = (0, +\infty)$.

Δ2. Ισχύει $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.

Πράγματι, είναι

$$x_1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{f \searrow (0,1]} f(x_1) \geq f(x) \Rightarrow f(x) \leq 0$$

και

$$1 \leq x \leq x_2 \xrightarrow{f \nearrow [1,+\infty)} f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x) \leq 0$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{x_1}^{x_2} -f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln(3x) - x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = I_1 - I_2,$$

όπου:

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x) dx = \left[x \ln(3x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x (\ln(3x))' dx =$$

$$= x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{(*)}{=} x_2 x_2 - x_1 x_1 - \int_{x_1}^{x_2} 1 dx = x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1)$$

$$(*) : \begin{cases} f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1 \\ f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2 \end{cases}$$

Και

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}.$$

Άρα:

$$E = I_1 - I_2 = x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) = \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2} ((x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)) = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2).$$

Δ3.**1ος τρόπος**

Έστω $f(2 - x_1) \geq 0$. Αν $f(2 - x_1) = 0$, τότε:

$$2 - x_1 = x_1 \Leftrightarrow 1 = x_1, \text{ άτοπο διότι } x_1 < 1$$

ή

$$2 - x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2, \text{ άτοπο διότι προκύπτει } E = 0.$$

Αν $f(2 - x_1) > 0$, τότε από το Δ2 έχουμε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ και $f(x) > 0$ στο $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ διότι

$$x < x_1 \leq 1 \xrightarrow{f \searrow (0,1]} f(x) > f(x_1) \Rightarrow f(x) > 0$$

και

$$x > x_2 \xrightarrow{f \nearrow [1,+\infty)} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0$$

Άρα:

$$2 - x_1 < x_1 \Leftrightarrow 2x_1 > 2 \Leftrightarrow x_1 > 1, \text{ άτοπο διότι } x_1 < 1$$

ή

$$2 - x_1 > x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 < 0, \text{ άτοπο διότι προκύπτει } E < 0.$$

2ος τρόπος

Ισχύει:

$$x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1 \quad (1)$$

Το εμβαδόν E του ερωτήματος Δ2 είναι θετικός αριθμός (και $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$), άρα:

$$x_2 + x_1 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_2 > 2 - x_1 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$x_2 > 2 - x_1 > 1 \xrightarrow{f \nearrow (1,+\infty)} f(x_2) > f(2 - x_1) \Leftrightarrow 0 > f(2 - x_1).$$

Δ4. Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x) + f(x) = 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = f(1) + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x).$$

Η f είναι κυρτή, επομένως η C_f βρίσκεται (με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(x_2, 0)$) πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο αυτό. Δηλαδή:

$$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow 0 \geq f'(x_2)(x - x_2) - f(x)$$

με την ισότητα να ισχύει **μόνο** για $x = x_2$.

Η f έχει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, επομένως:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

και η ισότητα ισχύει **μόνο** για $x = 1$.

Οπότε, για να ισχύει η ισότητα $f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x)$ αρκεί:

$$\begin{cases} f(x) - f(1) = 0 \\ f'(x_2)(x - x_2) - f(x) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2 \end{cases} \text{ άτοπο, διότι } x_2 \neq 1.$$

Επομένως, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

δ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Μονάδες 10ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ και}$$

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \ln x.$$

- B1.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

- B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2) .

Μονάδες 8

- B3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = g \circ f$.

Μονάδες 6

- B4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Αν

$$\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1), \quad x \in (1, +\infty),$$

να εξετάσετε αν $\varphi = h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x} = 0.$

- $f'(x)f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ (μονάδες 4).

- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 5).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Δ2. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x) dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2022ΘΕΜΑ Α**A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 99**A2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 162**A3.** Σχολικό βιβλίο σελ. 128-129**A4.**

α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Σωστό, δ) Λάθος, ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β**B1.** Η f είναι συνεχής στο $D_f = (1, +\infty)$ ως ρητή.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x \cdot \frac{1}{x-1} \right) \stackrel{1 \cdot (+\infty)}{=} +\infty$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \quad \text{και} \quad x-1 > 0 \quad \text{στο} \quad (1, +\infty).$$

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Εξάλλου,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Επομένως η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.**B2.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$k(x) = f(x) - g(x), \quad \text{με} \quad x \in [e, e^2].$$

Η k είναι συνεχής στο διάστημα αυτό, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$k(e) = f(e) - g(e) = \frac{e}{e-1} - \ln e = \frac{1}{e-1} > 0$$

και

$$k(e^2) = f(e^2) - g(e^2) = \frac{e^2}{e^2-1} - \ln e^2 = \frac{2-e^2}{e^2-1} < 0$$

οπότε $k(e) \cdot k(e^2) < 0$, συνεπώς από Θ. Bolzano υπάρχει στο (e, e^2) μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

B3.

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x > 1 \mid \frac{x}{x-1} > 0 \right\}.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $x - 1 > 0$ και $x > 0$, άρα:

$$\frac{x}{x-1} > 0,$$

οπότε:

$$D_{g \circ f} = \left\{ x > 1 \mid \frac{x}{x-1} > 0 \right\} = (1, +\infty),$$

με

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln f(x) = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right), \quad x \in (1, +\infty).$$

B4.

Για να ορίζεται η h πρέπει:

$$\frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ή } x > 1)$$

Άρα: $D_h = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ κι επειδή $D_h \neq D_\varphi$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\varphi \neq h$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	—	0	+	+
$x - 1$	—	—	0	+
$\frac{x}{x-1}$	+	0	—	+

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x}, \quad \text{με } x \neq 0.$$

Κοντά στο 0 είναι: $f(x) = x g(x) + \eta\mu x$, άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x g(x) + \eta\mu x] = 0 \cdot 0 + \eta\mu 0 = 0.$$

Κι επειδή η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη):

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Επιπλέον,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x g(x) + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[g(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right] = 0 + 1 = 1$$

ii. Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

Γ2. Είναι:

$$f'(x) \cdot f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f''(x) = 2x \Leftrightarrow \left([f'(x)]^2 \right)' = (x^2)' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε:

$$[f'(x)]^2 = x^2 + c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$: $[f'(0)]^2 = 0^2 + c \Leftrightarrow c = 1$, οπότε:

$$[f'(x)]^2 = x^2 + 1 \quad (1)$$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα η f' είναι παραγωγίσιμη κι επομένως συνεχής.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [f'(x)]^2 = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = 0 \text{ (αδύνατη)}.$$

Άρα:

$$f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(και συνεχής), συνεπώς διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$.

Επιπλέον $f'(0) = 1 > 0$, οπότε:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ3. Έχουμε ότι:

$$\sqrt{x^2 + 1} \cdot f''(x) = x \stackrel{\sqrt{x^2+1}>0}{\Leftrightarrow} f''(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$, κυρτή στο $[0, +\infty)$ και η C_f έχει σημείο καμπής το $O(0, f(0))$, δηλαδή το $O(0, 0)$.

Γ4. Είναι:

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και «1-1». Επιπλέον, η f είναι συνεχής και

$$D_{f^{-1}} = f(D_f) = f(\mathbb{R}) \stackrel{f \nearrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Όμως, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, άρα η C_f βρίσκεται (με εξαίρεση το σημείο επαφής O) κάτω από την εφαπτομένη της $(\varepsilon) : y = x$. Επομένως:

$$f(x) \leq x \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0]$$

(με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$) και $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Όμοια, η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται (με εξαίρεση το σημείο επαφής O) πάνω από την εφαπτομένη της $(\varepsilon) : y = x$. Επομένως:

$$f(x) \geq x \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

(με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$) και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Οπότε:

$$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Και χωρίς να μελετούσαμε την f ως προς την μονοτονία, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι:

Εφόσον είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

- $f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0 + 1 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3 + 3x + 1) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x \ln x}) = 1$

διότι, θέτοντας $x \ln x = w$, με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{w \rightarrow 0} e^w = e^0 = 1.$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Εξάλλου,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3) = 3$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^x \cdot (\ln x + 1) \right] \stackrel{1 \cdot [(-\infty)+1]}{=} -\infty,$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Δ2.

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 0)$, με:

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3 \cdot (x^2 - 1) \neq 0 \text{ στο } (-1, 0).$$

Επιπλέον, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{2}{e})$, με:

$$f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1),$$

άρα:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$$

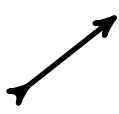
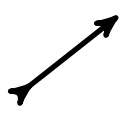
και από το Δ1 έχουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Επομένως, έχει δύο κρίσιμα σημεία, τα $x_0 = 0$ και $x_1 = \frac{1}{e}$.

ii. Είναι:

$$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

και

$$\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$$

x	-1	0	$1/e$	$2/e$
$-3x^2 + 3$	+	+	+	+
$x^x (\ln x + 1)$		-	0	+
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$				

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ στο } (-1, 0) \\ \text{και } f \text{ συνεχής στο } [-1, 0] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Η } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } [-1, 0]$$

Άρα:

$$f([-1, 0]) = [f(-1), f(0)] = [-1, 1] = A_1$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ στο } \left(0, \frac{1}{e}\right) \\ \text{και } f \text{ συνεχής στο } \left[0, \frac{1}{e}\right] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Η } f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \left[0, \frac{1}{e}\right]$$

Άρα:

$$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, 1\right] = A_2$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ στο } \left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right) \\ \text{και } f \text{ συνεχής στο } \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Η } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$$

Άρα:

$$f\left(\left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f\left(\frac{2}{e}\right)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right] = A_3$$

Επομένως:

$$f(D_f) = f\left(\left[-1, \frac{2}{e}\right]\right) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-1, 1].$$

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι:

$$f\left(\left[-1, \frac{2}{e}\right]\right) = [-1, 1].$$

Συνεπώς:

$$-1 \leq f(\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2f(\alpha) \leq 2 \quad (1)$$

και

$$-1 \leq f(\beta) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3f(\beta) \leq 3 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη:

$$-5 \leq 2f(\alpha) + 3f(\beta) \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} \leq 1$$

Άρα:

$$\frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} \in f(D_f),$$

επομένως υπάρχει $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}.$$

Δ4. Είναι:

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x} \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right].$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = x - \ln x - 1, \quad x \in (0, 1).$$

Έχουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1),$$

οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ (και συνεχής), άρα:

$$g((0, 1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)\right) = (0, +\infty),$$

συνεπώς:

$$g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right] \subseteq (0, 1).$$

Δηλαδή,

$$x - \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \ln x + 1 \xLeftrightarrow{x^x > 0} x \cdot x^x > x^x \cdot (\ln x + 1) \Leftrightarrow x \cdot f(x) > f'(x) \text{ στο } \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$$

Επομένως:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x) dx > \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} f'(x) dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x) dx > \left[f(x) \right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x) dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$