

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θ1) (α) Εάν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη & συνεχής στο διάστημα Δ , τότε τι συμβαίνει για την f^{-1} ως προς την συνέχεια της;

(β) Εάν η συνάρτηση f είναι 1-1 και συνεχής στο ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ της, τότε τι συμβαίνει με την συνέχεια της f^{-1} ;

Θ2) Να βρεθεί το $a \geq 0$ ώστε να υπάρχει στο $\mathbf{R}$ το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(ax^2 + 2x + 1) - \ln(x - 1)]$, για $x > 1$.

Θ3) Έστω ΣΥΝΕΧΗΣ συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της.

Θ4) Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $2f(x) = x + \eta\mu f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $|f(x)| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$, και β) η f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = 0$.

Θ5) Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) = \ln x$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = 1$.

Θ6) Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in (0, +\infty)$.

α) ΝΔΟ: εάν f ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = 1$, τότε f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $(0, +\infty)$.

β) ΝΔΟ: εάν f ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = a \neq 1$, τότε f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $(0, +\infty)$.

Θ7) Έστω ΣΥΝΕΧΗΣ συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $x + \eta\mu x \leq xf(x) \leq 2x^2 + x + \eta\mu x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

α) Να υπολογισθεί το $f(0)$.

Θ8) Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x) \leq 2xf(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

α) ΝΔΟ: f ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = 0$ και β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$.

Θ9) Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $f^5(x) + f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = 0$.

Θ10) Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $xf(x) + 1 \leq \sigma\upsilon\nu 5x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Εάν η f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = 0$, τότε να υπολογισθεί το $f(0)$.

Θ11) Έστω ΣΥΝΕΧΗΣ συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h)}{h} \right) = 3, 14$. Να υπολογισθεί το $f(1)$.

Θ12) Έστω ΣΥΝΕΧΗΣ συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{f(2h)}{h-1} \right) = 2, 76$. Να υπολογισθεί το $f(2)$.

Θ13) Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = 3$ και ισχύει: $f(2-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = -1$.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θ14) Έστω ΑΡΤΙΑ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο x_0 . Να αποδειχθεί ότι η f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $-x_0$.

Θ15) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

α) ΝΔΟ: εάν f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο 0 , τότε f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $\mathbb{R}$.

β) ΝΔΟ: εάν f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $a \neq 0$, τότε f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $\mathbb{R}$.

Θ16) Έστω $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-1, 2] \\ 5-x, & x \in (2, 4) \end{cases}$. Να ελεγχθεί εάν εφαρμόζεται το **Θ.Bolzano**. Υπάρχει **προφανής** ρίζα της f ;

Θ17) ΝΔΟ η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + 1$ έχει **τουλάχιστον** 2 ρίζες στο $(-1, 1)$.

Θ18) Εάν $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, f **συνεχής** & $f(0) = -6$ & $f(2) = 6$, τότε ΝΔΟ: η εξίσωση $f^2(x) = 16$ έχει **τουλάχιστον** 2 ρίζες στο $(0, 2)$.

Θ19) ΝΔΟ η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x+a} + \frac{x^6+1}{x+\beta} = 0, 0 < a < \beta$, έχει **τουλάχιστον** 1 ρίζα στο $(-\beta, -a)$.

Θ20) ΝΔΟ κάθε πολυώνυμο ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ έχει **τουλάχιστον** 1 ρίζα.

(Τι συμβαίνει με τα πολυώνυμα ΑΡΤΙΟΥ ΒΑΘΜΟΥ;)

Θ21) ΝΔΟ η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} + 1 + \ln(x+2)$ παρουσιάζει ΑΚΡΟΤΑΤΑ στο $[2, 5]$.

Θ22) Εάν $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, f **συνεχής** & **περιττή συνάρτηση**, $f(a) \neq 0$, τότε ΝΔΟ η f έχει **τουλάχιστον** 1 ρίζα στο διάστημα $(-a, a)$.

Θ23) Εάν $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι **συνεχής** & $f(0) = f(2\pi)$, τότε ΝΔΟ **υπάρχει** $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$.

Θ24) ΝΔΟ: η εξίσωση $(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-b)(x-a) = 0, a < b < c$, έχει ακριβώς 2 λύσεις ρ_1, ρ_2 οι οποίες $a < \rho_1 < b < \rho_2 < c$.

Θ25) ΝΔΟ όταν μία συνάρτηση f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ & 1-1 σε διάστημα Δ , τότε είναι ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ στο Δ .

Θ26) Έστω f μία ΣΥΝΕΧΗΣ συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $m = \inf, M = \max f$. Τότε:

α) Εάν $m = M \Rightarrow \dots$

β) Εάν $m \leq h \leq M \Rightarrow \dots$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

γ) Εάν $m \leq h \leq M$ & f γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta] \Rightarrow \dots$

Θ27) Έστω f μία ΣΥΝΕΧΗΣ συνάρτηση στο διάστημα (α, β) , και $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$.
ΝΔΟ το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Θ28) ΝΔΟ : η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{x} = \ln(x+1)^{-1}$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-1,0)$

Θ29) ΝΔΟ : η εξίσωση $\eta\mu x = 1 - x, x \in (1/2, 1)$ έχει ακριβώς 1 λύση .

Θ30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + xe^x$. ΝΔΟ υπάρχει μοναδικό σημείο M της γραφικής παράστασης της, με τετμημένη $a \in (1,2)$ τέτοιο ώστε η ευθεία OM να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x + 4y = 1$.

Θ31) ΝΔΟ η εξίσωση $x^2 - \sin x = 0$ έχει 2 λύσεις ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Θ32) ΝΔΟ η συνάρτηση $f(x) = (x-2)e^x - (x+2)$ έχει:

(α) Τουλάχιστον 1 ρίζα στο διάστημα $(0,4)$. (β) Τουλάχιστον 2 αντίθετες ρίζες.

Θ33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.

ΝΔΟ η εξίσωση $f(x) = x$, (α) έχει τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\frac{3}{2}, 2)$, και (β) έχει τουλάχιστον 2 ρίζες αντίθετες.

Θ34) ΝΔΟ η εξίσωση $2x\eta\mu \frac{1}{x} = 1$ έχει τουλάχιστον 1 θετική λύση.

Θ35) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=f(4)$ και η συνάρτηση με τύπο

$$h(x) = f(x) - f(x+2)$$

(α) Να βρεθεί το A_h , & (β) ΝΔΟ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0,2]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi+2)$.

Θ36) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta) = 0, \lambda\kappa > 0$. ΝΔΟ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Θ37) Έστω $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(a)$, και η συνάρτηση με τύπο

$$h(x) = f\left(\frac{a}{2} + x\right) - f(x).$$

(α) Να βρεθεί το A_h και να ελεγχθεί η συνέχεια της στο $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

(β) ΝΔΟ η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{a}{2} + x\right)$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

(γ) ΝΔΟ υπάρχει ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ “χορδή” της C_f με μήκος $\frac{a}{2}$.

Θ38) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις έτσι ώστε $f, g : R \rightarrow R$ και $e^{f(x)} + g(x) = 1 - x, \forall x \in R$, καθώς επίσης η C_f τέμνει τον άξονα x' σε 2 σημεία τα οποία βρίσκονται εκατέρωθεν του $O(0,0)$. ΝΔΟ: η C_g τέμνει τον άξονα x' σε τουλάχιστον 1 σημείο το οποίο βρίσκεται μεταξύ των A και B .

Θ39) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα Δ και ισχύει $f(x) - g(x) = cx, c \neq 0, \forall x \in \Delta$, καθώς και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 2 ετερόσημες ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \Delta, (\rho_1 < \rho_2)$. ΝΔΟ: η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 1 λύση στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

Θ40) Έστω f συνεχής συνάρτηση έτσι ώστε $f : [\alpha, 2\alpha] \rightarrow R, \alpha > 0, \beta \neq 0, f(\alpha) \neq 0$ και ισχύει $\beta \cdot f(\alpha) + e^\beta \cdot f(2\alpha) = f(2\alpha)$ ΝΔΟ: η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 1 λύση στο διάστημα $(\alpha, 2\alpha)$.

Θ41) Έστω συνεχής συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ και $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = xe^x - \sin x, \forall x \in R$. ΝΔΟ: η f έχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Θ42) Έστω f συνεχής συνάρτηση έτσι ώστε $f : R \rightarrow R$ και $f(1) > 2$ και $f(e) < 2$. ΝΔΟ: η εξίσωση $f(e^x) = e^x$ έχει τουλάχιστον 1 λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Θ43) Έστω συνεχής συνάρτηση έτσι $f : R \rightarrow R$ και $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{3x^2 + 1}, \forall x \in R$.

ΝΔΟ: $\exists x_0 \in (0,1): 4f(x_0) = 7x_0$.

Θ44) Ένας πεζοπόρος την 1η μέρα ξεκινάει από την ΠΑΤΡΑ στις 10:00 και φθάνει στο ΑΙΓΙΟ στις 13:00. Την 2η μέρα ξεκινάει από το ΑΙΓΙΟ στις 10:00 και φθάνει στην ΠΑΤΡΑ στις 13:00 από την ίδια διαδρομή. ΝΔΟ: υπάρχει τουλάχιστον 1 σημείο της διαδρομής όπου θα βρίσκεται και τις 2 ημέρες την ίδια ώρα.

Θ45) Να βρεθεί το ΠΡΟΣΗΜΟ της συνάρτησης f με τύπο: α) $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu x - 1, x \in [0, \pi]$,

β) $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu x + 1, x \in [0, \pi]$, γ) $f(x) = \varepsilon\phi x - 1, x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Θ46) Να βρεθεί η ΣΥΝΕΧΗΣ συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

α) $f^2(x) = 2xf(x) + 1, \forall x \in R$ και $f(0) = 1$.

β) $f(x) \cdot [f(x) - 2x] = e^{2x} - x^2, \forall x \in R$ και $f(0) = -1$.

γ) $f^2(x) = 3f(x) - 2, \forall x \in R$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

δ) $x^2 - \ln^2(1 + e^x) = 2xf(x) - f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -\ln 2$.

Θ47) Να βρεθεί η ΣΥΝΕΧΗΣ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: α) $f^2(x) = x^2 - 4x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
β) $f^2(x) + 2e^x = e^{2x} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Θ48) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, **συνεχής** συνάρτηση με $f(2) + f(3) < 5 < f(1) + f(4)$. ΝΔΟ υπάρχουν ξ, η στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\xi + \eta = 5$ και $f(\xi) + f(\eta) = 5$.

Θ49) Έστω $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ **συνεχής & γνησίως φθίνουσα** συνάρτηση. ΝΔΟ υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟ $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $6f(x_0) = 2f(-1) + f(0) + 3f(3)$.

Θ50) Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ **συνεχής & γνησίως αύξουσα** συνάρτηση. ΝΔΟ υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟ $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi) = \frac{f(a) + f(\beta) + f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{3}$.

Θ51) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **συνεχής** συνάρτηση με $f(3) = 2$. Εάν $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$, τότε να βρεθούν τα $f(2)$ και $f(1)$.

Θ52) Έστω $f, g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο ΣΥΝΕΧΕΙΣ συναρτήσεις, έτσι ώστε η C_f να βρίσκεται υψηλότερα από την C_g . Τότε ΝΔΟ:

α) Υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση από την C_g είναι ΜΕΓΙΣΤΗ.

β) Υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x) - f(x_0) \leq g(x) - g(x_0), \forall x \in [a, \beta]$.

Θ53) Να βρεθεί το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ των συναρτήσεων με εξισώσεις:

α) $f(x) = \ln x + 2e^x, x \in (0, 1]$

β) $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x, x \in (0, \pi)$

γ) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$

δ) $f(x) = e^{-x} - \ln x$

ε) $f(x) = x + 2\eta \mu x$

Θ54) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x - 1$.

(α) Να βρεθεί το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της. (β) ΝΔΟ υπάρχει μοναδικός $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\ln x_0 + e^{x_0} = 1$.

(γ) ΝΔΟ η εξίσωση $f(x) = 1836$ έχει μοναδική θετική λύση.

Θ55) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) - x$.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

α) Να βρεθεί το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της.

β) ΝΔΟ υπάρχει μοναδική λύση για την εξίσωση : $f(x) + 21 = 0$.

γ) ΝΔΟ υπάρχει μοναδική λύση για την εξίσωση : $f(x) + e^{a^2} - 1 = 0$ για κάθε αριθμό $a \neq 0$.

Θ56) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$.

α) Να βρεθεί το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της.

β) ΝΔΟ υπάρχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$ για την εξίσωση :

$\ln(x+1) + \eta\mu a = \ln x + a$, για κάθε θετικό αριθμό a .

Θ57) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + e^x, & x \leq 0 \\ e^{-x} - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$.

α) ΝΔΟ f συνεχής συνάρτηση.

β) Να βρεθεί το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της.

γ) ΝΔΟ η f έχει ακριβώς 2 ρίζες οι οποίες είναι και ετερόσημες.

δ) ΝΔΟ η εξίσωση $\frac{f(a)-1}{x-1} + \frac{f(\beta)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο $(1,2)$, για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}^*$.

ε) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του a .

Θ58) Έστω η **συνεχής** συνάρτηση $f: (0,3) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γν. αύξουσα στο $(0,1]$ και γν. φθίνουσα στο $[1,3)$. Εάν: $f(1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2$, τότε να βρεθεί:

α) Το σύνολο τιμών της f .

β) Το πλήθος των ριζών της f στο $(0,3)$.

Θ59) Έστω η **συνεχής** συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γν. φθίνουσα. Εάν η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 1)$, τότε να βρεθούν τα ΟΡΙΑ:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + f(x)}{x+2}, \quad \text{και} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{x-1}$$

Θ60) Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$.

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

β) ΝΔΟ $\exists f^{-1}$ η οποία είναι γν. αύξουσα.

γ) Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$.