

ΘΕΜΑΤΑ σε Μονοτονία _ Πράξεις _ Σύνθεση _ Αντιστροφή συνάρτησης

1) Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R , είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R . Σ Λ

2) Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ .

Αν ο λόγος $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι **θετικός αριθμός** για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 \neq x_2$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Σ Λ

3) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Σ Λ

4) Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1, τότε ισχύουν:

(α) $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A_f$ Σ Λ

(β) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A_f$. Σ Λ

5) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο R , τότε, όταν υπάρχει η συνάρτηση $g \circ f$, αυτή είναι:: γνησίως φθίνουσα, αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. Σ Λ

6) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο R , τότε, όταν υπάρχει η συνάρτηση $g \cdot f$, αυτή είναι: γνησίως αύξουσα, όταν οι f, g έχουν ίδιο είδος μονοτονίας. Σ Λ

7) Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x+3, & x \geq 3 \end{cases}$$

Να ορίσετε την συνάρτηση: $f + g$

8) Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: α) $f(x^2)$ β) $f(x-4)$ γ) $f(\ln x)$

9) Έστω συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2e^{-x}$. Η αντίστροφή της έχει τύπο :

A. $g(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ B. $h(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right)$ Γ. $\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln x$

Δ. $\sigma(x) = \sqrt{\ln x}$ Ε. $t(x) = \ln(2-x)$

10) Η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$, με τύπο $f(x) = 1 - 2^x$, έχει τύπο

A. $g(x) = 1 + 2^x$

B. $g(x) = 1 - 2^{-x}$

Γ. $g(x) = 2^x - 1$

Δ. $g(x) = \ln(x - 1)$

E. $g(x) = \ln(1 - x)$

11) Η **μονοτονία** μιας συνάρτησης f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	2	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$f(1) = 0$	$f(2) = -1$	$+$

Να χαρακτηρίσετε «**ΣΩΣΤΟ**» ή «**ΛΑΘΟΣ**» κάθε μία από τις επόμενες δύο προτάσεις:

A. Η f έχει μέγιστο το 0 και ελάχιστο το -1

B. Είναι $f(x) < 0$ όταν $0 < x < 1$

12) Εάν για την συνάρτηση f ισχύει $xf(x) + f(1-x) = 1, \forall x \neq 0$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για $x \neq 0$.

13) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει η ισότητα:

$$f^3(x) + 2f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(α) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης.

(β) Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

14) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει η ισότητα:

$$f^2(x) \leq f(x) \cdot f(1-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(α) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση f δεν είναι 1-1.