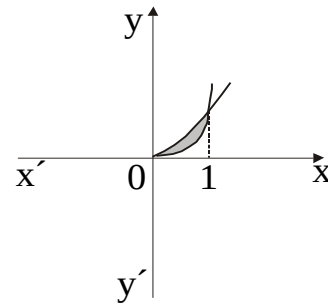


ΕΜΒΑΔΑ(μέσω συναρτήσεων)

- 1) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος δίνεται από τη

σχέση: $E = \int_0^1 (x^3 - x^2) dx$.

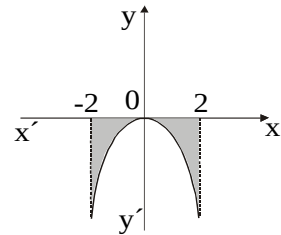
(Οι γραφικές παραστάσεις στο σχήμα είναι οι $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$).



Σ Λ

- 2) Για το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο σχήμα,

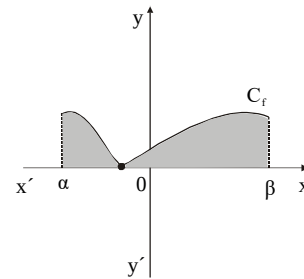
ισχύει: $E = - \int_{-2}^2 f(x) dx$.



Σ Λ

- 3) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με

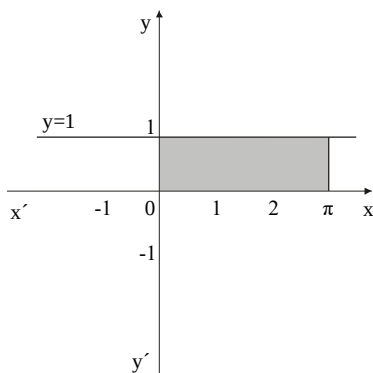
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$



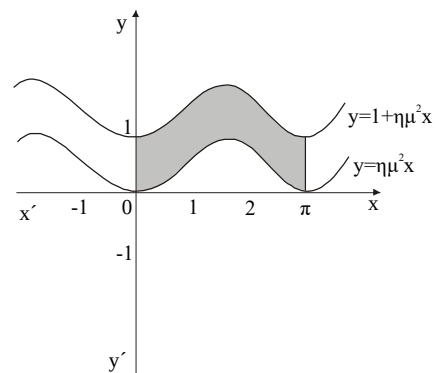
Σ Λ

- 4) Το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 1 είναι **μεγαλύτερο** από το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 2.

Σ Λ



Σχήμα 1

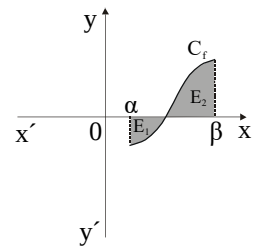


Σχήμα 2

- 5) Για τη συνάρτηση f του διπλανού σχήματος το

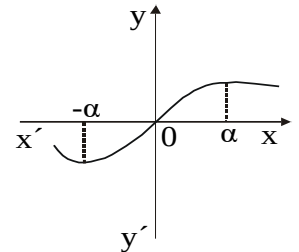
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με

- A. $E_1 + E_2$ B. $\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$ Γ. $2E_1 + E_2$ Δ. $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ Ε. $E_2 - E_1$



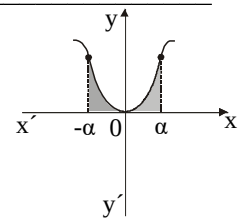
- 6) Έστω f μια **περιττή** συνάρτηση. Τότε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$ είναι ίσο με

- A. 2 B. $2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$ Γ. 0 Δ. 2α Ε. $-2 \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$



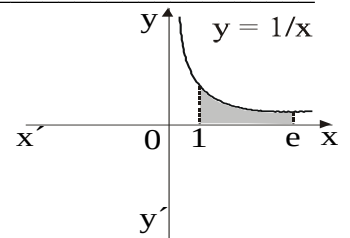
- 7) Έστω f μια **άρτια** συνάρτηση. Τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με

- A. 2 B. $2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$ Γ. 0 Δ. 2α Ε. $-2 \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$



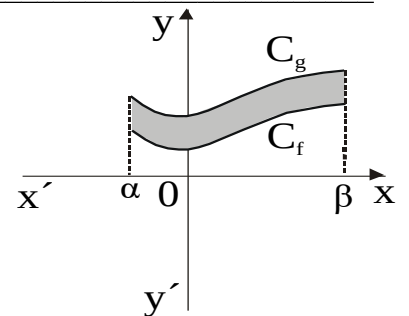
- 8) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με

- A. e B. $e - 1$ Γ. 1 Δ. $1 - e$ Ε. $2e$



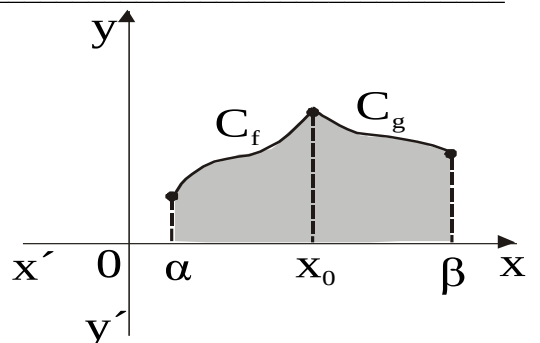
- 9) Αν $g(x) = f(x) + 1$, το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με

- A. $\alpha \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(\alpha)$ B. $\beta - \alpha$ Γ. $\alpha \cdot \beta$ Δ. 1 τ.μ. Ε. κανένα από τα προηγούμενα



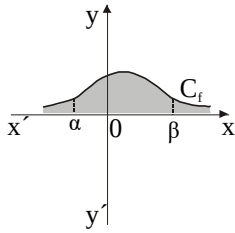
- 10) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ίσο με

- A. $\int_{\alpha}^{\beta} (g(x) f(x)) dx$ B. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$
Γ. $\int (f(x) - g(x)) dx$ Δ. $\int_{\alpha}^{x_0} f(x) dx - \int_{\beta}^{x_0} g(x) dx$
Ε. τίποτα από τα παραπάνω

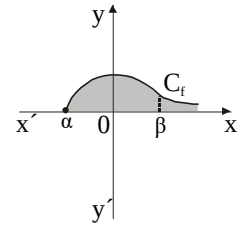


11) Το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$ μας δίνει το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος στο σχήμα

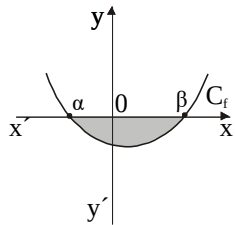
A.



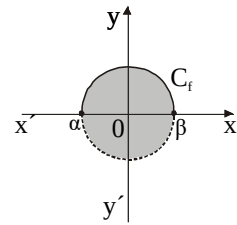
B.



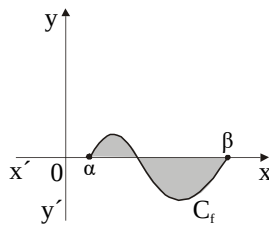
Γ.



Δ.



E.



12) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με

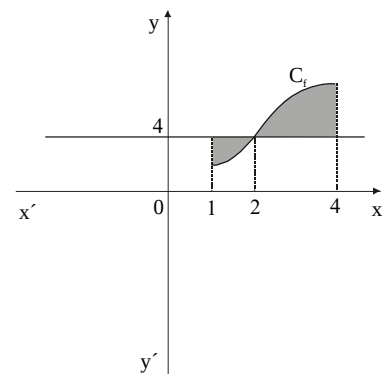
A. $\int_1^4 f(x) dx$

B. $\int_1^4 (-f(x)) dx$

Γ. $\int_1^4 (f(x) - 4) dx$

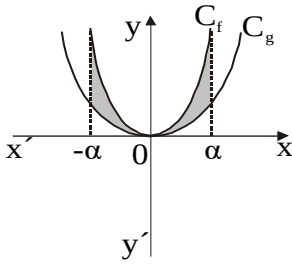
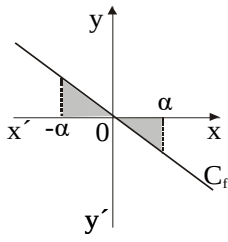
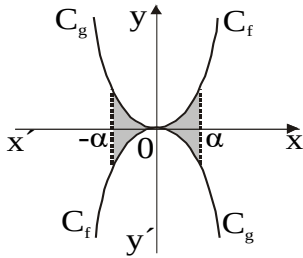
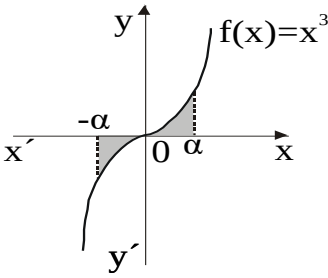
Δ. $\int_1^4 (4 - f(x)) dx$

E. $\int_1^2 (4 - f(x)) dx + \int_2^4 (f(x) - 4) dx$



- 13) Να αντιστοιχίσετε το εμβαδόν κάθε χωρίου που φαίνεται στη στήλη Α του πίνακα Ι στον τύπο που το υπολογίζει και υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	α. $E = \int_{-a}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^a (f(x) - g(x)) dx$ β. $E = \int_{-a}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^a (g(x) - f(x)) dx$
2. 	γ. $E = \int_{-a}^a (f(x) - g(x)) dx$ δ. $E = \int_{-a}^a f(x) dx$
3. 	ε. $E = -2 \int_{-a}^0 f(x) dx$
4. 	ζ. $E = \int_{-a}^0 f(x) dx - \int_0^a f(x) dx$

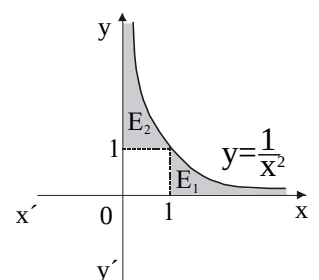
- 14) α) Στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε τη σχέση που φαίνεται να έχουν τα εμβαδά E_1 , E_2 .

β) Προσπαθήστε τώρα να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, π.χ.:

για το E_1 : θεωρήστε $\lambda > 1$ και υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx$ και

για το E_2 : θεωρήστε $0 < \lambda < 1$ και υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_\lambda^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Είναι συμβατά τα όσα είχατε υποθέσει στο ερώτημα (α) με τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β); Μπορείτε να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματά σας γεωμετρικά;



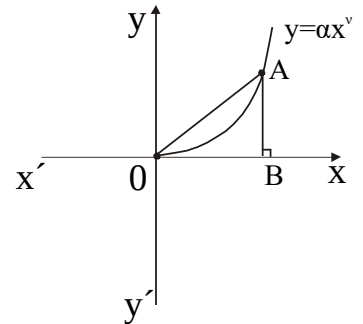
15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + e^{-x}$, $g(x) = x - e^{-x}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της $f(x) - g(x)$ και της $f(x) - x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$.

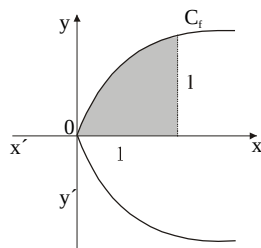
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$, $y = x$.

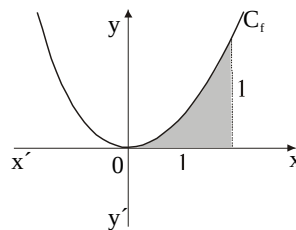
16) Έστω μια πολωνυμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^v$, $a > 0, x \geq 0$ και τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_1, 0)$. Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία η C_f να χωρίζει το τρίγωνο OAB σε δύο ισεμβαδικά χωρία;



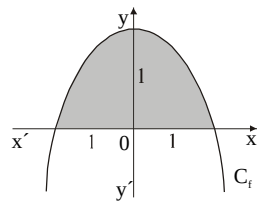
17) Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η καμπύλη C_f είναι παραβολή. Να υπολογίσετε τα σκιασμένα εμβαδά.



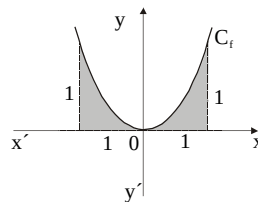
A



B



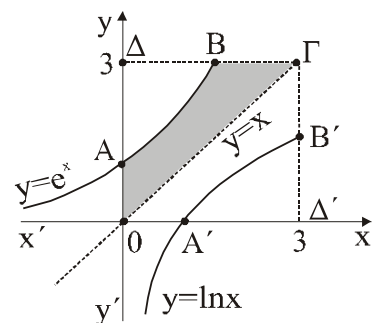
Γ



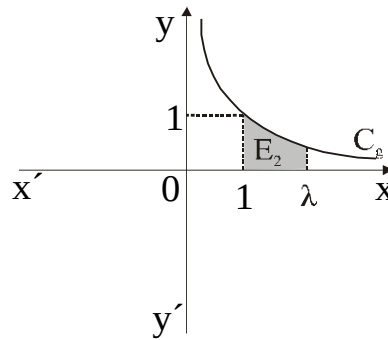
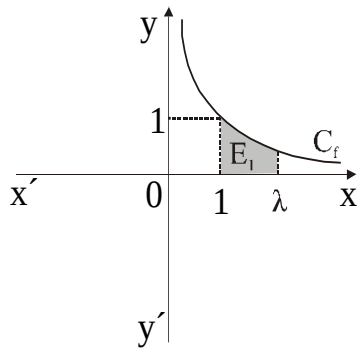
Δ

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $A'B'\Delta'$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



- 18) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$.



α) Να βρείτε τα εμβαδά E_1 και E_2 .

β) Να βρείτε τα όρια: $I_1 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{Lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda f(x) dx$ και $I_2 = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda g(x) dx$.

- 19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

α) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

δ) Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα $x'x$ που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

- 20) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^x$.

α) Να βρείτε μια **άρτια** συνάρτηση f και μια **περιττή** συνάρτηση g στο R , τέτοιες ώστε

$$f(x) + g(x) = h(x).$$

β) Να βρείτε τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα** των f, g .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda > 1$.

δ) Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.