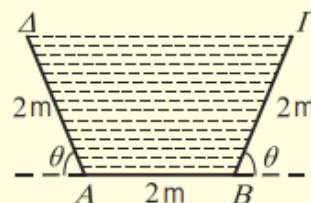


12. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή $ABΓΔ$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής $ABΓΔ$ είναι ίσο με

$$E = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$$

ii) Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

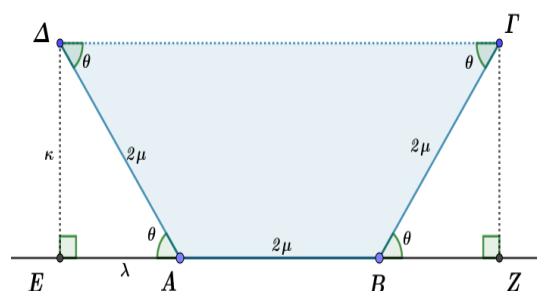


Λύση

Κατ' αρχήν η άσκηση μας καθοδηγεί στο να δημιουργήσουμε συνάρτηση που περιγράφει το εμβαδόν του ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ με ανεξάρτητη μεταβλητή την γωνία θ .

ΕΡΩΤΗΜΑ: **Ποια μεταβλητή θα σκεπτόσασταν εάν η άσκηση ζητούσε μόνο το «πότε μεγιστοποιείται το εμβαδόν της κάθετης διατομής του καναλιού»;**

(Α) Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα του βιβλίου κατ' αρχήν ως έχει.



Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$$\lambda = 2\sigma\upsilon\nu\theta$$

Επομένως το εμβαδόν του τραπέζιου ισούται

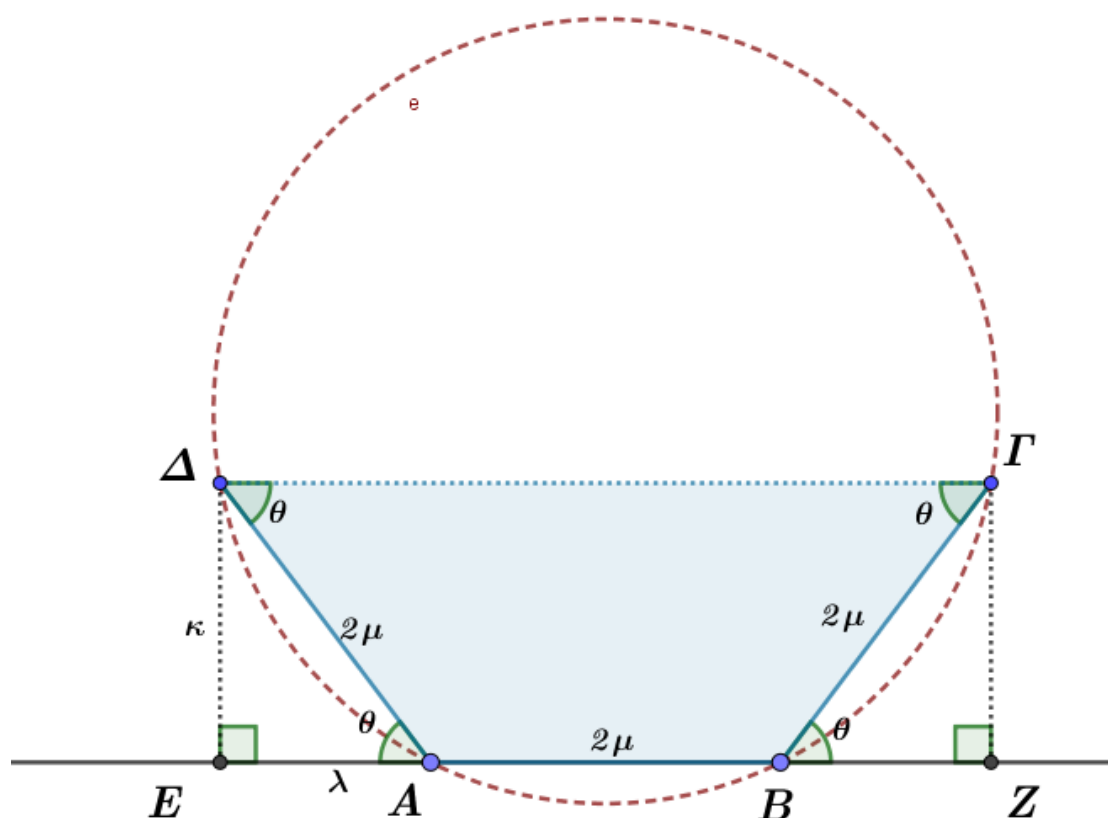
$$\text{με: } E = \frac{(AB) + (\Delta\Gamma)}{2} \cdot \upsilon = \frac{(2 + 2\lambda) + 2}{2} \cdot \kappa =$$

$$(2 + \lambda) \cdot \kappa = (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 2\eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$$

Όσον αφορά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εμβαδού είναι όλο το $\mathbf{R}$. Όμως η γωνία θ της πλευράς του καναλιού (για πρακτικούς λόγους) παίρνει τιμές το ανοικτό διάστημα $(0, \pi)$, όπου πιθανόν κάποιος να διαβλέπει πως η γωνία θ δεν μπορεί να πλησιάσει πολύ τα π (ακτίνα) διατηρώντας ταυτοχρόνως τα μήκη των $ΑΔ$ και $ΒΓ$ ίσα με 2 μέτρα (κάπου θα «φρακάρουν»). Θα μπορούσαμε επίσης να σκεφθούμε και το εξής:

Οι απέναντι γωνίες Α και Γ του ισοσκελούς τραπέζιου $ΑΒΓΔ$ είναι παραπληρωματικές επειδή οι γωνίες Α και Δ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά..... Άρα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ έχει περιγεγραμμένο κύκλο..... επομένως οι ίσες χορδές του $ΔΑ$, $ΑΒ$ και $ΒΓ$ αντιστοιχούν σε ίσα τόξα.



Το κάθε ένα από αυτά τα 3 ίσα τόξα ισούνται με θ (σε ακτίνια !!) επειδή (για παράδειγμα) η εγγεγραμμένη γωνία Δ αυτού του κύκλου βαίνει στο τόξο $AB\Gamma$, και έπεται ότι το τόξο αυτό ισούται με 2θ (δηλαδή με την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία). Άρα τα «μισά» τόξα AB και $B\Gamma$, του τόξου $AB\Gamma$, ισούνται με θ . Επομένως τα ίσα τόξα ΔA , AB , $B\Gamma$ ισούνται με θ (σε ακτίνια !!)

Είναι προφανές επίσης: $\theta + \theta + \theta < 2\pi \Rightarrow 3\theta < 2\pi \Rightarrow \theta < \frac{2\pi}{3}$.

Έχοντας «μαθηματικοποιήσει» το πραγματικό αυτό πρόβλημα εύρεσης μέγιστου εμβαδού διατομής του καναλιού, τελικά θα μελετηθεί η συνάρτηση με τύπο:

$$E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \quad 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow E'(\theta) = [4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)]' = 4\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + 4\eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)'$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 4(\eta\mu\theta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 4(1 - (\sigma\upsilon\nu\theta)^2)$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 4 + 4(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 8(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 4 \Rightarrow$$

$$E'(\theta) = 4[2(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + \sigma\upsilon\nu\theta - 1]$$

Το αντίστοιχο τριώνυμο που υπάρχει ως “βάση” είναι το: $2x^2 + x - 1 = \dots =$

$$2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = (2x - 1)(x + 1).$$

Άρα, $E'(\theta) = 4[(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1)(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)]$, όπου $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ Β12 / σελ. 153 / σχολικό βιβλίο (το κανάλι άρδευσης...)

Η ποσότητα $4(\sigma\upsilon\nu\theta + 1) > 0$, $\forall \theta \in (0, 2\pi/3)$.

Επομένως το πρόσημο της $E'(\theta)$ καθορίζεται από την ποσότητα $(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1)$ και την οποία θα μελετήσουμε.

$$2\sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \text{όταν } \theta \in (0, 2\pi/3)$$

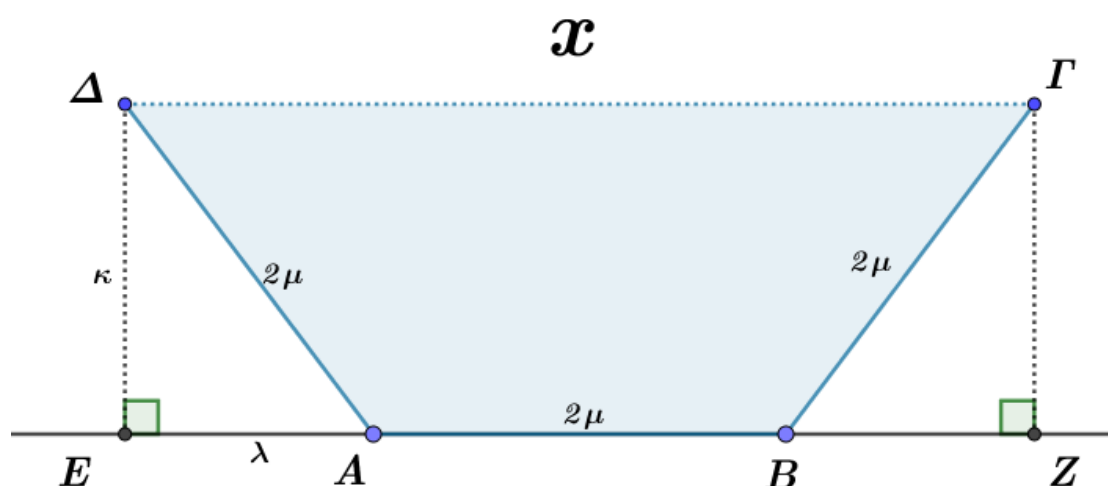
$$2\sigma\upsilon\nu\theta - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{3}, \text{όταν } \theta \in (0, 2\pi/3)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\theta - 1 < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta > \frac{\pi}{3}, \text{όταν } \theta \in (0, 2\pi/3)$$

θ	0	$\pi/3$	$2\pi/3$
f'	+	0	-
f			

Άρα έχουμε μέγιστη τιμή εμβαδού διατομής όταν $\theta = \pi/3$ (ακτίνια) που αντιστοιχεί σε γωνία 60° και είναι το $E(\pi/3) = 4\eta\mu\frac{\pi}{3}(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \frac{1}{2}) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = 3\sqrt{3} \text{ τ.μ.}$

(Β) Εάν δεν υπήρχε το 1^ο ερώτημα της άσκησης και εξητείτο το μέγιστο εμβαδόν της διατομής αυτής που αντιστοιχεί σε ισοσκελές τραπέζιο, τότε μπορεί κάποιος να θεωρήσει ως μεταβλητή του προβλήματος το μεταβαλλόμενο μήκος της πάνω βάσης του τραπεζίου.



ΑΣΚΗΣΗ Β12 / σελ. 153 / σχολικό βιβλίο (το κανάλι άρδευσης...)

Έστω $(\Delta\Gamma) = x$, και προκύπτει ότι $\lambda + 2 + \lambda = x \Rightarrow \lambda = \frac{x-2}{2} \Rightarrow \kappa = \sqrt{4 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{(x-2)^2}{4}} = \sqrt{\frac{16 - (x-2)^2}{4}}$, όπου πρέπει η ποσότητα $16 - (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 < 16 \Leftrightarrow |x-2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 6$.

Τελικά πρέπει $0 < x < 6$ επειδή $x = \text{μήκος}$.

Το εμβαδόν του τραπεζιού είναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB) + (\Delta\Gamma)}{2} \cdot \kappa = \frac{2+x}{2} \cdot \sqrt{4 - \lambda^2} = \text{οο}$

$\frac{2+x}{2} \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} \Rightarrow E(x) = \frac{2+x}{2} \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2}$ όπου $0 < x < 6$.

$$\begin{aligned} (E(x))' &= \left[\frac{2+x}{2} \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} \right]' \\ &= \left(\frac{2+x}{2}\right)' \sqrt{4 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} + \frac{2+x}{2} \cdot \left(\sqrt{4 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2}\right)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16 - (x-2)^2}{4}} + \frac{2+x}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{16 - (x-2)^2}{4}}} \cdot \left(\frac{16 - (x-2)^2}{4}\right)' \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{16 - (x-2)^2} + \frac{(2+x)}{2\sqrt{16 - (x-2)^2}} \cdot \left(\frac{16 - (x-2)^2}{4}\right)' \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{16 - (x-2)^2} + \frac{(2+x)}{2\sqrt{16 - (x-2)^2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot [-2(x-2)] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{16 - (x-2)^2} + \frac{(2+x) \cdot [-(x-2)]}{4\sqrt{16 - (x-2)^2}} = \frac{[16 - (x-2)^2] + (4 - x^2)}{4\sqrt{16 - (x-2)^2}} = \dots \\ (E(x))' &= \frac{-2x^2 + 4x + 16}{4\sqrt{16 - (x-2)^2}} \end{aligned}$$

Μελετώντας στη συνέχεια το πρόσημο του εμβαδού της διατομής, προκύπτει πως μέγιστη τιμή λαμβάνει όταν $x = 4$, η οποία είναι $E(4) = \frac{2+4}{2} \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{4-2}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3} \text{ τ.μ.}$