

ΑΣΚΗΣΕΙΣ στο Θ.Μ.Τ. διαφορικού λογισμού (έως μονοτονία & ακρότατα)

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Σ Λ

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Σ Λ

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta)$.

Σ Λ

4. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα x' .

Σ Λ

5. Αν f είναι μια πολωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της f , υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f' .

Σ Λ

6. Αν f είναι μια πολωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' , υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f .

Σ Λ

7. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

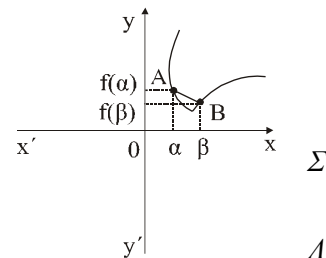
Σ Λ

8. Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος.

Σ Λ

10. Για τη συνάρτηση του σχήματος, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi \in (\alpha, \beta)$, όπου η εφαπτομένη της f , να είναι παράλληλη με την AB .

Σ Λ



11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = c$, με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$. Το πλήθος των σημείων $\xi \in (\alpha, \beta)$ που προκύπτουν από το θεώρημα του Rolle είναι

A. 1

B. 2

Γ. το πολύ 2

Δ. κανένα

Ε. άπειρο

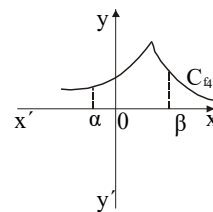
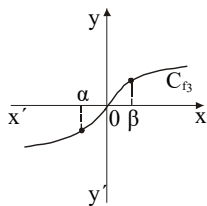
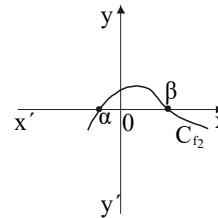
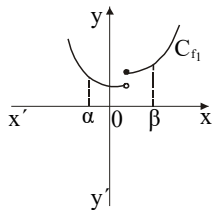
12. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [-1, 2]$, το πλήθος των αριθμών $\xi \in (-1, 2)$ που προκύπτουν από το θεώρημα της μέσης τιμής είναι

- A. τουλάχιστον τρεις B. ακριβώς ένας
Γ. τουλάχιστον δύο Δ. ακριβώς δύο E. κανένας

13 Το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, για κάθε $x_1, x_2 > 0$, εξασφαλίζει ένα ξ μεταξύ των x_1, x_2 ώστε να ισχύει

- A. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi}{x_1 - x_2}$ B. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\xi}$
Γ. $\ln(x_1 - x_2) = \frac{1}{\xi}(x_1 - x_2)$ Δ. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \xi(x_1 - x_2)$
E. $\ln(x_1 - x_2) = \xi(x_1 - x_2)$

14. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3, f_4 .



Αυτές που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[a, \beta]$ είναι οι

- A. f_2 και f_4 B. μόνο η f_4 Γ. μόνο η f_2 Δ. f_2 και f_3 E. f_1 και f_4

15. Οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμες σ' αυτό. Αν $f'(x) = g'(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει επιπλέον, ώστε $f(x) = g(x)$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$;

- A. f και g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ B. $f(0) = g(0)$
Γ. $f''(x) = g''(x) + c$ Δ. $f''(0) = g''(0)$
E. δεν χρειάζεται να προστεθεί άλλη συνθήκη

16. Στη στήλη Α του πίνακα Ι γράφονται συναρτήσεις. Στη στήλη Β γράφονται τα σημεία που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για κάθε συνάρτηση. Να κάνετε την αντιστοίχιση.

πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
συνάρτηση και διάστημα	σημείο που προκύπτει
1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1, x \in [0, 1]$	α. $\frac{1}{2} e - 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [-2, -1]$	β. $-\frac{1}{2}$
3. $f(x) = \ln x, x \in [1, e]$	γ. $e - 1$
4. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x \in [-1, 0]$	δ. $-\sqrt{2}$
	ε. $\frac{1}{2}$
	ζ. $e - 2$
	η. $\frac{1}{4}$
	θ. $1 - \sqrt{2}$

17. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε μία τουλάχιστον συνάρτηση f για την οποία να ισχύει

$$f'(x) = g(x) \quad (1).$$

β) Από όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες έχουν την ιδιότητα (1) να βρείτε εκείνη της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $(-2, -2)$.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα (1) της οποίας η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

18. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^\mu (x - \beta)^\nu$, μ, ν θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο ώστε $\xi = \frac{\nu\alpha + \mu\beta}{\mu + \nu}$.

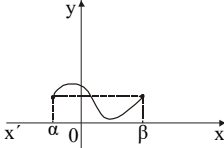
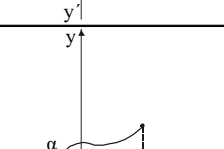
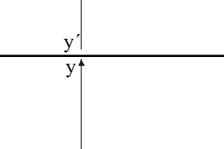
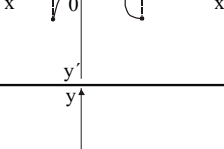
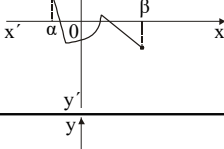
β) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα $[a, \beta]$ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, δηλαδή ισχύει $\frac{\xi - a}{\beta - \xi} = \frac{\mu}{\nu}$.

γ) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ είναι άρτιου βαθμού και έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς 4 και 5 ενώ κάθε ρίζα έχει τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητας. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στην C_P στο σημείο με τετμημένη 5 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Σημείωση: Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα ρ με βαθμό πολλαπλότητας κ , τότε γράφεται :

$$P(x) = (x - \rho)^\kappa \cdot Q(x), \text{ με } Q(\rho) \neq 0.$$

19. Να συμπληρώσετε κάθε στήλη του παρακάτω πίνακα με ΝΑΙ αν ισχύει το αντίστοιχο θεώρημα ή με ΟΧΙ αν δεν ισχύει:

Γραφική παράσταση	Θεώρημα Bolzano	Θεώρημα Rolle	Θεώρημα μέσης τιμής
			
			
			
			
			

20. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha + h) < \eta\mu\alpha + h\sigma\upsilon\nu\alpha$, όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \frac{\pi}{2}$.

21. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και οι αριθμοί

$f(\alpha), f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), f(\beta)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}$ και $\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta}$ είναι ίσοι.

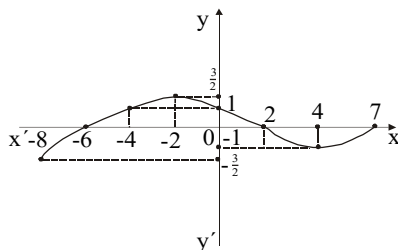
β) Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

22. Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι:

$$\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

23. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η f' μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_0), (x_0, +\infty)$. Μπορούμε να αποφανθούμε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$; Αν τα σημεία, για τα οποία δεν γνωρίζουμε ότι έχουν παράγωγο μηδέν, είναι $x_1, x_2, \dots, x_k$, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα;

24. Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-8, 7]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.



α) Να μελετήσετε το πρόσημο της $f(x)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της $f'(x)$ και να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της $f(x)$.

δ) Αν $g(x) = e^{f(x)}$ και $h(x) = \ln[f(x)]$, $x \in (-6, 2)$, να εξετάσετε τις g, h ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

25. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

δ) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

26. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x - 2000)^{2000} = x^{2000} + 2000^{2000}$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μία μόνο λύση.

27 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$, ώστε $P(x) \neq Q(x)$ και $P''(x) \neq Q''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = Q'(x)$ έχει ακριβώς μια λύση, εξετάζοντας το βαθμό του $S(x) = P(x) - Q(x)$.

28. Έστω ότι $x^a \geq x^x$ ($a > 0$) για κάθε $x > 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι $a = e$.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.

β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$.

γ) Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την $y = x$.

δ) Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2$, $a \neq 0$.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση

$$y = -\frac{1}{2}x^3.$$

32. Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμπής.

β) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, ώστε στο σημείο καμπής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Αν έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων στα x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$.