

2.9 . DE L' HOSPITAL (ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΟΡΙΩΝ)

A. ΚΑΝΟΝΑΣ DE L'HOSPITAL (ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΟΡΙΩΝ)

Θυμόμαστε-μαθαίνουμε

ΜΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \rightarrow$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΗΣ

Απροσδιόριστη μορφή λέμε την πράξη μεταξύ ορίων (αν υπάρχουν) που δεν δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα εκ των προτέρων αλλά εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε.

$$1) \frac{0}{0} \quad 2) \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad 3) 0 \cdot (\pm\infty) \quad 4) (+\infty) + (-\infty) \quad 5) 0^0, \pm\infty^0, 1^\infty, 0^\infty.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο (1^{ος} κανόνας Del' hospital $\rightarrow$ DLH) : ΜΟΡΦΗ $\frac{0}{0}$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και $g'(x_0) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση

ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο (2^{ος} κανόνας Del' hospital $\rightarrow$ DLH) :

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και $g'(x_0) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με

εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots$

Παρατηρήσεις

1. Τα θεωρήματα DHL εφαρμόζονται και όταν $x \rightarrow \pm\infty$
2. Τα θεωρήματα DHL μπορούν να εφαρμοστούν πολλές φορές αρκεί το όριο να είναι απροσδιόριστη μορφή και οι $f', g', \dots$ να είναι παραγωγίσιμες. κ.λ.π. Δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

3. Τα θεωρήματα DHL εφαρμόζονται και σε πλευρικά όρια. Δηλαδή όταν $x \rightarrow x_0^-$, ή $x \rightarrow x_0^+$

4. **ΠΡΟΣΟΧΗ!** Αν δεν έχουμε τύπο συνάρτησης πρέπει να **ξέρουμε** ότι οι συναρτήσεις f και g ότι είναι παραγωγίσιμες ειδάλως δεν εφαρμόζουμε DLH.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΟΡΙΩΝ ΣΕ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ

$$\boxed{1. \text{ ΜΟΡΦΗ} \rightarrow \frac{0}{0}} \rightarrow \text{DHL}$$

Αφού διαπιστώσουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ εφαρμόζουμε DHL, δηλαδή παραγωγίζουμε αριθμητή και παρονομαστή : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \dots \rightarrow$ αν προκύψει απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε το Θ. DLH όσες φορές χρειαστεί.

Άσκηση-1

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{\sigma \nu \eta x - 1}$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{\sigma \nu \eta x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta \mu x)'}{(\sigma \nu \eta x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \nu \eta x}{-\eta \mu x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma \nu \eta x)'}{(-\eta \mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{-\sigma \nu \eta x} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\boxed{2. \text{ ΜΟΡΦΗ} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}} \rightarrow \text{DLH}$$

Αφού διαπιστώσουμε απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$ εφαρμόζουμε DHL, δηλαδή παραγωγίζουμε αριθμητή και παρονομαστή : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \dots \rightarrow$ αν προκύψει απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε το Θ. DLH όσες φορές χρειαστεί.

Άσκηση-2

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + \ln x}$

Λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + \ln x} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2 + \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x + \frac{1}{x}} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)'}{\left(2x + \frac{1}{x} \right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{+\infty}{2 - 0} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

3. ΜΟΡΦΗ $\rightarrow 0 \cdot (\pm\infty)$

Έστω ότι έχω $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ τότε αφού διαπιστώσω απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$ μετασχηματίζω το γινόμενο σε πηλίκο ως εξής:

$$\triangleright f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \rightarrow \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ ή } \frac{0}{0}$$

ή

$$\triangleright f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ ή } \frac{0}{0}, \text{ και πλέον καταλήγουμε στην 1η ή 2η περίπτωση.}$$

Άσκηση-3

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

4. ΜΟΡΦΗ $\rightarrow +\infty$ ή $-\infty$

A. Κοινός παράγοντας Μετασχηματίζω ως εξής:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right) \right], \text{ με } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\infty}{\infty} \rightarrow DLH$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) \right], \text{ με } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\infty}{\infty} \rightarrow DLH$$

B. Αν έχουμε ένα τουλάχιστον κλάσμα για την επίλυση κάνουμε πράξεις (ομώνυμα) ώστε να τη φέρουμε σε ρητή μορφή της 1ης ή 2ης περίπτωσης ($\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή $\frac{0}{0}$).

Γ. Αν έχουμε ρίζα $\rightarrow$ με συζυγή παράσταση

ΝΑ ΠΡΟΣΕΧΩ!!!!

ΣΤΗΝ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ ΜΟΡΦΗΣ $\infty - \infty$ με παράσταση $\ln f(x) - h(x) \rightarrow$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$\ln f(x) - h(x) = \ln f(x) - \ln e^{h(x)} = \ln \frac{f(x)}{e^{h(x)}}$$

Θέτω $u = \frac{f(x)}{e^{h(x)}} \rightarrow \text{Del'hospital}$ και ως σύνθετη βρίσκω το όριό της με τον γνωστό τρόπο.

Άσκηση-4

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + e^x - x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + e^x - x) \stackrel{\text{Λύση}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x} - 1 \right) \right] = L \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (4)$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2),(3),(4)}{\Rightarrow} L = +\infty (0 + \infty - 1) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

5. ΜΟΡΦΗ $\rightarrow 0^0$ ή 1^∞ ή ∞^0 (για εκθετικές)

Έστω ότι θέλω να υπολογίσω το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ που είναι μια από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

$$\text{Έχω } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} \quad (1)$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)]$ που είναι της μορφής $\infty \cdot 0 \rightarrow$ περίπτωση 3.

Άσκηση-5

Να υπολογιστούν τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ και (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x$

Λύση

(i)

➤ Πρέπει $x > 0$, άρα $x \in (0, +\infty)$

$$\text{➤ Επίσης, } x^x = e^{x \ln x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \stackrel{0^0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = L \quad (1)$$

$$\text{➤ } \Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \ u = x \ln x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad (2)$$

$$\text{➤ } \text{Η } (1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} L = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1.$$

$$(ii) \text{Πρέπει } 1 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow (x-1)x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Επίσης, } \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{\psi \rightarrow -1} e^\psi = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \dots = -1$$

Β. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

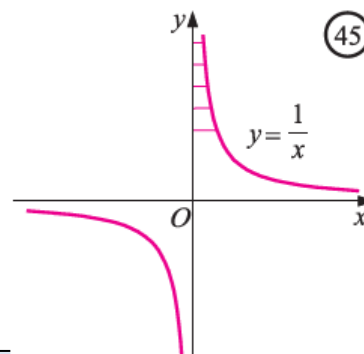
Β.1. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ $\rightarrow x = x_0$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Όπως ξέρουμε έχει

ασύμπτωτη τον y'g άξονα ή ($x=0$) και ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Αυτό σημαίνει ότι, **καθώς το x τείνει στο 0** από θετικές τιμές, η γραφική παράσταση της f **τείνει να συμπίσει με την ευθεία $x = 0$** . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $x = 0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .



Ορισμός

Κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f λέγεται η ευθεία $x = x_0$, αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $-\infty$ ή $+\infty$.

1. ΕΥΡΕΣΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗΣ Πως θα βρίσκουμε το x_0 ;

Μέθοδος:

1. Βρίσκουμε το Π.Ο. D_f
2. Βρίσκουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ αν υπάρχει άκρο ανοικτού διαστήματος x_0 (αριθμός και όχι $\pm\infty$) στο πεδίο ορισμού D_f και αν κάποιο απ' αυτά είναι $\pm\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ΑΡΑ: Για κατακόρυφες ασύμπτωτες ψάχνω στα σημεία x_0 :

- στα ανοιχτά άκρα του πεδίου ορισμού της (αν υπάρχουν)
- στα σημεία όπου δεν είναι συνεχής η f
- στα μεμονωμένα σημεία x_0 όπου ορίζεται η f

Άσκηση-1

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ii. $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x-4}$

Λύση

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο $x_0 = 1$. Έχω : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon): x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ii. $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x-4}$, $D_f = (2, 4) \cup (4, +\infty)$ για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο $x_1 = 2$ και στο $x_2 = 4$.

Έχω : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{x-4} = +\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επίσης : $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\ln(x-2)}{x-4} = -\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): x=4$ είναι και αυτή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . (αν η συνάρτηση ορίζεται και από τα δεξιά και από τα αριστερά του x_0 δεν παίζει ρόλο πιο από τα δυο πλευρικά όρια θα πάρω.)

B.2.ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ $\rightarrow y = l \in \mathbb{R}$

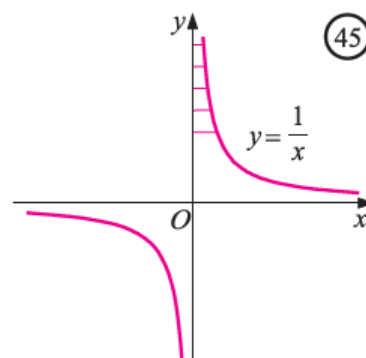
Για την ίδια συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Όπως ξέρουμε έχει ασύμπτωτη και τον $x'x$ άξονα ή $(y=0)$ και ισχύουν:

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $-\infty$, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπίπτει με την ευθεία $y=0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $+\infty$ η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπίπτει με την ευθεία $y=0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στη περιοχή $+\infty$.



Ορισμός

Οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στην περιοχή $-\infty$

(αντίστοιχα στην περιοχή $+\infty$) λέγεται η ευθεία $y=l$, αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$,

(αντίστοιχα στην αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$), με l πραγματικός αριθμός.

2. ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗΣ

Μέθοδος:

1. Βρίσκουμε το Π.Ο. D_f

2. Βρίσκουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ εφόσον $\pm\infty$ είναι στο πεδίο ορισμού και

- αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στην περιοχή του $-\infty$.
- αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στην περιοχή του $+\infty$.

Άσκηση-2

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(x) = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1}$.

Λύση

$f(x) = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1}$, $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, για οριζόντια ασύμπτωτη ψάχνω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Έχω: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έχω: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

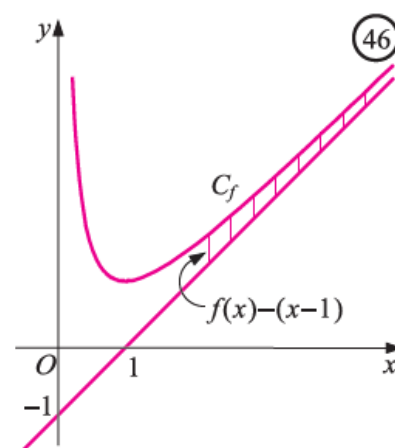
Β.3. ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ $\rightarrow y = \lambda x + \beta$

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$, και $g(x) = x - 1$. (σχήμα 46).

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x} - x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπίπτει με την γραφική παράσταση της g , δηλαδή την ευθεία $y = x - 1$. Δηλαδή η απόσταση της C_f από τη C_g τείνει να μηδενιστεί στην περιοχή $+\infty$.



Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

3. ΕΥΡΕΣΗ ΠΛΑΓΙΑΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗΣ

Ορισμός

Πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στην περιοχή $-\infty$ (αντίστοιχα στην περιοχή $+\infty$) λέγεται η ευθεία $y = \lambda x + \beta$,

➤ αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$,

αντίστοιχα

➤ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Προσδιορισμός πλάγιας ασύμπτωτης (εύρεση των λ, β)

Για την εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντίστοιχα στο $-\infty$, αν και μόνο αν :

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R} (\text{όχι } \pm \infty)$

αντίστοιχα

➤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R} (\text{όχι } \pm \infty)$

Άσκηση-3

Να βρεθούν αν υπάρχουν οι πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x^3 - 9x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

Λύση

$$f(x) = \frac{2x^3 - 9x + 1}{x^2 - 5x + 6}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\} = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty). \quad \text{Για πλάγιες -}$$

οριζόντιες ασύμπτωτες θα ψάξω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3 - 9x + 1}{x^2 - 5x + 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 9x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3 - 9x + 1}{x^2 - 5x + 6} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3 - 9x + 1 - 2x(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 5x + 6} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 9x + 1 - 2x^3 + 10x^2 - 12x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 - 21x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2}{x^2} = 10$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 10$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η $(\varepsilon): y = 2x + 10$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Παρατηρήσεις

1. Αν $\lambda \neq 0$, δηλαδή έχουμε πλάγια ασύμπτωτη και αν $\lambda = 0$ έχουμε οριζόντια. Οπότε αν έχουμε πλάγια ασύμπτωτη δεν έχουμε οριζόντια.
2. Αν $\lambda = \pm\infty$ ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.
3. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού $n \geq 2$ δεν έχουν ασύμπτωτες.
(γιατί αν $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{x} = \pm\infty$, άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, οπότε ούτε $l \in \mathbb{R}$).
4. Για τις ρητές συναρτήσεις έχουμε:
 - Υπάρχει μια μόνο οριζόντια αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του παρανομαστή.
 - Υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη μόνο μια αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος κατά 1 από το βαθμό του παρανομαστή.
 - Έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες $x = x_0$ με x_0 ρίζα μόνο του παρανομαστή ή με μεγαλύτερη πολλαπλότητα από του αριθμητή.

ΓΕΝΙΚΑ

Ασύμπτωτες ψάχνουμε στα εξής σημεία:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
- Στα $+\infty, -\infty$, εφόσον το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f περιέχει διαστήματα της μορφής $(-\infty, a), (a, +\infty)$

4. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΟΤΙ η $y = \lambda x + \beta$ ΕΙΝΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

Μέθοδος:

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι:

1ος τρόπος: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ ή αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

2ος τρόπος: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$ ή αντίστοιχα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

Άσκηση-4

Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1}$ όταν $x \rightarrow -\infty$.

Λύση

1ος τρόπος: Η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 4)] = 0$.

Είναι
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 4)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1} - (2x - 4) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13 - (x-1)(2x-4)}{x-1} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13 - 2x^2 + 4x + 2x - 4}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{9}{x-1} \right] = 0. \text{ Άρα η ευθεία } (\varepsilon): y = 2x - 4$$

είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

2ος τρόπος : Η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = -4$$

$$\text{Έχω : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 6x + 13}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 6x + 13}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\text{Επίσης : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13}{x-1} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13 - 2x^2 + 2x}{x-1} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x + 13}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x}{x} \right] = -4. \text{ Άρα η ευθεία } (\varepsilon): y = 2x - 4 \text{ είναι ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } -\infty.$$

5. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Μέθοδος: → Χρήση των τύπων για τις ασύμπτωτες

Άσκηση-5

Να βρεθεί ο α βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha-2)x^2 + 2x - 6}{x^2 + 1}$ να έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\psi = 2$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε πεδίο ορισμού $D_f = (-\infty, +\infty)$, αφού $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από ορισμό ασύμπτωτης πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^2 + 2x - 6}{x^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^2}{x^2} = 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

Άσκηση-6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x-3}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \rightarrow +\infty$.

Λύση

Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x-3} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x^2 - 3x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = 3 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - \beta x + 9}{x-3} - 3x \right] = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - \beta x + 9 - 3x^2 + 9x}{x-3} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\beta x + 9 + 9x}{x-3} = -2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(9-\beta)}{x} = -2 \Leftrightarrow 9-\beta = -2 \Leftrightarrow \beta = 11.$$

Άσκηση-7

Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2\alpha x + \beta}$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=2$ και $x=4$. Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θέτουμε $g(x) = x^2 + 1 \neq 0$ η οποία είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς και $h(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=2$ και $x=4$ θα πρέπει $h(2)=0$ και $h(4)=0$ γιατί αν $h(2) \neq 0$ ή $h(4) \neq 0$ η f θα είχε πεπερασμένο όριο το ℓ .

Οπότε έχουμε το σύστημα $\begin{cases} h(2)=0 \\ h(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-4\alpha+\beta=0 \\ 16-8\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha-\beta=4 \\ 8\alpha-\beta=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=8 \end{cases}.$

6. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ

Άσκηση-8

Έστω η ευθεία $\psi = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f μιας συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρείτε:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

ii. τον πραγματικό αριθμό μ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{x f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

Λύση

i. Επειδή η ευθεία $\psi = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη θα είναι $\lambda = 2$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\beta = 5$,
 άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5$

ii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{x f(x) - 2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{\mu f(x)}{x} + 4 \right)}{x \left[(f(x) - 2x) + 3 \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \frac{f(x)}{x} + 4}{(f(x) - 2x) + 3} = \frac{\mu \cdot 2 + 4}{5 + 3} = \frac{2\mu + 4}{8}$

Δηλαδή $\frac{2\mu + 4}{8} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

175. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}, \text{ ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x^3}, \text{ iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 4x + \eta \mu 2x}{\eta \mu 5x - \eta \mu 2x}, \text{ iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x - x^2 - x}{x^3 - x^2}, \text{ v)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x \eta \mu x}$$

$$\text{vi)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta \mu x} \text{ vii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{e^x - 1},$$

176. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x + x^2} \text{ ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{e^x}, \text{ iii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$$

177. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x), \text{ ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x (2 - x^2)], \text{ iii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^x + \ln x), \text{ iv)} \lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^x - 1) \ln x]$$

177. Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στη θέση $x=0$ η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} e^x - e^{-x} - x, & x \leq 0 \\ \frac{x - \eta \mu x}{x \eta \mu x}, & x > 0 \end{cases}$.

178. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$ η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \leq 1 \\ x - \ln x, & x > 1 \end{cases}$

179. Α) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1 + e^x))$

Β) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2$ και

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Β1. Να υπολογίσετε τον αριθμό $g'(0)$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

180. Να βρεθούν τα όρια :

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x}{x - x \sigma \upsilon \nu x}, (\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x}{x^3}, \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu(2000x)}{x} \quad (\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x)^{e^{\varphi x}}, \quad (\varepsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$$

181. Θεωρούμε συναρτήσεις f, g με πρώτη και δεύτερη παράγωγο και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $A = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$, $B = \frac{f'(\alpha) - A g'(\alpha)}{g(\alpha)}$ και Φ συνάρτηση ορισμένη στο

$$\mathbb{R} - \{\alpha\} \text{ ώστε να ισχύει: } \frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{\Phi(x)}{g(x)} \quad (1) \text{ για κάθε } \mathbb{R} - \{\alpha\}. \text{ Να}$$

υπολογιστεί το όριο : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \Phi(x)$.

182. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, να υπολογιστούν τα όρια: $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + 4f(x) + 5} - f(x) + 2 \right)$ και

$$M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + 2f(x) + \eta \mu(f(x)) + 1}{f^2(x) + 3f(x) + \sigma \upsilon \nu(f(x)) + 5}.$$

183. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, και $f(x) > 0, g(x) > 0, x \in (-\infty, 0)$ να δείχτεί ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f(x) + g(x)} = 0$.

184. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει η $f''(x)$ και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3f''(x).$$

185. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και $f'(x) = 1 + f^2(x)$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια: **a.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και **b.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

186. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^2 + \alpha x + \beta}$ να

έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$. Στη συνέχεια να εξετασθεί αν η C_f έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

187. Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x) = \frac{x^3 + \mu x - 4}{g(x)}$ (1), $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ (2), $f(0) = -4$,

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $g(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Να βρεθεί ο τύπος της f , αν γνωρίζουμε ότι η γραφική της f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ και παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x = 0$.

188. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) - f(\psi) = \frac{|x - \psi|}{\kappa + |x - \psi|}$ (1), για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ και $\kappa > 0$. Να

δείχτεί ότι η γραφική της f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

189. Βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και b , με $b \neq 0$, αν η οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = \frac{bx^2 + 3}{x - \alpha}$ και η κατακόρυφη ασύμπτωτή της έχουν κοινό σημείο το $A(1, 2)$. Δίνεται ότι $b\alpha^2 + 3 \neq 0$

190. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $\left| e^x f(x) - 2e^x \right| \leq \eta \mu e^x, x > 0$. Να

Αποδείξετε ότι η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\psi = 2$.

191. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 2)x^2 + 2x - 6}{x - \beta}$ να έχει πεδίο ορισμού το

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και η ευθεία $\psi = 2$ να είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της συνάρτησης.

192. Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$

A. Να βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y = x$.

B. Για $\alpha = 1$ και $b = -1$ να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία, ακρότατα

Γ. Να βρείτε το πλήθος ριζών της $f(x) = 0$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 1) + f(x^4 + 1) = 6$ στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

193. Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x + 1}$ και $x \neq -1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, τότε

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 7

- Δ2. α)** Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h και στο $-\infty$.
- β)** Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h .

Μονάδες 9

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 0)$

Μονάδες 9

194. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$

- B1.** Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.

- B2.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Μονάδες 6

- B3.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

- B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9