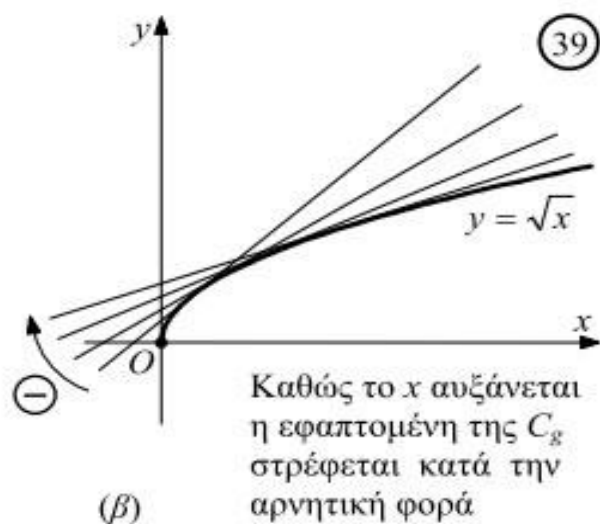
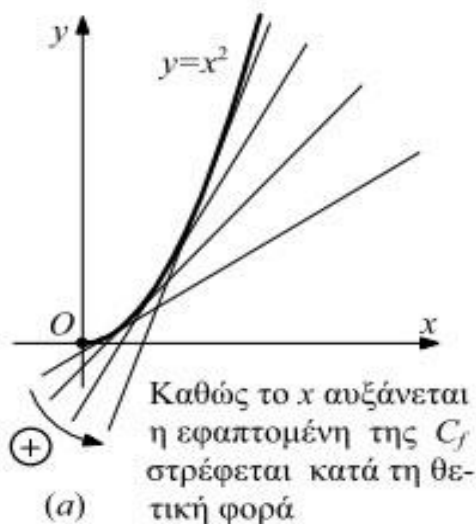


2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ

Ας θεωρήσουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο διάστημα $[0, +\infty)$.



Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται:

– η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνεται. Δηλαδή με $x_1 < x_2$ αυξάνεται η γωνία της εφαπτομένης με $x'x \rightarrow$

$\omega_1 < \omega_2 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 < \varepsilon\varphi\omega_2 \Rightarrow \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (κυρτή) στο $[0, +\infty)$.

– η κλίση της $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται. Δηλαδή με $x_1 < x_2$ μειώνεται η γωνία της εφαπτομένης με

$x'x \rightarrow \omega_1 > \omega_2 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 > \varepsilon\varphi\omega_2 \Rightarrow \lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$, δηλαδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) στο $[0, +\infty)$.

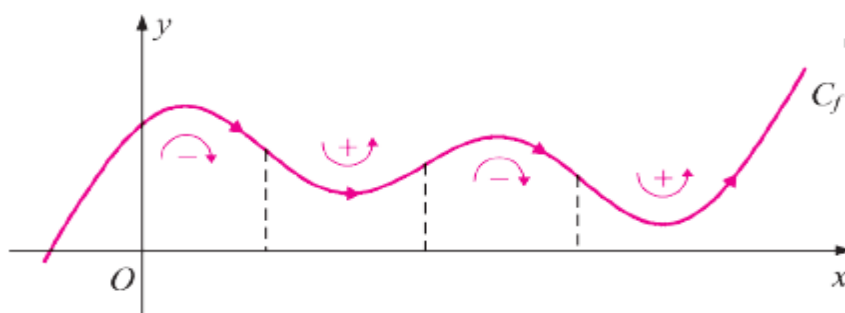
Γενικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό :

ΟΡΙΣΜΟΣ_1

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

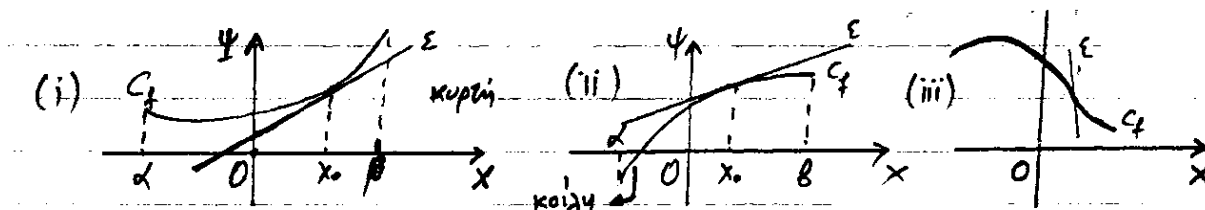
Εποπτικά:



- **Κυρτή** είναι μία συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f , για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη **θετική φορά**.
- **Κοίλη** είναι μία συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f , για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη **αρνητική φορά**.

Γεωμετρική ερμηνεία

- f κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f είναι κάτω απ' αυτή.
- f κοίλη στο $[\alpha, \beta]$ τότε η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ μένει πάνω από την C_f .
- Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 τότε η εφαπτομένη της C_f στη θέση x_0 διαπερνά την C_f .



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Αν μια συνάρτηση f είναι **κυρτή** σ' ένα διάστημα Δ , $\rightarrow$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. $\rightarrow f(x) \geq y \rightarrow$ εφαπτομένη.
2. Αν μια συνάρτηση f είναι **κοίλη** σ' ένα διάστημα Δ , $\rightarrow$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "πάνω" από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. $\rightarrow f(x) \leq y \rightarrow$ εφαπτομένη.

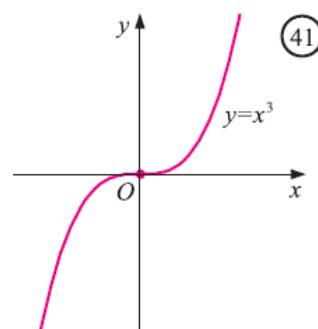
Θεώρημα I (για μελέτη καμπυλότητας)

Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f'' > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f'' < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = x^3$

- είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, αφού $f'' = 6x < 0$, για $x \in (-\infty, 0)$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ ενώ,
- είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, αφού $f'' = 6x > 0$, για $x \in (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.



ΣΧΟΛΙΟ: Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

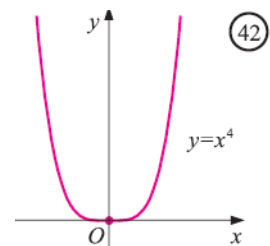
Ισχυρισμός- Αντιπαράδειγμα

Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Απάντηση: Είναι λάθος.

Αντιπαράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, γιατί $f''(x) = 12x^2$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$. Ισχύει $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Β. ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

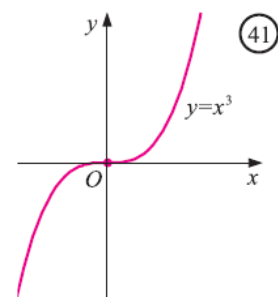
Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ (Σχ. 41) παρατηρούμε ότι:

(α) στο σημείο $O(0,0)$ η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη και

(β) εκατέρωθεν του $x_0 = 0$, η κυρτότητα της καμπύλης αλλάζει. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η γραφική παράσταση της f "κάμπτεται" στο σημείο $O(0,0)$.

Το σημείο O λέγεται **σημείο καμψής της C_f** .

Γενικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.



ΟΡΙΣΜΟΣ-2

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμψής** της γραφικής παράστασης της f .

Σχόλιο :

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της C_f , τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει στο x_0 καμψή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμψής**. Στα σημεία καμψής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη.

Θεώρημα II

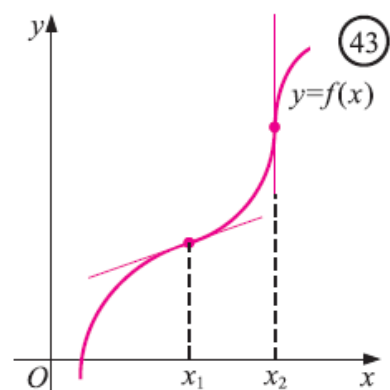
Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμψής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμψής.

Επομένως, οι πιθανές θέσεις σημείων καμψής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .



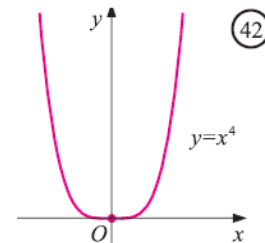
Ισχυρισμός- Αντιπαράδειγμα

- Για κάθε συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ , με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Απάντηση: Είναι λάθος.

Αντιπαράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ με $f'(0) = 0$ δηλαδή υπάρχει η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ και είναι ο x 'ς, $f''(x) = 12x^2$ με $f''(0) = 0$. Όμως το σημείο $O(0,0)$ δεν είναι, σημείο καμπής.



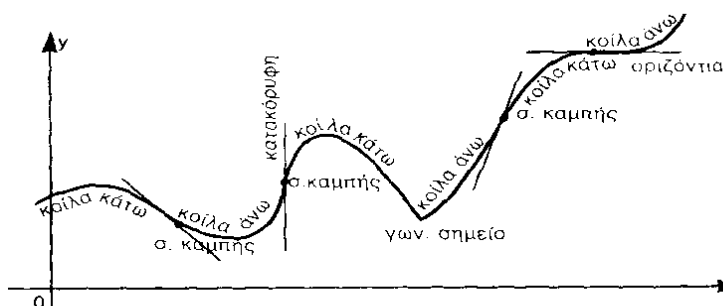
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΥΠΑΡΞΗΣ Σ.Καμπής-μέθοδος:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ δηλαδή αν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός $f'(x_0)$ ή είναι $\pm\infty$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Παρατηρήσεις- Προτάσεις

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ακόμη και να αλλάζει κυρτότητα η f εκατέρωθεν του x_0 , το $A(x_0, f(x_0))$ δεν είναι σημείο καμπής [γωνιακό σημείο]
- Αν $M(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f τότε είναι $f''(x_0)=0$ ή δεν υπάρχει $f''(x_0)$.
- Αν $f''(x_0) \neq 0$ (είναι διαφορετική από το μηδέν) τότε στο $A(x_0, f(x_0))$ δεν είναι σημείο καμπής $\rightarrow$ Γωνιακό σημείο (βλέπε παρακάτω σχήμα)
- Αν είναι ένα σημείο καμπής και κρίσιμο, δηλαδή $f'(x_0)=0$ τότε στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουμε οριζόντια εφαπτομένη.



Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ -(x-1)^4 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-(x-1)^4 + 1] = 1 = f(1).$$

Παραγωγισιμότητα

• Στο $x_0 = 1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \left(\frac{0}{0} \right)^{DHL} = 3 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)^4 + 1}{x - 1} \left(\frac{1}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-(x-1)^4 + 1] \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

, αφού το $x - 1 > 0$ όταν $x \rightarrow 1^+$

• Στο $(-\infty, 1)$ είναι: $f'(x) = 3x^2$, και στο $(1, +\infty)$ είναι: $f'(x) = -4(x-1)^3$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ -4(x-1)^3, & x > 1 \end{cases} \text{ και } f''(x) = \begin{cases} 6x, & x < 1 \\ -12(x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

• Στο $(-\infty, 1)$ είναι: $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ και $f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow x > 0$

• Στο $(1, +\infty)$ είναι: $f''(x) = 0 \Rightarrow -12(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (διπλή ρίζα) και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

	$f''(x) = 6x$			$f''(x) = -12(x-1)^2$	
x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f''	-	0	+	0	-
f	κοίλη 	Σ.Κ.	κυρτή 		κοίλη 

Πιθανές θέσεις των σημείων καμψής είναι τα σημεία 0 και 1.

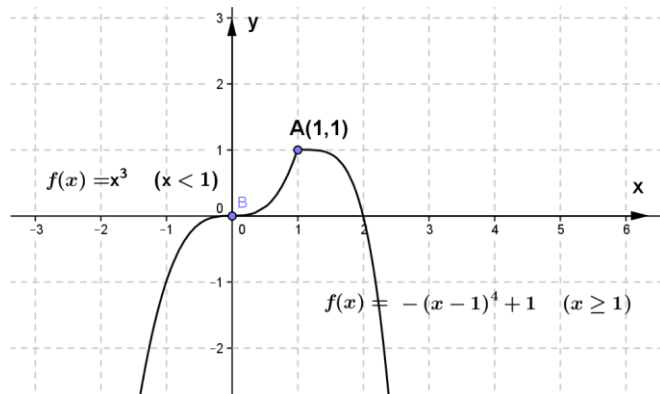
• Στο σημείο $x = 1$ όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, δεν είναι θέση σημείου καμψής, αφού στο $x=1$ δεν είναι παραγωγίσιμη η f αν και εκατέρωθεν του $x=1$ η f αλλάζει κυρτότητα.

• Το σημείο $x = 0$ είναι θέση σημείου καμψής, αφού

- στο $O(0,0)$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f δηλαδή υπάρχει ο $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ και η f στο 0 και

- αλλάζει κυρτότητα η f .

- Το 0 είναι εσωτερικό. Οπότε σ.κ. το $A(0, f(0)) = (0,0)$.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ -ΕΥΡΕΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΜΠΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για κυρτότητα:

α) Βρίσκουμε το Π.Ο. της f

β) Βρίσκουμε την f' και την f'' καθώς και το πεδίο ορισμού της

γ) Βρίσκουμε τις ρίζες της $f''(x) = 0$ και τα πρόσημα της f'' .

δ) Κάνω πίνακα με το πρόσημο της f'' , στον οποίο θα συμπληρώσουμε την κυρτότητα της f σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία χωρίζεται το Π.Ο της f από τις ρίζες της f'' , σύμφωνα με το θεώρημα:

1. Αν η $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ , δηλαδή η f' γν. αύξουσα στο Δ , τότε f **κυρτή** $\cup$ στο Δ .

2. Αν η $f''(x) < 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ , δηλαδή η f' γν. φθίνουσα στο Δ τότε η f **κοίλη** στο Δ .

Για σημείο καμπής:

ε) Αν σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ

- υπάρχει η εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ δηλαδή αν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός $f'(x_0)$ ή $\pm\infty$, και
- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι **σημείο καμπής**.

1. Α. Αν δεν μπορούμε να βρούμε ρίζες και πρόσημα της f''

1. → Θ. Rolle → για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$, με ξ_1, ξ_2 από Θ.Μ.Τ 2 φορές → για την f

2. → Σύνολο τιμών της f'' για πλήθος ριζών (Σύνολα τιμών σε κάθε υποδιάστημα χωριστά).

3. → Προφανής με δοκιμή και γν. μονότονη η f'' .

4. → Θεώρημα Bolzano για την f'' .

5 ► Ρίζες στη ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ $\varphi(x)$ με μία από τις 4 παραπάνω μεθόδους (συνήθως με Σ. ΤΙΜΩΝ), αν

$$f''(x) = \frac{\varphi(x)}{\theta(x)} \text{ ή } f''(x) = \varphi(x) \cdot \theta(x), \theta(x) > 0.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν θέλω ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ εκατέρωθεν των ριζών βρίσκω πρόσημα της f'' με ορισμό μονοτονίας της

Άσκηση-1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f'(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ (x-2)^4, & x \geq 1 \end{cases}$. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

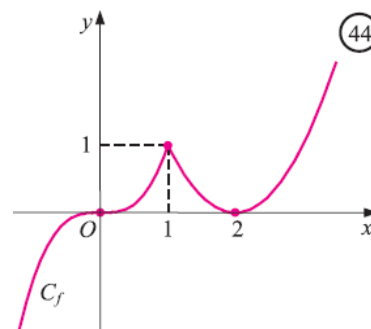
Λύση

Εύρεση f'

Στο $x_0 = 1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη, οπότε

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ 4(x-2)^3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Εύρεση f'' : $f''(x) = \begin{cases} 6x, & x < 1 \\ 12(x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$



Στο $(-\infty, 1)$ είναι:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ και } f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Στο $(1, +\infty)$ είναι:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 (\text{διπλή ρίζα}) \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty) - \{2\}$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	+	0	+
$f(x)$	κοίλη		κυρτή	κυρτή	κυρτή	

- Πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2.
- Στα σημεία $x = 1$ και $x = 2$ όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα,
- Στο σημείο $x = 0$ είναι θέση σημείου καμπής, αφού

1. στο $O(0,0)$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f δηλαδή υπάρχει ο $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ και η f στο 0 και

2. αλλάζει κυρτότητα η f .

Οπότε σ.κ. το $A(0, f(0)) = (0,0)$.

Άσκηση-2(άσκηση 3iii) σχολικού βιβλίου)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} -3x^2+1, & x < 0 \\ -x^3+3x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση

- Για κάθε $x < 0$ ισχύει $h'(x) = -6x$.
- Για κάθε $x > 0$ ισχύει $h'(x) = -3x^2 + 6x$
- Στο $x = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x^2 + 1 - 1}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3 + 3x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x(3 - x)) = 0.$$

Επομένως, η h παραγωγίζεται στο $x = 0$ με $h'(0) = 0$. Άρα

$$h'(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0 \\ -3x^2 + 6x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Για $x \neq 0$ έχουμε $h''(x) = \begin{cases} -6, & x < 0 \\ -6x + 6, & x > 0 \end{cases},$

οπότε

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Το πρόσημο της h'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h''(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	$-$
$h(x)$				

Δηλαδή, η h στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$ και προς τα άνω στο $[0, 1]$.

Επειδή το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h και $h'(0) = 0$, η C_h έχει εφαπτομένη στο σημείο $(0, 1)$ και επειδή η h'' εκατέρωθεν του 0 αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A(0, 1)$ είναι σημείο καμπής της C_h .

Επειδή η h'' μηδενίζεται στο 1 και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, το σημείο $B(1, 3)$ είναι σημείο καμπής της C_h .

- Αφού $h'(1) = -6 \cdot 1 + 6 = 0 \in \mathfrak{R}$, δηλαδή υπάρχει η εφαπτομένη στο 1 .

Άσκηση-3

Να προσδιορισθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

i) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) = 12(x-1)(x+1)$. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f''(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			0		0	
			Σ.K.		Σ.K.	

Επομένως, η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-1, 1]$.

Εύρεση Σ.Κ.

Επειδή f'' μηδενίζεται στα σημεία $-1, 1$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(1, 0)$ είναι σημεία καμπής της C_f .

2. ΜΗ ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΜΠΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ

- Υποθέτουμε ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 του πεδίου ορισμού της Δ το $A(x_0, f(x_0))$ και αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο Δ τότε από θεώρημα $f''(x_0) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση-4(Άσκηση 5-B' ΟΜΑΔΑΣ σχολ. βιβλίου)

Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$, για την οποία ισχύει : $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση: $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ (1)

Η $f(x)$ δυο φορές παραγωγίσιμη άρα παραγωγίζω και τα δυο μέλη της (1) και έχω : $(f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3)' = 0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0$ (2)

παραγωγίζω και τα δυο μέλη της (2) και έχω : $(2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x)' = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x) - 2f''(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) - 2f''(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 + f(x)f''(x) - f''(x) + 1 = 0$ (3). Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στη θέση x_0 , δηλ. το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής, και η f δυο φορές παραγωγίσιμη άρα ισχύει : $f''(x_0) = 0$, στην (3) για $x = x_0$ έχω :

$$(f'(x_0))^2 + f(x_0)f''(x_0) - f''(x_0) + 1 = 0 \stackrel{f''(x_0)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (f'(x_0))^2 + 1 = 0 \text{ που είναι άτοπο, άρα η } f \text{ δεν έχει σημεία καμπής.}$$

3. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ

Χρήση Θεωρήματος: Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ βρίσκουμε παραμέτρους και στο τέλος θα κάνουμε επαλήθευση.

Άσκηση-5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2 - x - 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $A = (0, +\infty)$. Να προσδιοριστούν οι αριθμοί α, β ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$ και η εφαπτομένη της c_f στο $x_1 = 2$ να είναι παράλληλη της ευθείας $\psi = -21x + 1$.

Λύση

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{\alpha}{x} - 2\beta x - 1 \quad \forall x \in (0, +\infty), \text{ και } f''(x) = -\frac{\alpha}{x^2} - 2\beta, D_f = \mathbb{R}^*$$

$$\text{Για να είναι το } M(1, f(1)) \text{ σημείο καμπής πρέπει } f''(1) = 0 \Leftrightarrow -\alpha - 2\beta = 0 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο } x_1 = 2 \text{ είναι } f'(2) = \frac{\alpha}{2} - 4\beta - 1 \text{ και } \lambda_\varepsilon = -21,$$

$$\text{άρα } \frac{\alpha}{2} - 4\beta - 1 = -21 \quad (2) \text{ Υπολογισμός των } \alpha, \beta \text{ λύση του } (\Sigma): \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - 8\beta = -40 \end{cases} \begin{matrix} \alpha = -8 \\ \beta = 4 \end{matrix}$$

Προσοχή! Για να είναι δεκτές οι τιμές των α, β πρέπει η f για τις τιμές αυτές να αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν στο 1.

$$\text{Πράγματι για } \alpha = -8 \text{ και } \beta = 4 \text{ η } f \text{ γίνεται: } f(x) = -8 \ln x - 4x^2 - x - 2 \text{ με } f''(x) = \frac{8}{x^2} - 8 = \frac{8(1-x^2)}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8(1-x^2)}{x^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1} \text{ ή } \boxed{x = 1} \text{ και}$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{8(1-x^2)}{x^2} > 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow \boxed{-1 < x < 1}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \boxed{x < -1 \text{ ή } x > 1}$$

Άρα, η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0, 1]$ και κάτω στο $[1, +\infty)$

$$\bullet \quad f'(x) = -8 \ln x - 4x^2 - x - 2 \Rightarrow f'(1) = -7, \text{ άρα έχει εφαπτομένη στο } x_0 = 1$$

$$\bullet \quad \text{Το } 1 \text{ εσωτερικό σημείο του } D_f$$

$$\bullet \quad \text{Η } f'' \text{ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του } 1$$

Άρα οι τιμές $\alpha = -8$ και $\beta = 4$ είναι δεκτές.

x	0	1	$+\infty$
f''		-	+
f		κοίλη $\cap$	κυρτή $\cup$

Άσκηση-6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{a^2 x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 3x + 1$ με a . Να προσδιοριστεί ο αριθμός a , ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$.

Λύση

Είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - a^2 x^2 + ax - 3, \text{ και } f''(x) = x^2 - 2a^2 x + a$$

Για να είναι το $M(1, f(1))$ σημείο καμπής πρέπει $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2a^2 + a = 0 \Rightarrow -2a^2 + a + 1 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9, \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha = 1} \text{ και η } f \text{ να αλλάζει κυρτότητα}$$

Για να είναι δεκτές οι τιμές του a πρέπει η f για τις τιμές αυτές να αλλάζει κυρτότητα στο $x_0 = 1$.

- Για $a=1$: $f''(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \succ 0$, για κάθε $x \neq 1$, οπότε η f δεν αλλάζει κυρτότητα και η τιμή $a=1$ απορρίπτεται.
- Για $a = -\frac{1}{2}$: $f''(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ με ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και 1 οπότε

$f''(x) = (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ και έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	$-1/2$		1	$+\infty$
f''	+	0	-	0	+
f	κυρτή 	Σ.Κ.	κοίλη 		κυρτή 

- $f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3$, άρα έχει εφαπτομένη στο $x_0 = 1$
- Το 1 εσωτερικό σημείο του D_f
- Η f'' αλλάζει πρόσημα εκατέρωθεν του 1

Άρα η τιμή $a = -\frac{1}{2}$ είναι δεκτή.

4. ΑΝΙΣΟΪΣΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$ ή $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$ και

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ: $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Με $y = f'(a)(x-a) + f(a) \rightarrow$ η εξίσωση εφαπτομένης

ΜΕΘΟΔΟΣ

- Για $f(x) \geq \psi \rightarrow$ δείχνουμε ότι η f είναι κυρτή και $y = f'(a)(x-a) + f(a) \rightarrow$ η εξίσωση εφαπτομένης [με εξαίρεση το x_0 για το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$].
- Για $f(x) \leq \psi \rightarrow$ δείχνουμε ότι η f είναι κοίλη και $y = f'(a)(x-a) + f(a) \rightarrow$ η εξίσωση εφαπτομένης [με εξαίρεση το x_0 για το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$].

Άσκηση-7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$.

- Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.
- Να δείξετε ότι $e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

- $f(x) = e^x - \ln x$, με $D_f = (0, +\infty)$, $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in D_f = (0, +\infty)$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ συνεπώς η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
- Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$, τότε $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = (e-1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = ex - e - x + 1 \Leftrightarrow y = ex - x + 1$
- Η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = ex - x + 1$, με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(1, f(1))$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει :
 $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq ex - x + 1 \Leftrightarrow e^x - \ln x \geq ex - x + 1 \Leftrightarrow e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$.

Άσκηση-8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

A. Να μελετηθεί ως προς την καμπυλότητα.

B. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

Γ. Να δείξετε ότι $\ln x \leq \frac{1}{x} + 2x - 3$, για κάθε $x > 0$.

Δ. Να λύσετε τις εξισώσεις $x^x e^{3x-2x^2-1} = 1$ και $f'(f(x) + 2x - 2) = -2$.

Λύση

A. Είναι $D_f = (0, +\infty)$ και $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, $x > 0$ (1). Επίσης $f'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$ (2). Άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

B. Από $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \Rightarrow f(1) = 1$ και από (1) $\Rightarrow f'(1) = -2$.

Εξίσωση εφαπτομένης ϵ της c_f στο $x_0 = -1$: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{y = -2x + 3}$.

Γ. Αφού η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ η γραφική της θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ϵ

(βασική πρόταση). Άρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \ln x \geq -2x + 3 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{x} + 2x - 3$. Το ϵ ισον ισχύει μόνο για το σημείο επαφής $x = 1$.

Δ. α) Είναι $x^x e^{3x-2x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \ln x = -2x + 3 \Leftrightarrow f(x) = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 1$, από γ. ερώτημα.

β) Είναι $f'(f(x) + 2x - 2) = -2 \Rightarrow f'(f(x) + 2x - 2) = f'(1) \Rightarrow \dots \Rightarrow f(x) = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 1$, από γ. ερώτημα

και είναι μοναδική αφού η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

5.ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ (ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ)

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ Θ.Μ.Τ.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Βήμα 1: Θ.Μ.Τ. για την f .

Βήμα 2: Χρήση ορισμού μονοτονίας για την f' (από κυρτότητα) ή

Βήμα 3: Θ. Rolle για την f .

Άσκηση-9

4) Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.

ii. $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$.

Λύση :

i. Αν $\alpha = \beta$, τότε $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\alpha) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \alpha}{2}\right) \Leftrightarrow 2f(\alpha) \geq 2f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(\alpha)$ όπου ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$ τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]$.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$

- f συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$

- f συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Όμως η f κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα :

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 &\stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \stackrel{\beta-\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Αν $\alpha > \beta$ η απόδειξη είναι ανάλογη.

Άρα για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει : $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ii. Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x, x+1]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x, x+1]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x). \text{ Όμως } \xi \in (x, x+1) \text{ άρα } \xi < x+1 \quad (1). \text{ Θα}$$

πρέπει να πάρω f' και στα δυο μέλη της (1), πρέπει όμως να γνωρίζω τη μονοτονία της f' . Όμως η f κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι η σχέση (1)

$$\text{θα γίνει : } (1) : \xi < x+1 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1).$$

Άσκηση-10

A. Να δείξετε ότι : $\ln x < x$ για κάθε $x > 0$.

B. Θεωρούμε συνάρτηση f κυρτή στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(\ln x) - f(x) > (\ln x - x)f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

A. Θέτουμε $g(x) = \ln x - x$ στο $(0, +\infty)$. Είναι $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Οπότε $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

x	0	1	$+\infty$
f'		+	-
f			

• Για $x < 1 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) < f(1) \Rightarrow \ln x - x < -1 < 0$.

• Για $x > 1 \xRightarrow{f \downarrow} f(x) < f(1) \Rightarrow \ln x - x < -1 < 0$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε : $\ln x < x$, για κάθε $x > 0$.

B. Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\ln x, x]$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\ln x, x)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\ln x) - f(x)}{\ln x - x} \quad (1).$$

Αλλά $\xi \in (\ln x, x) \Rightarrow \ln x < \xi < x$ (με f κυρτή, άρα $f'' \leq 0$) $\Rightarrow f'(\ln x) < f'(\xi) < f'(x)$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \cancel{f'(\ln x)} < \frac{f(\ln x) - f(x)}{\ln x - x} < f'(x) \quad \xRightarrow{\ln x - x < 0} f(\ln x) - f(x) > f'(x)(\ln x - x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

6. ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΜΠΗΣ

Μέθοδοι:

1. → 2 φορές Θ.Μ.Τ → για την f - και 1 φορά Θ. Rolle → για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$, με ξ_1, ξ_2 από ΘΜΤ

2. → Σύνολο τιμών της f'' για πλήθος ριζών (Σύνολο τιμών σε κάθε υποδιάστημα χωριστά).

3. → Προφανής με δοκιμή και γν. μονότονη η f'' .

4. → Θεώρημα Bolzano για την f'' (συνήθως για μία ρίζα).

5 ► Ρίζες στη ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ $\varphi(x)$ με μία από τις 4 παραπάνω μεθόδους (συνήθως με Σ. ΤΙΜΩΝ), αν

$$f''(x) = \frac{\varphi(x)}{\theta(x)} \text{ ή } f''(x) = \varphi(x) \cdot \theta(x), \theta(x) > 0.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν θέλω ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ εκατέρωθεν των ριζών βρίσκω πρόσημα της f'' με ορισμό μονοτονίας της

Άσκηση-11

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - x)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δύο ακριβώς σημεία καμπής.

Λύση

Καταρχάς από $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$ (εφ. Σχ. Βιβλίου) και είναι $x - 1 < x$ θα είναι

$\ln x < x$, για κάθε $x > 0$ (1), Οπότε αντικαθιστώ όπου $x = e^x > 0$ στην (1) και έχω:

$$\ln e^x < e^x \Leftrightarrow x < e^x \Leftrightarrow e^x - x > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι $D_f = (-\infty, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ και

$$f''(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} \quad (1)$$

Για να δείξω ότι η $f(x)$ έχει δύο ακριβώς σ.κ., αρκεί να δείξω ότι η $f''(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 , υπάρχει η εφαπτομένη σ' αυτά και εκατέρωθεν αυτών αλλάζει πρόσημο η f'' .

$$f''(x) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} = 0 \Rightarrow \underline{2e^x - xe^x - 1 = 0}. \text{ Δεν μπορούμε να βρούμε ρίζες και}$$

πρόσημα της f'' , άρα Θέτουμε $g(x) = 2e^x - xe^x - 1$, οπότε η $f''(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2} \quad (2).$

Συνεπώς οι ρίζες και τα πρόσημα της g θα είναι και της f'' .

ΕΥΡΕΣΗ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $g(x) = 0$

- Από $g(x) = 2e^x - xe^x - 1 \Rightarrow g'(x) = 2e^x - e^x - xe^x \Rightarrow \boxed{g'(x) = e^x(1-x)}$.
- $g'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$ και $g'(x) > 0 \Rightarrow e^x(1-x) > 0 \Rightarrow x < 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'	+	0	-
g	-1	$\boxed{e-1}$ O.M.	$-\infty$

- Είναι g συνεχής στο $(-\infty, 1]$ με $g'(x) > 0$ στο διάστημα $(-\infty, 1)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$.
- Είναι g συνεχής στο $[1, +\infty)$ με $g'(x) < 0$ στο διάστημα $(-\infty, 1)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στα $[1, +\infty)$

Σύνολο τιμών της g

Για το $A_1 = (-\infty, 1]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = 0 - 0 - 1 = -1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DHL}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 \text{ και } g(1) = e - 1 \text{ και } g$$

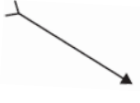
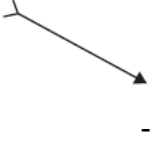
συνεχής οπότε $g(A_1) = (-1, e - 1]$, με $0 \in g(A_1) = (-1, e - 1]$ και η g γν. μονότονη στο $A_1 = (-\infty, 1]$: άρα η $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_1 \in (-\infty, 1]$ τ.ω. $\boxed{g(x_1) = 0}$ (3).

Για το $A_2 = [1, +\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(2-x) - 1] = +\infty(2 - \infty) - 1 = -\infty, \text{ και } g(1) = e - 1 \text{ και}$$

συνεχής, οπότε $g(A_2) = (-\infty, e - 1]$, με $0 \in g(A_2) = (-\infty, e - 1]$ και η g γν. μονότονη στο $A_2 = [1, +\infty)$: άρα η $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_2 \in [1, +\infty)$ τ.ω. $\boxed{g(x_2) = 0}$ (4).

Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	x_1		1		x_2	$-\infty$
g'	+		+		-		-
g	-1 	0		$e-1$ Ο.Μ.		0	
Πρόσημο των g και f''	-	0	+		+	0	-
f	κοίλη 	Σ.Κ.	κυρτή 		κυρτή 	Σ.Κ.	κοίλη 

ΤΕΛΙΚΑ:

- Στο διάστημα $(-\infty, 1)$:

$$\text{▪ Av } x < x_1 \xrightarrow{g \text{ γν.αύξουσα}} \Leftrightarrow g(x) < g(x_1) \Leftrightarrow g(x) < 0 \xrightarrow{(2)} \boxed{f''(x) < 0}$$

$$\text{▪ Av } x > x_1 \xrightarrow{g \text{ γν.αύξουσα}} \Leftrightarrow g(x) > g(x_1) \Leftrightarrow g(x) > 0 \xrightarrow{(2)} \boxed{f''(x) > 0}$$

- Στο διάστημα $(1, +\infty)$:

$$\text{▪ Av } x < x_2 \xrightarrow{g \text{ γν.φθίνουσα}} \Leftrightarrow g(x) > g(x_2) \Leftrightarrow g(x) > 0 \xrightarrow{(2)} \boxed{f''(x) > 0}$$

$$\text{▪ Av } x > x_2 \xrightarrow{g \text{ γν.φθίνουσα}} \Leftrightarrow g(x) < g(x_2) \Leftrightarrow g(x) < 0 \xrightarrow{(2)} \boxed{f''(x) < 0}$$

Επίσης υπάρχουν οι $f'(x_1), f'(x_2)$ δηλαδή οι εφαπτομένες γιατί η f είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$.

Συνεπώς όπως φαίνεται και στον πίνακα μεταβολών η f παρουσιάζει ακριβώς δύο σημεία καμπής, στο x_1 και στο x_2 .

7. ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΗΣ C_f ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ (η)

Μέθοδος:

Έστω συνάρτηση f κυρτή σε διάστημα Δ και έστω ευθεία (ε) :

$$y = f'(x_0)x + \beta \Leftrightarrow f'(x_0)x - y + \beta = 0$$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$ της εφαπτομένης (ζ) της C_f που είναι παράλληλη της δοσμένης (ε) .

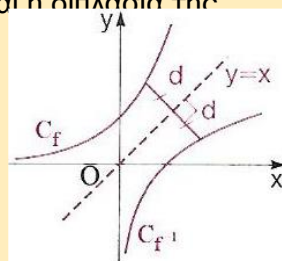
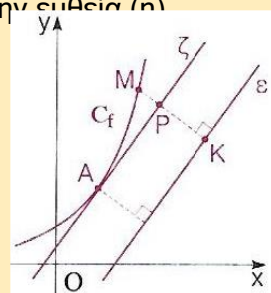
Βήμα 2: Το $A(x_0, f(x_0))$ είναι το πλησιέστερο σημείο της C_f προς την ευθεία (ε) .

Βήμα 3: $d_{\min} = d(A, \varepsilon) = \frac{|f'(x_0)x_0 - f(x_0) + \beta|}{\sqrt{(f'(x_0))^2 + 1}}$.

Ελάχιστη απόσταση C_f και $C_{f^{-1}}$

Αν η αντιστρέφεται τότε η ελάχιστη απόσταση των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι η διπλάσια της απόστασης της C_f από τη διχοτόμο $y = x$.

► Ομοίως και αν κοίλη σε διάστημα Δ .



Άσκηση-12

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

A. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f από τη διχοτόμο $(\delta): y = x$, καθώς και την ελάχιστη αυτή απόσταση.

B. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1} .

Γ. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των σημείων των C_f και $C_{f^{-1}}$

Λύση

A. Η έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$, με $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ και $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η f είναι κοίλη σε όλο το $A = (0, +\infty)$ και δεν τέμνεται από την C_f .

Η εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής $A(x_o, f(x_o))$ της C_f με (δ) $: y = x$ θα έχει

$$\lambda = 1 \Rightarrow f'(x_o) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x_o} = 1 \Rightarrow x_o = 1 \text{ και } f(1) = \ln 1 = 0. \text{ Άρα το ζητούμενο σημείο είναι}$$

το $A(1,0)$. Η ελάχιστη απόσταση του $A(1,0)$ από την (δ) $: y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ είναι

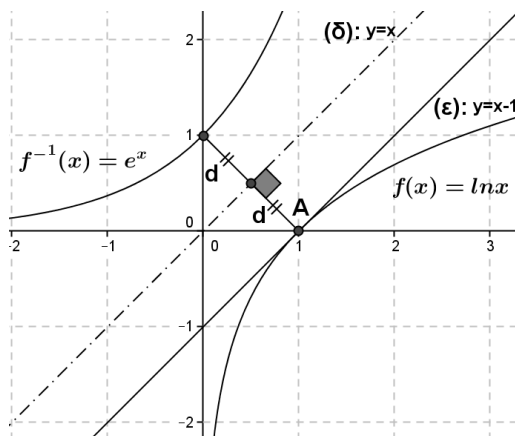
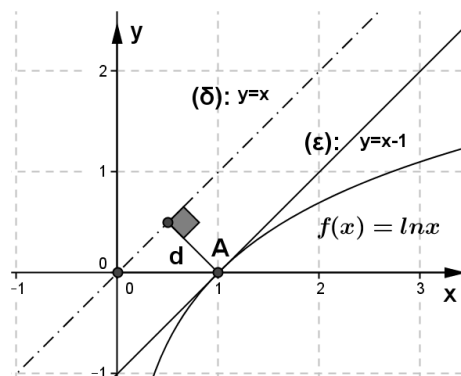
$$d(A, \delta) = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Β. Επειδή $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, άρα γνησίως μονότονη, οπότε «1-1» και συνεπώς αντιστρέφεται.

$$\text{Είναι } y = f(x) \Rightarrow y = \ln x \Rightarrow x = e^y \Rightarrow y^{-1} = e^x \text{ ή } \underline{f^{-1}(x) = e^x} \text{ με } D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$$

Γ. Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο (δ) $: y = x$, άρα η μεταξύ τους ελάχιστη απόσταση θα είναι

$$D(C_f, C_{f^{-1}}) = 2d(A, \delta) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

152. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ έχει τρία σημεία καμψής που είναι συνευθειακά.
153. (α) Αν μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα A και $x_0 \in A$ με $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμψή στο x_0 .
(β) Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν για κάθε $x, x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $x \neq x_0$ είναι $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$, τότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο (α, β) .
154. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + \gamma x - 1$ να έχει σημείο καμψής το $A(1, -2)$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 2$ να είναι παράλληλη της ευθείας $3x - y + 5 = 0$.
155. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2$.
α] Να δείξετε ότι η γραφική της f έχει σημείο καμψής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β] Να βρεθεί ο λ ώστε η γραφική της f να έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο καμψής της.
γ] Να βρεθεί ο λ ώστε το σ.κ. να είναι σημείο του άξονα $\psi\psi$.
156. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha \neq 0$. Αν x_1, x_2 ρίζες της $f'(x) = 0$ και $x_1 \neq x_2$ να δείξετε ότι $f''(x_1) + f''(x_2) = 0$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την ισότητα.
157. Αν $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα τη συνάρτηση $g \circ f$. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμψής αν υπάρχουν.
158. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $A \subseteq (0, +\infty)$ με $f'(x) > 0$.
Α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x), x \in A$ στρέφει τα κοίλα άνω, αν και μόνο αν ισχύει: $f(x) f''(x) \geq [f'(x)]^2$ για κάθε $x \in A$.
Β. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.
159. α] Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν: $f'''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f''(0) = 0$, να δειχτεί ότι το σημείο $A(0, f(0))$ είναι σημείο καμψής της γραφικής της f .
β] Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(x) = [f(x)]^2$. Αν οι f, g παρουσιάζουν καμψή στο σημείο x_0 , τότε είναι $f'(x_0) = 0$.
160. Έστω η συνάρτηση $f(x) = f(x) = \ln\left(\frac{2}{\sin x}\right) - \frac{x^2}{2}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
(α) Να αποδειχθεί ότι η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
(β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τη κοιλότητα στο πεδίο ορισμού της.
(γ) Να αποδειχθεί ότι: $\ln\left(\frac{2}{\sin x}\right) - \frac{x^2}{2} \geq \ln 2$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.
161. Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) + f(x)(x-8) + x^2 = 0$. Να δειχτεί ότι η γραφική της f δεν έχει σημείο καμψής.
162. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x) = \ln f(x) = \left(\frac{\alpha^x + \beta^x}{2}\right)$ με $x \in \mathfrak{R}, \alpha, \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$. Να δειχτεί ότι:
i) Η f είναι κυρτή. ii) Αν $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha\beta = e^2$.
163. Αν $2f(x) + f(-x) = x^2 + 2x + 3 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$ (1), να δειχτεί ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω απ' την C_f .
164. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ell n x - x$.
Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.
Β. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = \frac{1}{x}$.
Γ. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f από την ευθεία $(\eta): y = -x - 1$, καθώς και την

ελάχιστη αυτή απόσταση.

165. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 , τότε δεν μπορεί να έχει στο x_0 ακρότατο.

166. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη και με τα κοίλα άνω στο $[\alpha, \beta]$. Ναδειχτεί ότι

$$f(x) - f(\alpha) < f'(\beta)(x - \alpha) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta).$$

167. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[\alpha, \beta]$.

A. Ναδειχτεί ότι $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

B. Θεωρούμε συνάρτηση g δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(x) > 0$ και $g''(x) \cdot g(x) - (g'(x))^2 > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ναδειχτούν ότι:

B.1. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα

B.2. $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

168. Θεωρούμε συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη με $(x+1)f'(x) = (e^x - 1)f^2(x) + x$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ναδειχτεί ότι η f έχει μοναδικό σ. καμπής, το οποίο και να βρεθεί.

169. Θεωρούμε συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη με $[f''(x)]^2 + f'(x) = \eta\mu^2 x + e^{-x} - x$, για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ναδειχτεί ότι η f δεν έχει σ. καμπής.

170. Θεωρούμε συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν επιπλέον ισχύει $f'(x) + f(x) = 5x$ για κάθε $x \in [0, 1]$, να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0, 1]$.

171. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x - \frac{1}{x} + 2$.

A. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

B. Να βρείτε την εφαπτομένη ϵ της C_f στο $x_0 = 1$.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $X^x < e^{2x^2 - 3x + 1}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$, $a > 0$ έχει μοναδική λύση.

E. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f από την ευθεία $x - y - 2016 = 0$.

Z. Να δείξετε ότι $\ln x + \frac{1}{x} \leq 1$ στο $(0, +\infty)$.

172. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f'(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή.

Να αποδείξετε ότι:

A. $f(2x) - f(x) < xf'(2x)$, για κάθε $x > 0$.

B. Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(2x) - f(x)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Γ. Η εξίσωση $\frac{f(2b) - f(b) - bf'(2b)}{x - 2} - \frac{e^b - 1}{x - 1} = 0$, έχει μοναδική λύση στο $(1, 2)$.

173. Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln^2 x - x \ln x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς σημείο

καμπής $A(x_0, f(x_0))$ της C_f με $x_0 \in (1, 2)$.

174. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδειχτεί ότι η $f(0) = 0$.

B. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

Δ. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) \leq f(x) \leq \frac{x}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi(0, 2)$ τ.ω. $2f(\xi) = (\xi - 1)\sqrt{e^\xi}$.