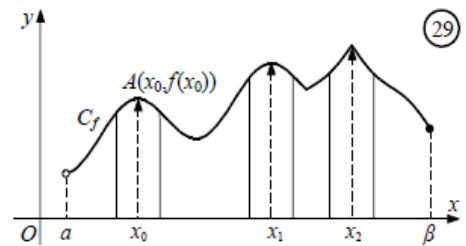


2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ_1

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

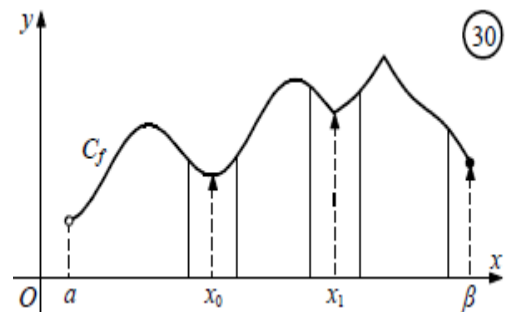
$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
- Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .



ΟΡΙΣΜΟΣ_2

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
- Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f** .



Θυμόμαστε:

- Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.
- Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_0)$.

Παρατηρήσεις-Σχόλια

1. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

- Αν f γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $f(\alpha) \Rightarrow$ ελάχιστο και $f(\beta) \Rightarrow$ μέγιστο
- Αν f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $f(\alpha) \Rightarrow$ μέγιστο και $f(\beta) \Rightarrow$ ελάχιστο

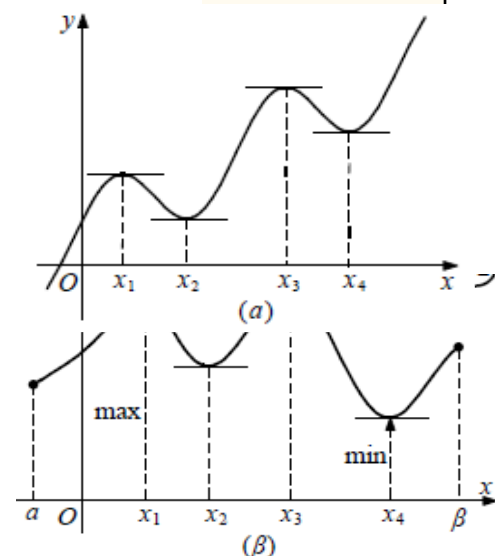
2. Το ολικό ακρότατο είναι και τοπικό, το αντίστροφο δεν ισχύει.

3. Ένα τοπικό μέγιστο ίσως είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (θέσεις x_1, x_4 στο σχήμα_α).

4. Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. [κοιτάζουμε και τα όρια]
 Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης. [κοιτάζουμε και τα όρια] (σχήμα_32.α).

5. Το ολικό μέγιστο είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ το ολικό ελάχιστο είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα (σχήμα_32.β)

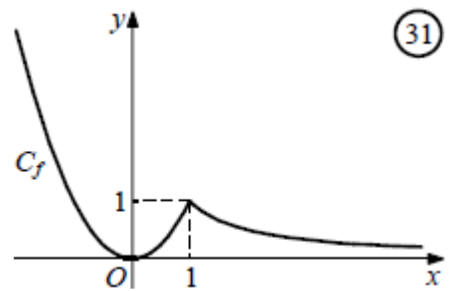
σχήμα 32



Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ παρουσιάζει:

- i) στο $x = 0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο και
- ii) στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$, εντούτοις δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.



ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Παρατηρούμε στο σχήμα 32_β ότι

- αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και
- επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό,
- τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στον άξονα, δηλαδή ισχύει $f'(x_0) = 0$.
- Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Fermat**.

Θεώρημα Fermat

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .
- Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και
- είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και } f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1).$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Επομένως,}$$

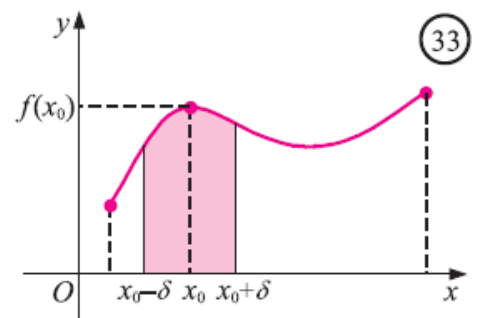
– αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τα, δηλαδή $x - x_0 < 0$ τότε, λόγω της (1),

θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε και

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2).$$

– αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3). \text{ Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε } f'(x_0) = 0.$$

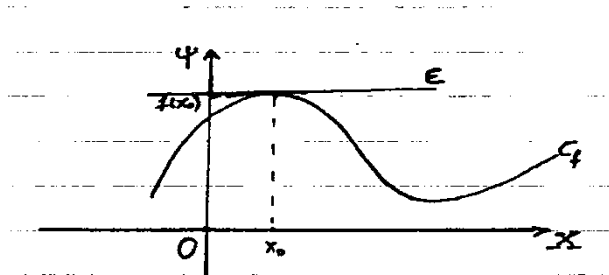


- Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

Γεωμετρική ερμηνεία Θ. Fermat:

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (a, \beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

▷ $M(x_0, f(x_0)) \rightarrow$ **Στάσιμο Σημείο** αν $f'(x_0) = 0$.



Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

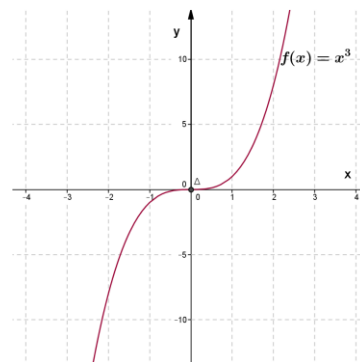
Ισχυρισμός-Αντιπαράδειγμα

Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ , παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό x_0 σημείο του Δ και ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 .

Απάντηση: Είναι λάθος.

Αντιπαράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία έχει στο $x_0 = 0$ το $f'(0) = 0$ και όμως το $f(0) = 0$ δεν είναι ακρότατο



Σημείωση:

Δεν είναι ικανή συνθήκη το $f'(x_0) = 0$ για να έχουμε ακρότατο.

Πρέπει να έχουμε και αλλαγή προσήμου της f' εκατέρωθεν του x_0 , δηλαδή αλλαγή μονοτονίας της f .

Παρατηρήσεις-Σχόλια

1. Το x_0 πρέπει να είναι σημείο ανοικτού διαστήματος
2. Το θεώρημα Fermat αναφέρεται στο εσωτερικό σημείο του A_f . Αν x_0 άκρο του διαστήματος A ενδέχεται να είναι $f'(x_0) \neq 0$.

Κρίσιμα σημεία

1. Τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται ($f'(x_0) = 0$) $\rightarrow$ στάσιμα
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

Πιθανές θέσεις ακρότατων

A. Τα άκρα διαστήματος Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού)

B. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται "στάσιμα σημεία"

Γ. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται

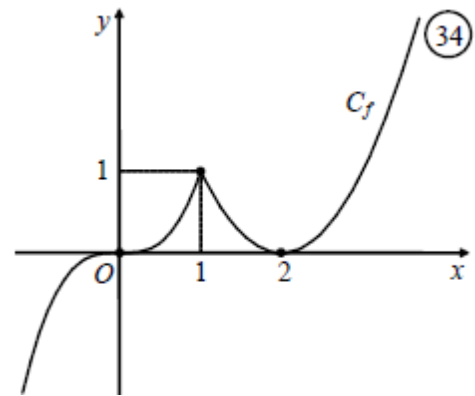
Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < 1 \\ (x-2)^2 & , x \geq 1 \end{cases}$ παρουσιάζει:

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη σε όλο το

$$\mathbb{R} - \{1\} \text{ με: } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < 1 \\ 2(x-2) & , x \geq 1 \end{cases}$$

Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι οι αριθμοί : 0 και 2.



x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
f				T.M.		T.E.	

➤ Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2.

➤ Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων,

➤ ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

Άρα :

Δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

Θεώρημα: (1^ο Κριτήριο τοπικών ακροτάτων)

Έστω f συνεχής στο $A = (\alpha, \beta)$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (Σχ. 35γ).

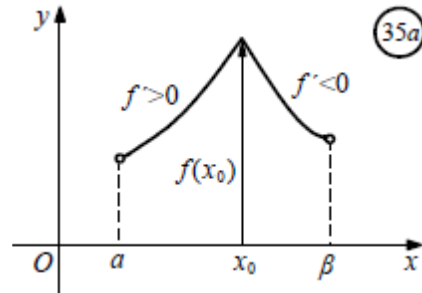
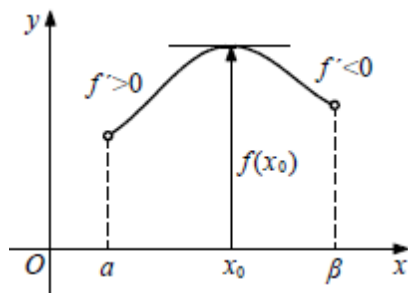
Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε: $x < x_0 \Rightarrow \underline{f(x) \leq f(x_0)}$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ (1).

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$.

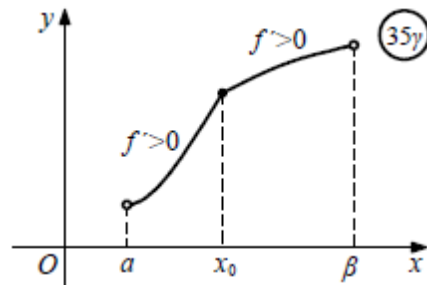
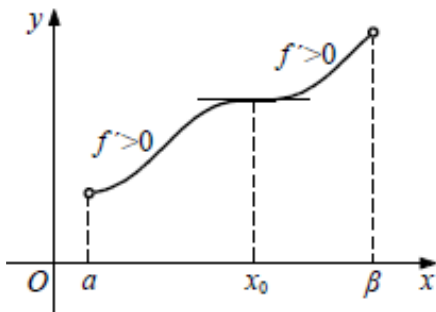
Έτσι έχουμε: $x > x_0 \Rightarrow \underline{f(x) \leq f(x_0)}$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2).



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής. ■

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii)) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0)$ και $x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_0) < f(x_2)$.

Επειδή είναι γν. αύξουσα.

Τελικά $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα $f(x_0)$ το δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

– Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

– Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Παρατηρήσεις-Σχόλια

1. Τελικά για να έχουμε ακρότατο σε σημείο x_0 , πρέπει να έχουμε αλλαγή μονοτονίας της συνάρτησης στο x_0 .
2. Το θεώρημα ισχύει και αν $\alpha = -\infty$ ή $\beta = +\infty$.
3. Ακόμη κι αν δεν υπάρχει $f'(x_0)$ αλλά η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 \in A_f$, το θεώρημα ισχύει.

Γενικά: πρώτα μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. ΕΥΡΕΣΗ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

1. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού D_f
2. Βρίσκουμε την $f'(x)$
3. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$
4. Λύνουμε τις ην ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$, βρίσκοντας έτσι το πρόσημο της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της $f'(x) = 0$.
5. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f , στον οποίο να περιέχονται το πεδίο ορισμού της f και οι ρίζες της $f'(x) = 0$.
6. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας ως εξής:
 - Αν $f'(x) > 0$ τότε η f γνησίως αύξουσα
 - Αν $f'(x) < 0$ τότε η f γνησίως φθίνουσα
7. Βρίσκουμε τις τιμές της f στα άκρα αν το D_f είναι κλειστό διάστημα.

Συνεπώς τα ακρότατα της είναι στα εξής σημεία:

- Στα άκρα του D_f είναι κλειστό διάστημα..
- Στα σημεία x_0 όπου $f'(x_0) = 0$ ή δεν υπάρχει ο παράγωγος $f'(x_0)$, αρκεί να έχουμε αλλαγή μονοτονίας εκατέρωθεν των σημείων x_0 (κρίσιμα σημεία).

Προσοχή! Για να χαρακτηρίσουμε ολικά ακρότατα ελέγχουμε και τα όρια.

Άσκηση-1

Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^4 - 4x^3$ ii) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$, $x \in [0, 5]$ και iii) $f(x) = xe^x$.

Λύση

i) Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ (1).

Ρίζες της f' :

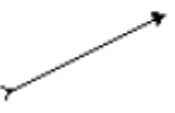
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow \underline{x=0} \text{ (διπλή ρίζα)} \text{ ή } \underline{x=3}$$

Το πρόσημο της f' :

$$\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow 4x^2(x - 3) > 0 (4x^2 > 0 \text{ για } \forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \underline{x > 3}.$$

Ανάλογα $\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow \dots \underline{x < 3}}$

Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f				Ο.Ε.	

Μονοτονία της f

- Είναι f συνεχής στο $(-\infty, 3]$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 3)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.
- Είναι f συνεχής στο $[3, +\infty)$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

Ακρότατα της f

➤ Η f έχει μόνο ένα τοπικό ελάχιστο για $x=3$ το $f(3)=3^4 - 4 \cdot 3^3 = 0$ το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο.

ii) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$ στο $[0, 5]$

Η f είναι και παραγωγίσιμη στο με $[0, 5]$ με $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$ (1).

Ρίζες της f' :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 5x + 4) = 0 \Rightarrow \underline{x=1} \text{ ή } \underline{x=4} \text{ (κρίσιμα σημεία)}$$

Το πρόσημο της f' :

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ ή } x > 4.$$

$$\text{Ανάλογα } f'(x) < 0 \Rightarrow \dots \underline{1 < x < 4}$$

Πίνακας μεταβολών:

x	0	.	1	.	4	.	5
f'		+	0	-	0	+	
f	19 T.E		30 O.M.		3 O.E.		14 T.M

Μονοτονία της f

- Είναι f συνεχής στο $[0, 1]$ και στο $[4, 5]$ με $f'(x) > 0$ στα διαστήματα $(0, 1)$, $(4, 5)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[0, 1]$ και $[4, 5]$.
- Είναι f συνεχής στο $[1, 4]$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 4]$.

Ακρότατα της f

➤ Η f έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=19$ και $f(4)=3$ το οποίο είναι ολικό ελάχιστο και τοπικά μέγιστα $f(1)=30$ (ολικό μέγιστο) και $f(5)=14$.

iii. $f(x) = xe^x$, $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + xe^x$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow \overset{e^x > 0}{1+x = 0} \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$)

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x > 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) > 0 \Leftrightarrow \overset{e^x > 0}{1+x > 0} \Leftrightarrow x > -1$$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x < 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) < 0 \Leftrightarrow \overset{e^x > 0}{1+x < 0} \Leftrightarrow x < -1$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πίνακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πίνακάκι :

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, -1)$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [-1, +\infty)$

Η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = -1$, το $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

Άσκηση -2(Εφαρμογή 1 σελ.147)

Να βρείτε τον αριθμό $x \in [0, 3]$ έτσι ώστε το ορθογώνιο του διπλανού σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδόν, το οποίο και να υπολογίσετε.

Λύση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E(x) = (AB)(AD) = xf(x), \text{ αφού } xf(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow E(x) = 2x(3 - x^2) \Rightarrow E(x) = -2x^3 + 6x, \text{ με } x \geq 0.$$

$$\text{Έχουμε } \Rightarrow E'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x-1)(x+1)$$

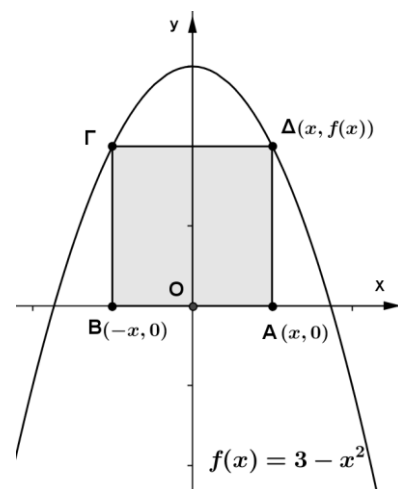
Είναι

$$\Rightarrow E'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow -6(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \underline{x = -1} \text{ ή } \underline{x = 1}$$

$$E'(x) < 0 \Rightarrow \underline{x < -1} \text{ ή } \underline{x > 1} \text{ και } E'(x) > 0 \Rightarrow \underline{-1 < x < 1}$$

Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	-1	$+$	0		1		$\sqrt{3}$
f'	$-$		$+$		$+$	0	$-$	
f				0 min.	$\nearrow$	4 max	$\searrow$	0 min



- Είναι f συνεχής στο $[0,1]$ με $f'(x) > 0$ στο διάστημα $(0,1)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[0,1]$.
- Είναι f συνεχής στο $[1,\sqrt{3}]$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,\sqrt{3})$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,\sqrt{3}]$.

Ακρότατα της f

- Η f έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=0$ και $f(\sqrt{3})=0$ είναι και ολικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο $f(1)=4$ (ολικό μέγιστο) .
- Άρα το ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν για $x=1$ το $E(1)=4$

2. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΝΙΣΟΪΣΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(x) \geq a$ ή $f(x) \leq a$

Μέθοδος: → με ακρότατα

Αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός a είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f ή μέγιστη αντίστοιχα.

ΓΕΝΙΚΑ:

Αν θέλω να αποδείξω ότι ισχύει μια ανισότητα της μορφής $f(x) \geq g(x)$:

1^{ov} Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

2^{ov} Θεωρούμε το πρώτο μέλος συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$

3^{ov} Βρίσκω τη μονοτονία της $h(x)$ και την εφαρμόζω στο αντίστοιχο διάστημα ώστε να αποδειχθεί η ανίσωση ή

3^{ov} Βρίσκουμε το ολικό μέγιστο ή ελάχιστο της $h(x)$

Άσκηση-3

A. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

B. Να δείξετε ότι $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Γ. Να αποδείξετε ότι $2^e \leq e^2$

Λύση

A. Το πεδίο ορισμού είναι $A_f = (0, +\infty)$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f(x) = \frac{(\ln x)' x - \ln x (x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ και } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\dots f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

x	0		e	$+\infty$
$1 - \ln x$	/	+	0	+
x^2	/	+		+
f'	/	+	0	+
f	/		1/e O.M.	

Άρα, η f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$

Στο $x_0 = e$ έχει ολικό μέγιστο $f(e) = \frac{1}{e}$

Β. $f(e) = \frac{1}{e}$ ολικό μέγιστο από ορισμό $f(x) \leq f(e)$ για $\forall x(0, +\infty) \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, +\infty)$ (1).

Γ. Οπότε για $x = 2$ η (1) γίνεται: $\frac{\ln 2}{2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow e \cdot \ln 2 \leq 1 \cdot 2 \Leftrightarrow \ln 2^e \leq \ln e \cdot 2 \Leftrightarrow \ln 2^e \leq \ln e^2 \Leftrightarrow 2^e \leq e^2$,
αφού $f(x) = \ln x$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

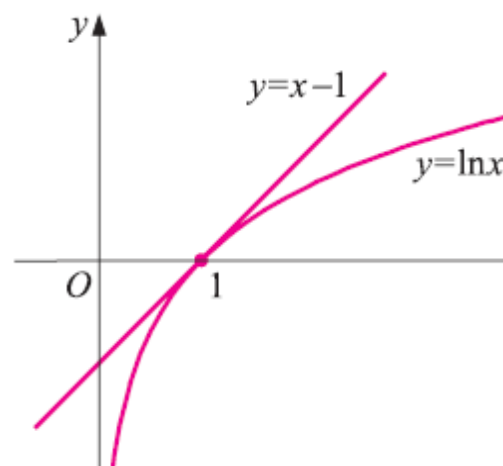
Άσκηση-4(Εφαρμογή-2 σχολ.βιβλ. σελ.148)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$.

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$. → απέξω

Λύση



i) Έχουμε $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, x \in (0, +\infty)$. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x = 1$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

ii) Επειδή η f για $x = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq x - 1.$$

Άσκηση-5

Να αποδείξετε ότι :

i) $\ln x < x$, για κάθε $x > 0$ ii) $e^x > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ iii) $e^x > \eta \mu x$, για κάθε $x > 0$

Λύση

- i. Είναι $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$. Επίσης $x-1 < x$ για κάθε $x > 0$, τελικά : $\ln x < x$ για κάθε $x > 0$
- ii. Είναι $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε : $\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και το "=" ισχύει μόνο για $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Άρα $e^x > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (καθώς $x+1 > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)
- iii) Είναι $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$. Άρα $\ln x < x \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^x \Leftrightarrow x < e^x$, $x > 0$
Επίσης γνωρίζουμε ότι : $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$
Άρα για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Rightarrow \eta\mu x < x$
Τελικά για κάθε $x > 0$ είναι : $\left. \begin{matrix} x < e^x \\ \eta\mu x < x \end{matrix} \right\} \Rightarrow e^x > \eta\mu x$.

3. ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μέθοδος:

- Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας $A_1, A_2, \dots$ του πεδίου ορισμού D_f της f .
- Βρίσκουμε τις τιμές της στα άκρα αν έχουμε κλειστά διαστήματα ή τα όρια αν έχουμε ανοικτά διαστήματα
- Βρίσκουμε τα ακρότατα
- Έχουμε έτσι τα αντίστοιχα σύνολα τιμών $f(A_1), f(A_2), \dots$
- Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι η ένωση όλων των $f(A_1), f(A_2), \dots$ που βρήκαμε για κάθε διάστημα χωριστά.

ΕΙΔΙΚΑ

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο πεδίο ορισμού της A . Τότε με τη βοήθεια μονοτονίας, ακροτάτων και ορίων μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της.

3.1. Αν $A = (\alpha, \beta)^*$

x	α	β
f		

$$\text{τότε } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right) = (\kappa, \lambda)$$

3.2. $A = (\alpha, \beta)$ και

x	α	β
f		

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \kappa, \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \lambda \rightarrow f(A) = (\lambda, \kappa)$$

3.3. $A = [\alpha, \beta]$ και f γνησίως αύξουσα τότε $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)]$

3.4. $A = [\alpha, \beta]$ και f γνησίως φθίνουσα τότε $f(A) = [f(\beta), f(\alpha)]$

* Ισχύει το ίδιο αν στη θέση των α, β είναι $\pm\infty$.

Άσκηση-6

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ όταν:

- α) $x \in \mathbb{R}$ β) $x \in [-1, 8]$

Λύση

α) $D_f = (-\infty, +\infty)$ και η f μετασχηματίζεται ως εξής: $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = |x|^{2/3} = \begin{cases} (-x)^{2/3} & , x < 0 \\ x^{2/3} & , x \geq 0 \end{cases}$.

Είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ σαν άρρητη.

Για $x=0$ είναι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, άρα συνεχής στο 0.

Επίσης είναι :

➤ Αν $x < 0$ τότε $f'(x) = ((-x)^{2/3})' = \frac{2}{3}(-x)^{-1/3}(-x)' = -\frac{2}{3}(-x)^{-1/3}$.

➤ Αν $x > 0$ τότε $f'(x) = (x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

➤ Αν $x = 0$ τότε:

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{(-x)^{2/3}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-1}{(-x)^{1/3}} \right) = -\infty$, και

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^{2/3}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^{1/3}} \right) = +\infty$, οπότε δεν υπάρχει ο $f'(0)$.

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^{-1/3} & , x > 0 \\ -\frac{2}{3}x^{-1/3} & , x < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-		+
f	$+\infty$ ↘	0 O.E.	↗ $+\infty$

Είναι:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^{2/3}) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} = +\infty$ και $f(0) = \sqrt[3]{0^2} = 0$.

Άρα $f(A) = [0, +\infty)$

β) Αν $A = [-1, 8]$ είναι : $f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$, $f(0) = 0$ και $f(8) = \sqrt[3]{8^2} = 4$. Συνεπώς, $f(A) = [0, 4]$.

4. ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $f(x)=0$

Μέθοδος:

1. ΜΕ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της f (για 2 ή περισσότερες)

→Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας $A_1, A_2, \dots$ του πεδίου ορισμού της D_f και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών $f(A_1), f(A_2), \dots$ χωριστά και ελέγχουμε αν το $0 \in f(A_i)$ με $i=1, 2, \dots$ και κάνουμε χρήση γνησίως μονότονης για μοναδικότητα ρίζας.

ΕΙΔΙΚΑ:

1. Αν $0 \in f(A_i)$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα .

2. Αν $0 \notin f(A_i)$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει καμία ρίζα .

Ομοίως για ρίζες της $f(x)=\kappa$

1. Αν $\kappa \in f(A_i)$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει ακριβώς μία ρίζα .

2. Αν $\kappa \notin f(A_i)$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ δεν έχει καμία ρίζα .

Παρατήρηση:Στα βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων είχαμε αναφέρει και άλλες μεθόδους για την ύπαρξη ριζών σ' ένα διάστημα.

2. Θ. BOLZANO

3. ΠΡΟΦΑΝΗΣ ΚΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ («1-1»)

4. Θ. ROLLE ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ F

Άσκηση-7

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

i. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. (3^ο Θέμα Πανελλήνιες 2002)

Λύση

i. Έστω $x_1, x_2 \in D_g = \mathbb{R}$ και έστω $g(x_1) = g(x_2) \xRightarrow{f \text{ συνάρτηση}} f(g(x_1)) = f(g(x_2))$
 $\Rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \xRightarrow{f \circ g \text{ "1-1"}} x_1 = x_2$, οπότε η συνάρτηση g είναι «1-1» .

- ii. $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1) \Leftrightarrow f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$
 Έστω $h(x) = x^3 - 3x + 1$, θα δείξω ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. $h(x) = x^3 - 3x + 1$, με $D_h = \mathbb{R}$, $h'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$
 $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
h	γν. αύξουσα	T.M.	γν. φθίνουσα	T.E.	γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ άρα η $h(x)$ γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$ και στο $A_3 = [1, +\infty)$

$h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ άρα η $h(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [-1, 1]$

- Η $h(x)$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1 = (-\infty, -1]$ άρα $h(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(-1)]$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$, $h(-1) = 3$

Άρα $h(A_1) = (-\infty, 3]$. Το $0 \in h(A_1)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_1 = (-\infty, -1]$ που είναι αρνητική.

- Η $h(x)$ γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2 = [-1, 1]$ άρα $h(A_2) = [h(1), h(-1)] = [-1, 3]$, Το $0 \in h(A_2)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_2 = [-1, 1]$ (σε αυτή τη ρίζα δεν γνωρίζω το πρόσημο, μπορεί να είναι αρνητική αν ανήκει στο $(-1, 0)$ ή θετική αν ανήκει στο $(0, 1)$)

- Η $h(x)$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_3 = [1, +\infty)$ άρα $h(A_3) = [h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x))$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$, $h(1) = -1$
 Άρα $h(A_3) = [-1, +\infty)$. Το $0 \in h(A_3)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_3 = [1, +\infty)$ που είναι θετική.

Το μόνο που απομένει είναι να δείξω ότι ρίζα του $A_2 = [-1, 1]$ είναι θετική, δηλαδή πρέπει να δείξω ότι ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$. Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $[0, 1]$. Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική, $h(0) = 1$, $h(1) = -1$ άρα $h(0)h(1) < 0$ από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$. Δηλαδή η ρίζα του $A_2 = [-1, 1]$ είναι θετική και τελικά η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δυο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

5. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΑΠΟ ΔΟΣΜΕΝΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $f(x) \geq \kappa$ ή $f(x) \leq \kappa$

5Α. ΑΠΟ ΔΟΣΜΕΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Μέθοδος:-

Βήμα 1: Από ορισμό το $f(x_0) = \kappa$ (αν δεν μας το δίνει το x_0 το βρίσκουμε εμείς με δοκιμή) είναι ακρότατο.

Βήμα 2: Χρήση Θ. Fermat $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ υπολογίζουμε την παράμετρο α ή $\beta \dots$

ΓΕΝΙΚΑ:

Όταν μας δίνεται δεδομένη μια ανισότητα της μορφής $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε :

- 1^{ov} μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και έχουμε : $f(x) - g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- 2^{ov} θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Delta$, οπότε $h(x) \leq 0$, $x \in \Delta$
- 3^{ov} βρίσκουμε ένα x_0 για το οποίο ισχύει $h(x_0) = 0$, οπότε έχουμε : $h(x) \leq h(x_0)$, $x \in \Delta$
- 4^{ov} άρα η $h(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 και αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Fermat έχουμε : $h'(x_0) = 0$.

Άσκηση -8

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

A. Αν στα σημεία $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$ η f παρουσιάζει ακρότατα, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

B. Να βρείτε το είδος των ακροτάτων.

Λύση

A. Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 4$ (1).

- Το $f(-2)$ είναι ακρότατο από Θ. Fermat $\Rightarrow f'(-2) = 0 \xRightarrow{(1)} 3\alpha(-2)^2 + 2\beta(-2) - 4 = 0 \Rightarrow 3\alpha - \beta = 1$ (2).
- Το $f(1)$ είναι ακρότατο από Θ. Fermat έχουμε $f'(1) = 0 \xRightarrow{(1)} 3\alpha \cdot 1^2 + 2\beta \cdot 1 - 4 = 0 \Rightarrow 3\alpha + 2\beta = 4$ (3).
- Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 3\alpha - \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 4 \end{cases}$ και βρίσκουμε $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 1$.

B. Η συνάρτηση είναι $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 2$, βρίσκουμε μονοτονία -ακρότατα κατά τα γνωστά.

5Β. ΑΠΟ ΚΡΥΦΟ FERMAT

Άσκηση -9

Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει ότι : $a \ln x - x^2 \leq x - 2$, για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $a=3$.

Λύση

Για κάθε $x > 0$ είναι: $a \ln x - x^2 \leq x - 2 \Leftrightarrow a \ln x - x^2 - x + 2 \leq 0$ (1).

Έστω $f(x) = a \ln x - x^2 - x + 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ (2) και $f'(x) = \frac{a}{x} - 2x - 1$ (3).

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$, οπότε από (2) $\Rightarrow f(x) \leq f(1)$, επομένως :

- Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1 \in (0, +\infty)$
- Το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, με $f'(1) = \frac{a}{1} - 2 - 1 = 0$ (4)

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat οπότε: $f'(1) = 0 \Leftrightarrow a - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 3}$

Άσκηση -10

Θεωρούμε τη συνάρτηση για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει ότι :

$f(x) = a^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$. Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $a=e$. (Πανελλήνιες 2009_Θέμα 3)

Λύση

Είναι $f(x) = a^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, $D_f = (-1, +\infty)$ και $f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$, $x > -1$

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$, οπότε από $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$, οπότε:

- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0 \in (-1, +\infty)$
- Το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1, +\infty)$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = a^0 \ln a - \frac{1}{0+1} = \ln a - 1$ (1)

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat οπότε: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = e}$

6. ΥΠΑΡΞΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ - ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΑ της $f'(x)$

Μέθοδοι:

1. Σύνολο τιμών της f' για πλήθος ριζών - (μονοτονία της f' - αλλαγή προσήμων της f' με ορισμό μονοτονίας της εκατέρωθεν των ριζών της $x_1, x_2, \dots$)
(για 2 ή περισσότερες ρίζες)

2. Θεώρημα Bolzano για f'

3. Προφανής με δοκιμή και γν. μονότονη η f' .

4. Θεώρημα Rolle για την f . (συνήθως για μία ρίζα)

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αν θέλω ΑΚΡΟΤΑΤΑ εκατέρωθεν των ριζών βρίσκω πρόσημα της f' με ορισμό μονοτονίας της.

Άσκηση -11

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. Να αποδείξετε ότι έχει δύο ακριβώς τοπικά ακρότατα και στη συνέχεια να βρείτε το είδος τους.

Λύση

Καταρχάς από $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$ (εφ. Σχ. Βιβλίου) και είναι $x - 1 < x$ θα είναι

$\boxed{\ln x < x}$, για κάθε $x > 0$ (1), Οπότε αντικαθιστώ όπου $x = e^x > 0$ στην (1) και έχω:

$\ln e^x < e^x \Leftrightarrow x < e^x \Leftrightarrow e^x - x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και $e^x - x \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι $D_f = (-\infty, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}} \quad (1)$$

Για να δείξω ότι η $f(x)$ έχει δύο τοπικά ακρότατα, αρκεί να δείξω ότι η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες και εκατέρωθεν αυτών αλλάζει πρόσημο η f' .

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} = 0 \Rightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0. \text{ Δεν μπορούμε να βρούμε ρίζες και πρόσημα της}$$

$$f', \text{ άρα θέτουμε } g(x) = 2e^x - xe^x - 1, \text{ οπότε η } \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}} \quad (2).$$

Συνεπώς οι ρίζες και τα πρόσημα της g θα είναι και της f' .

ΕΥΡΕΣΗ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $g(x) = 0$

$$\triangleright \text{ Από } g(x) = 2e^x - xe^x - 1 \Rightarrow g'(x) = 2e^x - e^x - xe^x \Rightarrow \boxed{g'(x) = e^x(1 - x)}.$$

$$\triangleright g'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ και } g'(x) > 0 \Rightarrow e^x(1 - x) > 0 \Rightarrow x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'	+		-
g	-1	$e - 1$ O.M.	$-\infty$

- Είναι g συνεχής στο $(-\infty, 1]$ με $g'(x) > 0$ στο διάστημα $(-\infty, 1)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$.
- Είναι g συνεχής στο $[1, +\infty)$ με $g'(x) < 0$ στο διάστημα $(-\infty, 1)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στα $[1, +\infty)$

Σύνολο τιμών της g

Για το $A_1 = (-\infty, 1]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = 0 - 0 - 1 = -1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DHL}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 \text{ και } g(1) = e - 1 \text{ οπότε}$$

$g(A_1) = (-1, e - 1]$, με $0 \in g(A_1) = (-1, e - 1]$ και η g γν. μονότονη στο $A_1 = (-\infty, 1]$: άρα η $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_1 \in (-\infty, 1]$ τ.ω. $\boxed{g(x_1) = 0} \quad (3).$

Για το $A_2 = [1, +\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x (2-x)] = +\infty(2-\infty) = -\infty, \text{ και } g(1) = e - 1 \text{ οπότε}$$

$g(A_2) = (-\infty, e-1]$, με $0 \in g(A_2) = (-\infty, e-1]$ και η γ γν. μονότονη στο $A_2 = [1, +\infty)$: άρα η $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_2 \in [1, +\infty)$ τ.ω. $g(x_2) = 0$ (4).

Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	x_1		1		x_2	$-\infty$
g'							
g	-1 	0 		$e-1$ O.M.		0 	$-\infty$
Πρόσημο των g και f'	-	+			+		-
f		T.E. $f(x_1)$				T.M. $f(x_2)$	

ΤΕΛΙΚΑ:

- Στο διάστημα $(-\infty, 1)$:

- Αν $x \prec x_1$ $\stackrel{g \text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} g(x) \prec g(x_1) \Leftrightarrow g(x) \prec 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f'(x) \prec 0$
- Αν $x \succ x_1$ $\stackrel{g \text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} g(x) \succ g(x_1) \Leftrightarrow g(x) \succ 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f'(x) \succ 0$

- Στο διάστημα $(1, +\infty)$:

- Αν $x \prec x_2$ $\stackrel{g \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} g(x) \succ g(x_2) \Leftrightarrow g(x) \succ 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f'(x) \succ 0$
- Αν $x \succ x_2$ $\stackrel{g \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} g(x) \prec g(x_2) \Leftrightarrow g(x) \prec 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f'(x) \prec 0$

Συνεπώς όπως φαίνεται και στον πίνακα μεταβολών η f παρουσιάζει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα, στο x_1 τοπικό ελάχιστο το $f(x_1)$ και στο x_2 τοπικό μέγιστο το $f(x_2)$.

7. ΥΠΑΡΞΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ - ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΩΝ

1. ΜΕ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ (για 2 ή περισσότερες)

→ Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας $A_1, A_2, \dots$ του πεδίου ορισμού της D_f και τα αντίστοιχα Σύνολα τιμών $f(A_1), f(A_2), \dots$ χωριστά και ελέγχουμε αν το $0 \in f(A_i)$ με $i=1, 2, \dots$ και κάνουμε χρήση γνησίως μονότονης για μοναδικότητα ρίζας.

2. Θ. BOLZANO

3. ΠΡΟΦΑΝΗΣ ΚΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ («1-1») κ.λ.π.

Άσκηση -12

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ και το σημείο $A\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

A. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, τις οποίες και να βρείτε.

B. Αν $(\varepsilon_1): y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$ είναι οι εφαπτομένες του ερωτήματος A. , Να

υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}{f(x) - x + \frac{3\pi}{2}}$.

Λύση

A. Η $f(x) = \sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ με $f'(x) = \cos x$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής τής εφαπτομένης της C_f , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \sin x_0 = \cos x_0(x - x_0) \rightarrow (\varepsilon).$$

Το σημείο $A\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \in (\varepsilon) : -\frac{\pi}{2} - \sin x_0 = \cos x_0(\pi - x_0) \Leftrightarrow \cos x_0(\pi - x_0) - \sin x_0 - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (1),$ αρκεί

να δείξω ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Θέτω $g(x) = \cos x(\pi - x) - \sin x - \frac{\pi}{2}$ στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = -\cos x + (\pi - x)\sin x + \cos x = (\pi - x)\sin x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (\pi - x)\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi \quad \text{ή} \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow (\pi - x)\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow (\pi - x)\sin x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Πίνακας μεταβολών:

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
g'	-		+
g	0	$1 - \frac{\pi}{2}$ Ο.Ε.	0

- Είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ και $g(\pi) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$
- Στο $A_1 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ το $x_1 = \frac{\pi}{2} \in A_1$ είναι ρίζα και είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως μονότονη.
- Στο $A_2 = \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ το $x_2 = \frac{3\pi}{2} \in A_2$ είναι ρίζα και είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως μονότονη.

Συνολικά η $\eta\mu x(\pi - x) - \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2} = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες τις $x_1 = \frac{\pi}{2}$ και $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

- Για $x = \frac{\pi}{2}$ $\eta(\varepsilon) \Leftrightarrow \boxed{y = -x + \frac{\pi}{2}} \rightarrow (\varepsilon_1)$
- Για $x = \frac{3\pi}{2}$ $\eta(\varepsilon) \Leftrightarrow \boxed{y = x - \frac{3\pi}{2}} \rightarrow (\varepsilon_2)$

B. Είναι $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}{f(x) - x + \frac{3\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{0}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \left(f(x) + x - \frac{\pi}{2} \right) = \pi > 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \left(f(x) - x + \frac{3\pi}{2} \right) = 0 \text{ και } f(x) - x + \frac{3\pi}{2} > 0 \text{ αφού η } h(x) = f(x) - x + \frac{3\pi}{2}, \text{ έχει}$$

$h'(x) = f'(x) - 1 = -\eta\mu x - 1 = -(1 + \eta\mu x) < 0$ στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, άρα η h γνησίως φθίνουσα στο

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \text{ οπότε με } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \stackrel{h\downarrow}{\Rightarrow} h(x) > h\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x) - x + \frac{3\pi}{2} > 0} \quad (2)$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1}{f(x) - x + \frac{3\pi}{2}} = +\infty \quad (3)$$

Οπότε το όριο γίνεται με τη βοήθεια των (1), (2) και (3)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}{f(x) - x + \frac{3\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \left(f(x) + x - \frac{\pi}{2} \right) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1}{f(x) - x + \frac{3\pi}{2}} = \pi(+\infty) = +\infty.$$

8. ΜΗ ΥΠΑΡΞΗ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x)$

Μέθοδος ☹ (Με απαγωγή σε άτοπο)

Βήμα 1: Υποθέτουμε ότι η f έχει ακρότατα έστω $x_0, \dots$

Βήμα 2: Χρήση Θ. Fermat και προκύπτει αδύνατη η εξίσωση $f'(x_0) = 0$.

Άσκηση - 13

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Λύση :

Έχω : $f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x - 5$ (1). Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, άρα από Θ. Fermat ισχύει : $f'(x_0) = 0$. Η συνάρτηση $f^3(x) + f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισιμων, ομοίως και η συνάρτηση $x^3 + 2x - 5$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω :

$$(f^3(x) + f(x))' = (x^3 + 2x - 5)' \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) = 3x^2 + 2 \quad (2)$$

Στη (2) για $x = x_0$ έχω : $3f^2(x_0) \cdot f'(x_0) + f'(x_0) = 3x_0^2 + 2 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 2 = 0$ αδύνατη. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

9 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Μέθοδος

- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει τύπο, αλλά δεν χρειάζεται να εξετάσω αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, καθώς δεν επηρεάζει τη μονοτονία της f .
- Βρίσκουμε την $f'(x)$ για $x < x_0$ και την $f'(x)$ για $x > x_0$.
- Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ για $x < x_0$ και της $f'(x)$ για $x > x_0$.
- Σχηματίζω πίνακα με το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f . Στην πρώτη γραμμή του πίνακα γραφώ τις ρίζες της $f'(x)=0$ και τα σημεία αλλαγής τύπου της f .

Άσκηση -14

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα καθώς και το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 7, & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

➤ Συνέχεια της f

- Η f συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική.
- Η f συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική.
- Στο $x_0 = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4x - 3) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 6x + 7) = 2$, $f(2) = 2$.

Άρα συνεχής στο $x_0 = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- Παραγωγισιμότητα της f :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \left(\frac{0}{0} \right)^{DHL} = 6 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \left(\frac{0}{0} \right)^{DHL} = 4.$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

- Στο διάστημα $(-\infty, 1)$: $f'(x) = 2x + 4$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow \underline{x = -2}$ και $f'(x) > 0 \Rightarrow 2x + 4 > 0 \Rightarrow \underline{x > -2}$.
- Στο διάστημα $(1, +\infty)$: $f'(x) = 2x - 6$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow \underline{x = 3}$ και $f'(x) > 0 \Rightarrow 2x - 6 > 0 \Rightarrow \underline{x > 3}$.
- Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
Πρόσημο f'	-	0	+	Δ.Ο.	-		+
f	$+\infty$ 	O.E. -7		T.M. 2		T.E. -2	$+\infty$

Μονοτονία:

- Η f γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$ και $[1, 3]$
- Η f γνησίως αύξουσα στα $[-2, 1]$ και $[3, +\infty)$

Ακρότατα:

- Η f έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(-2) = -7$ (είναι και ο.ε.) και $f(3) = -2$
- Η f έχει τοπικό μέγιστο $f(1) = 2$

Σύνολο τιμών:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 6x + 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$
- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών είναι: $f(A) = [-7, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

118. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sin x$. Να αποδείξετε ότι:

α] Η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β] Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 στο $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$.

γ] Υπάρχει $\xi \in (x_0, \frac{\pi}{4})$ ώστε $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) \cdot f'(\xi)$

119. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων: i) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4$ ii) $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x + 7$.

120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x+1} + e^x - 2$.

i). Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

121. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + \alpha x + \beta = 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους.

122. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \alpha, & x \in (-\infty, 1) \\ x \ln x + \beta x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$ η οποία πληροί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορ. λογισμού στο $[0, e]$.
- Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 - Να υπολογίσετε τον αριθμό $\xi \in (0, e)$ για τον οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0, f(0))$ και $B(e, f(e))$.
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση $ef'(x) + f(0) = f(e)$ έχει μοναδική λύση στο $(1, +\infty)$
123. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 3}$.
- Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
 - Να προσδιορίσετε τον αριθμό των ριζών της $f(x) = 0$ στο $\mathbb{R}$.
124. Προσδιορίστε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 3, & x \leq 2 \\ \frac{x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 8}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το πλήθος των ριζών της $f(x) = 0$.
125. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να συγκριθούν οι αριθμοί e^n και n^e .
 - Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
126. (α) Να μελετηθεί η $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ ως προς τη μονοτονία στο $[0, +\infty)$.
- (β) Δείξτε ότι $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, για κάθε $x \geq 0$.
127. (α) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) = x^x(1-x)^{1-x}$.
- (β) Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$ να δείξετε ότι: $\alpha^\alpha \beta^\beta \geq \frac{1}{2}$.
128. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}}$.
- Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
 - Να βρεθεί το σύνολο τιμών της
 - Ναδειχτεί ότι $(\sqrt{x})^e \leq e^{\sqrt{x}}$
 - Να συγκριθούν οι αριθμοί $9^{\sqrt{13}}$ και 13^3 .
129. Έστω $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει δυο ακρότατα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - Αν x_1, x_2 οι θέσεις ακρότατων, να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): 9x - 2y + 4 = 0$.
130. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x) = x^2 + 1$. Να βρείτε σημείο της C_f του οποίου η απόσταση από το σημείο $A(3, 1)$ είναι ελάχιστη.
131. Αν $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα α, β ώστε η συνάρτηση να έχει:
- μέγιστο στο $x = -2$ και ελάχιστο στο $x = 1$.
 - μέγιστο στο $x = -3$ και $f''(-2) = 0$.
132. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ f, g . Αν ισχύει $f(0) = g(0)$ και $f(x) - g(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ναδειχτεί ότι $f'(0) - g'(0) = 2$.
133. (α) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 + \gamma x - 3$ να έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$ το -3 .

(β) Ποιά η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f με τύπο $f(x) = x - a \ln x$ παρουσιάζει ακρότατο;

Να βρεθεί το ακρότατο αυτό.

134. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $xf(x) + 1 \leq e^x + \eta \mu 2x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχτεί ότι $f(0) = 3$.

135. i) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ είναι: $x \leq e^{x-1}$.

ii) Αν f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $x \leq f(x) \leq e^{x-1}$, για κάθε $x > 0$, να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της f στο σημείο $(1, f(1))$.

136. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \lambda x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .

B. Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του λ ώστε $x \ln x \geq \lambda x - 1$, $x \in (0, +\infty)$.

Γ. Για τη τιμή του λ του B. ερωτήματος, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ): $y = \lambda x - 1$,

εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x \ln x$.

137. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη: $f(1-x) + 2 = xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι η f παίρνει στο $\mathbb{R}$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή

138. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

A. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A τις οποίες και να βρείτε.

B. Αν $(\epsilon_1): y = x$ και $(\epsilon_2): y = \pi - x$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος A, τότε να σχεδιάσετε τις $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$

και τη γραφική παράσταση της f , και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$.

139. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο σ' αυτό

για την οποία ισχύουν: $f'(x) \geq \frac{e^x}{e^x + 1} + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$. Δείξτε:

i). $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ii). Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα

iii). Η C_f συναντά τον xx' σ' ένα ακριβώς σημείο.

iv). $f(1) \geq \ln(1 + e) + 2$.

140. Έστω f παρ/μη με $(f(x))^3 + (f(x))^2 + (f(x)) = x \ln x - x + 1$, για κάθε $x > 0$.

A. Να λυθεί η $f(x) = 0$

B. Να βρεθεί το πρόσημο της f .

Γ. Μονοτονία και ακρότατα της f .

141. Αν f δυο φορές παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $2f(x) \geq f(1) + f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ν.δ.ο.

α. $f(1) = f(2)$

β. υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

142. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και ισχύει: $f^3(x) + xf(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να

δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

143. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A. Να δείξετε ότι $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$, $\forall x \in (0, +\infty)$

B. Να λύσετε την εξίσωση $ef\left(\frac{1+e^2}{e} - f(x)\right) - 1 = 0$.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + f\left(\frac{x^2}{e}\right) \geq \frac{2}{e}$.

144. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το τοπικό ελάχιστο τιμή της f να είναι αντίθετο του τοπικού μεγίστου της.

145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

ii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2007)

146. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 \ln x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

147. Η τιμή P (σε χιλιάδες €) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά δίνεται από τον

$$\text{τύπο : } P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}$$

i. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του.

ii. Να βρείτε το χρονικό διάστημα στο οποίο η τιμή του συνεχώς αυξάνεται

iii. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μεγίστη.

iv. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται χωρίς όμως να γίνει μικρότερη από την τιμή του τη στιγμή της εισαγωγής του. (2000)

148. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

i. Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM .

149. Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σε έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του

φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$, όπου a και β

είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετρίεται σε ώρες. Η μεγίστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση

με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

i. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών a και β

ii. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η συγκέντρωση είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. (2000).

150. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B. Να βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - 2x + 3$, με $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι η f

έχει ένα ακριβώς τοπικό ακρότατο στο διάστημα $[0, 1]$ και στη συνέχεια να βρείτε το είδος του.

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

A. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

B. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Γ. i) Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$

(ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$