

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΤΟΥ Θ.Μ.Τ. - ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΤΟΥ Θ.Μ.Τ.-ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεώρημα I (σταθερής συνάρτησης) :

• Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ
 • Αν $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ

τότε η f είναι σταθερή σ' όλο το διάστημα Δ ,
 δηλαδή $f(x) = c$, με $c \in \mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1).

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδή $f(x) = c$. ■

ΣΧΟΛΙΟ !

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ-ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

«Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ είναι σταθερή.

Απάντηση : Είναι Λάθος.

Αντιπαράδειγμα,

Έέστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ:

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

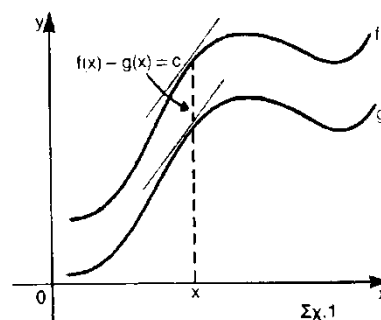
- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτω $h(x) = f(x) - g(x)$

- Η συνάρτηση $h = f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ σαν διαφορά συνεχών.
- Ισχύει $h'(x) = (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \stackrel{\text{υπόθεση}}{=} 0$.

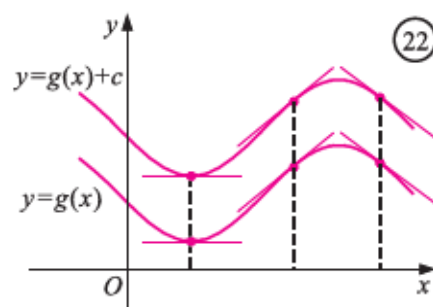
Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $h = f - g$ είναι σταθερή στο Δ .



Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει f

$$h(x) = c \Rightarrow f(x) - g(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

■



Γεωμετρική ερμηνεία:

Επειδή για κάθε $x_0 \in A_f = A_g$ είναι $f'(x_0) = g'(x_0)$, οι C_f, C_g στα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, g(x_0))$ έχουν εφαπτομένες παράλληλες. Επίσης, επειδή $f(x) - g(x) = c$ σημαίνει ότι υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις με την ίδια παράγωγο που διαφέρουν κατά τη σταθερά c . Αποτελούν την οικογένεια καμπυλών

ΣΧΟΛΙΟ!

Το παραπάνω πόρισμα ισχύει σε ένα διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

1. ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Αν το πεδίο ορισμού $\Delta = (\alpha, \beta)$ τότε αποδεικνύουμε μόνο ότι $f'(x) = 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ , οπότε θα είναι και συνεχής.

2. Αν το πεδίο ορισμού $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε αποδεικνύουμε μόνο ότι :

- $f'(x) = 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ και
- f συνεχής στα άκρα α, β του κλειστού διαστήματος $[a, \beta]$.

(α, β)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή και

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f , αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0) = 1$.

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \stackrel{(1)}{=} 0,$$

Επομένως, η φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η φ είναι σταθερή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, $\frac{f(x)}{e^x} = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$f(x) = ce^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = 1$, έχουμε $1 = c$, οπότε

$$f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα -1

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 3$ και : $xf'(x) = 3x - 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση :

i. Η $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$, αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Έχω : $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2$ (1).

Επίσης από εκφώνηση : $xf'(x) = 3x - 2f(x) \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{3x - 2f(x)}{x}$. Άρα η σχέση (1)

$$\text{γίνεται : } g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 \Leftrightarrow g'(x) = 2xf(x) + x^2 \frac{3x - 2f(x)}{x} - 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 2xf(x) + 3x^2 - 2xf(x) - 3x^2 \Leftrightarrow g'(x) = 0. \text{ Άρα η } g(x) \text{ είναι σταθερή στο } (0, +\infty).$$

ii. Η $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$ άρα ισχύει : $g(x) = c$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα και $g(4) = c \Leftrightarrow 4^2 f(4) - 4^3 = c \Leftrightarrow 16 \cdot 3 - 64 = c \Leftrightarrow c = -16$. Άρα

$$g(x) = -16 \Leftrightarrow x^2 f(x) - x^3 = -16 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 - 16}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

2. ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΑΠΛΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

A1. Με τη βοήθεια ιδιοτήτων:

✓ Ιδιότητα Αθροίσματος: $f'(x) + g'(x) = (f(x) + g(x))'$

✓ Ιδιότητα Γινομένου: $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'$

✓ Ιδιότητα $c \cdot f'(x) = (cf(x))'$

✓ Ιδιότητα Πηλίκου: $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$

A2. Εξετάζω πρώτα απ' όλα μήπως είναι της μορφής: [έξυπνες παράγουσες]

1. ΜΟΡΦΗ: $\frac{f(x)}{2\sqrt{f(x)}} \rightarrow F(x) = \sqrt{f(x)}$, με $f(x) > 0$

2. ΜΟΡΦΗ: $\frac{f'(x)}{f(x)} \rightarrow F(x) = \ln|f(x)|$, με $f(x) > 0$

3. ΜΟΡΦΗ: $f'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = ce^x$

A3. Με το τυπολόγιο παραγώγων-αντιπαραγώγισης

➤ $0 = (c)'$

➤ $c = (cx)'$

➤ $x^\alpha = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)'$, $\alpha \neq -1$

➤ $\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$, $x \neq 0$

➤ $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right)'$, $x \neq 0$

➤ $\frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})'$

➤ $\eta\mu x = (-\sigma\upsilon\upsilon x)'$

➤ $\sigma\upsilon\upsilon x = (\eta\mu x)'$

➤ $e^x = (e^x)'$

➤ $a^x = \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)'$

➤ $1 = (x)'$

Παράδειγμα -2

Να βρείτε την παράγουσα F των συναρτήσεων

A. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - e^x - \frac{1}{x}$, $x > 0$, με $F(1) = e$ και

B. $f(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x^2}$, $x < 0$, με $F(0) = 2$

Λύση

A). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + e^x - \frac{1}{x} = (2\sqrt{x})' + (e^x)' - (\ln x)' = (2\sqrt{x} + e^x - \ln x)'$, $x > 0$.

Άρα $F(x) = 2\sqrt{x} + e^x - \ln x + c$, $x > 0$ (1).

Αλλά $F(1) = e \Rightarrow 2 + e - 1 + c = e \Rightarrow c = -1$, οπότε $F(x) = 2\sqrt{x} + e^x - \ln x - 1$, $x > 0$

B) $f(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x^2} = \left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)' + (x^2)' + 3\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{x}\right)'$, $x < 0$.

Άρα $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{x} + c$, $x < 0$ (1).

Αλλά $F(0) = 2 \Rightarrow c = 2$, οπότε $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{x} + 2$, $x < 0$

3. ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΑΠΟ ΜΟΡΦΗ $\rightarrow f'(x) + f(x) \cdot g(x) = h(x)$

ΜΕΘΟΔΟΣ:

πολλαπλασιάζουμε με $e^{G(x)}$, όπου $G(x) \rightarrow$ η παράγουσα της $g(x)$ και έχουμε:

$$f'(x) + f(x) \cdot g(x) = h(x) \xRightarrow{G'(x)=g(x)} e^{G(x)} f'(x) + f(x) \cdot e^{G(x)} G'(x) = e^{G(x)} h(x)$$

$$\Rightarrow \left[e^{G(x)} f(x) \right]' = \dots$$

Παράδειγμα -3

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f'(x) + f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$

Λύση

Έχουμε $f'(x) + f(x) = 2 \xRightarrow{\cdot e^x} e^x f'(x) + (e^x)' f(x) = 2e^x \Rightarrow (e^x f(x))' = (2e^x)' \Rightarrow$
 $\Rightarrow e^x f(x) = 2e^x + c$ (1)

Για $x = 0$ η (1) $\Rightarrow e^0 f(0) = 2e^0 + c \Rightarrow c = -1$ (2). Οπότε από (1), (2) $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x}$.

4. ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ:

Με τη βοήθεια τυπολογίου παραγώγων για σύνθετες συναρτήσεις

$$\triangleright f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))'$$

$$\triangleright \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$$

$$\triangleright f(x) + x \cdot f'(x) = (x \cdot f(x))'$$

$$\triangleright \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \left(\frac{f(x)}{x} \right)'$$

$$\triangleright \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln|f(x)|)'$$

$$\triangleright \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)} \right)'$$

$$\triangleright e^{f(x)} \cdot f'(x) = (e^{f(x)})'$$

$$\triangleright f^v(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^{v+1}(x)}{v+1} \right)' \quad \text{π.χ.} \quad f(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^2(x)}{2} \right)'$$

$$\triangleright \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$$

$$\triangleright \sin f(x) \cdot f'(x) = (\sin f(x))'$$

$$\triangleright \cos f(x) \cdot f'(x) = (-\sin f(x))'$$

Παράδειγμα -4

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0. \text{ Να δειχθεί ότι : } f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right).$$

(3^ο Πανελλήνιες 2005)

Λύση :

Για $x \in \mathbb{R}$ έχω :

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2e^{f(x)} f'(x) = e^x \Leftrightarrow (2e^{f(x)})' = (e^x)' \Leftrightarrow$$

$$2e^{f(x)} = e^x + c. \text{ Για } x=0 \text{ έχω : } 2e^{f(0)} = e^0 + c \Leftrightarrow 2e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c=1. \text{ Άρα}$$

$$2e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right), D_f = \mathbb{R}.$$

5. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Περιέχουν ΜΟΡΦΕΣ:

- $f(x) + g(x)$ και $f'(x) + g'(x)$ ή
- $f(x) + g(x)$ και $f''(x) + g''(x)$, με $g(x) = \text{γνωστή συνάρτηση}$

ΜΕΘΟΔΟΣ:

Θέτουμε $h(x) = f(x) + g(x)$ και με αντιπαραγωγή βρίσκουμε την $h(x)$ και στην συνέχεια την $f(x)$.

Παράδειγμα -5

[στη σχέση που δίνεται εμφανίζεται : $f(x) - x^2$ και $f'(x) - 2x$]

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχω : $f'(x) - 2x + 2x(f(x) - x^2) = 0$, έστω $g(x) = f(x) - x^2$

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $g'(x) + 2xg(x) = 0$

(Η $g(x) = f(x) - x^2$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και $g(x) \neq 0$ (καθώς $f(x) \neq x^2$) άρα η g διατηρεί πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = f(0) = 1 > 0$ άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.)

Έχουμε : $g'(x) + 2xg(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot g'(x) + 2xe^{x^2} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow (g(x) \cdot e^{x^2})' = 0$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g(x) \cdot e^{x^2} = c$

Για $x = 0$ είναι : $g(0) \cdot e^0 = c \Leftrightarrow f(0) - 0 = c \Leftrightarrow c = 1$, άρα :

$$g(x) \cdot e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{e^{x^2}} \Leftrightarrow g(x) = e^{-x^2} \Leftrightarrow f(x) - x^2 = e^{-x^2} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x^2} + x^2, x \in \mathbb{R}.$$

6. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΚΑΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Αν Δ_1, Δ_2 διαστήματα με $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ και έχουμε : $f'(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in \Delta_1, \Delta_2$, τότε

•Αν $x \in \Delta_1$, τότε $f(x) = g(x) + c_1$

•Αν $x \in \Delta_2$, τότε $f(x) = g(x) + c_2$

Δηλαδή : $f(x) = \begin{cases} g(x) + c_1, & x \in \Delta_1 \\ g(x) + c_2, & x \in \Delta_2 \end{cases}$.

Παράδειγμα -6

Έστω $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 2x^3 + 1$, για κάθε $x \neq 0$ και $f(1) = 5$, $f(-1) = 2$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση :

Για κάθε $x \neq 0$, $x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 2x^3 + 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (xf(x))' = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)'$
με $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Άρα αν διαιρέσουμε με $x \neq 0$ έχουμε : $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x^2} + \frac{c_1}{x}, & x < 0 \\ x - \frac{1}{x^2} + \frac{c_2}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Όμως στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι $f(-1) = 2 \Rightarrow -1 - 1 - c_1 = 2 \Rightarrow \underline{c_1 = -4}$

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι $f(1) = 5 \Rightarrow 1 - 1 + c_2 = 5 \Rightarrow \underline{c_2 = 5}$

Τελικά $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x}, & x < 0 \\ x - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}, & x > 0 \end{cases}$

7. ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f''(x)$

Παράδειγμα -7

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0) = 2f'(0) = 1$ και $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \Leftrightarrow f''(x)f(x) + f'(x)f'(x) = f(x)f'(x) \Leftrightarrow (f'(x)f(x))' = f(x)f'(x) \text{ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει: } f(x)f'(x) = c \cdot e^x \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}$. Για $x=0$ η (1) γίνεται: $f(0)f'(0) = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ άρα η (1) γίνεται:

$$f(x)f'(x) = \frac{1}{2}e^x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^x)' \text{ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει}$$

: $f^2(x) = e^x + c_2, x \in \mathbb{R}$ (2). Για $x=0$ η (2) γίνεται: $f^2(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Άρα η (2) γίνεται τελικά: $f^2(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = 0$ αδύνατο)

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι: $f^2(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα -8

Δύο συναρτήσεις είναι τρεις φορές παραγωγίσιμες στο A . Αν είναι $f'''(x) = g'''(x)$, $f''(0) \neq g''(0)$, $f'(0) = g'(0)$ και $f(0) = g(0)$. Να δειχτεί ότι:

- α. $f(x) = g(x) + \lambda x^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$
- β. Οι c_f και c_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Λύση

- α. Είναι: $f'''(x) = g'''(x) \Leftrightarrow f'''(x) - g'''(x) = 0$, άρα $f''(x) - g''(x) = c \in \mathbb{R}^*$

αφού $f''(0) - g''(0) \neq 0$. Οπότε $f'(x) - g'(x) = cx + c_1$ (1)

Αλλά $f'(0) = g'(0) \Rightarrow f'(0) - g'(0) = 0$, άρα η (1) $\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

Οπότε $f'(x) - g'(x) = cx \Rightarrow [f(x) - g(x)]' = cx \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{c}{2}x^2 + c_2$

Επειδή $f(0) = g(0) = 0$ θα είναι $c_2 = 0$, άρα, $f(x) = g(x) + \frac{c}{2}x^2 = g(x) + \lambda x^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

- β. Είναι $f(x) - g(x) = \lambda x^2 \neq 0$, άρα $f(x) \neq g(x)$ εκτός του μοναδικού σημείου με τετμημένη 0 γιατί $f(0) = g(0)$. Αλλά $f'(0) = g'(0)$ που σημαίνει ότι c_f, c_g έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη.

B. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ (μονοτονίας):

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι:

➤ Στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$ η f συνεχής από υπόθεση

➤ Στο διάστημα (x_1, x_2) η f συνεχής παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$

Ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1), \text{ οπότε έχουμε } f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ θα είναι και $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, οπότε θα έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f γν. αύξουσα.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

Παράδειγμα-1

– Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, δηλαδή γνησίως μονότονη.

Παράδειγμα-2

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$ $A=\mathbb{R}$ και έχει $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$.

Επίσης $f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$

Για $f'(x) > 0 \Rightarrow 2(x - 1) > 0 \Rightarrow x > 1$

Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-		+
f'	-		+
f	γν. φθίνουσα	γν. αύξουσα	
	$f(1)=0$		

➤ Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ και $f'(x) = 2(x - 1) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

➤ Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) = 2(x - 1) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Σχόλιο: Η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Σχόλια-Παρατηρήσεις:

1. Αν $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f \uparrow$ (αύξουσα) για κάθε $x \in [a, b]$.

2. Αν $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f \downarrow$ (φθίνουσα) στο $[a, b]$

3. Το θεώρημα ισχύει μόνο σε συνεχή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

4. Το κριτήριο ισχύει και σε διαστήματα τη μορφής $[a, b]$, $(a, b]$, (a, b) .

5. Τις πληροφορίες που μας δίνει η $f'(x)$ για τη μονοτονία της f μπορούμε να έχουμε και από την f'' για την f' . Δηλαδή, αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b]$ τότε $f'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(a, b]$

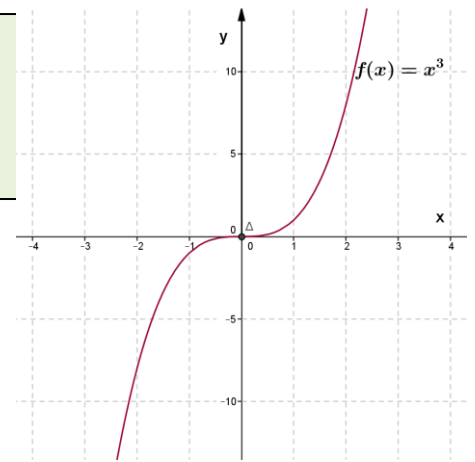
6. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ-ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

Αντιπαράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Όμως έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει δηλαδή $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Κρίσιμα σημεία

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται ($f'(x) = 0$)
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. ΕΥΡΕΣΗ-ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Μέθοδος:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και εξετάζουμε τη συνέχειά της σ' αυτό.
2. Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$
3. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f ($f'(x) = 0$ ή όπου δεν παραγωγίζεται).
4. Βρίσκουμε τα πρόσημα της f λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ ή
Βρίσκουμε τα πρόσημα της f με επιλεγμένο αριθμό μεταξύ των ριζών της (παράγρ. 1.8)
5. Κάνουμε πίνακα μεταβολών της f στον οποίο πρέπει να περιέχονται το Π.Ο. της f , οι ρίζες της καθώς και τα σημεία που δεν παραγωγίζεται.
6. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας σύμφωνα με τα θεωρήματα-προτάσεις:
 - Αν $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f \uparrow$ (αύξουσα) για κάθε $x \in [\alpha, \beta] \rightarrow$ λύνω ανίσωση $f'(x) \geq 0$
 - Αν $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f \downarrow$ (φθίνουσα) στο $[\alpha, \beta]$
 - Αν $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$
 - Αν $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$

Πρόσημο Πολυωνύμου

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k$ οι ρίζες πολλαπλότητας 1, τότε
 $P(x) = a_n (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_k)$

$k=2\lambda+1, \lambda \in \mathbb{N}$	x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$\dots$	ρ_k	$+\infty$
	$P(x)$	-	+	-		+	
$k=2\lambda, \lambda \in \mathbb{N}$	x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$\dots$	ρ_k	$+\infty$
	$P(x)$	+	-	-		+	

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$. Το πρόσημο της f' δίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως, η συνάρτηση f :

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$.
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0, 1)$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$.

2. i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x - \sin x - 2$, $x \in [0, \pi]$ είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\sin x = x - 2$ έχει ακριβώς μια λύση στο $[0, \pi]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Είναι

$$f'(x) = (x - \sin x - 2)' = 1 + \cos x > 0, \text{ για κάθε } [0, \pi].$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με την παράγραφο 1.8, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(0),$

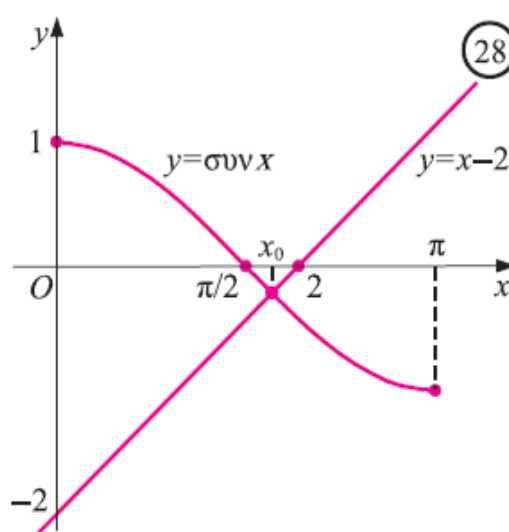
$$f(\pi)] = [-3, \pi - 1].$$

ii) Έχουμε:

$$\sin x = x - 2 \Leftrightarrow x - \sin x - 2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0, x \in [0, \pi].$$

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-3, \pi - 1]$, που περιέχει το 0, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό. Η ρίζα αυτή, όπως φαίνεται και στο σχήμα 28, είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της $y = x - 2$ και της $y = \sin x$.



2. Μονοτονία της f με βοήθεια της f'' ή βοηθητικής

αν δεν μπορώ να λύσω εξίσωση $f'(x) = 0$ ή $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$

Μέθοδος:

1ος τρόπος: Με τη βοήθεια της f''

- Βρίσκω την $f''(x)$
- τα πρόσημά της $f''(x)$ και ρίζες της $f''(x) = 0 \rightarrow x_0 \dots$ -μονοτονία της f'
- κάνουμε ορισμό μονοτονίας για την f' εκατέρωθεν του $x_0 \dots$
- στη συνέχεια βρίσκουμε έτσι το πρόσημο της f' και άρα τη μονοτονία της f .

2ος τρόπος: Με βοηθητική συνάρτηση

. Δηλαδή αν είναι $f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ή $f'(x) = g(x) \cdot h(x)$ και η h έχει σταθερό πρόσημο, τότε βρίσκουμε την g' -ορισμό μονοτονίας της g -πρόσημό της .

Παράδειγμα -2

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 15$

ii. $f(x) = 2ex(\ln x - 1) - x^2$

Λύση

i. $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 15$, $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3e^x + 2x - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3e^x + 2x - 3 = 0$

Η τελευταία εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους, για αυτό θα βρω την $f''(x) = 3e^x + 2 > 0$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Για την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3e^x + 2x - 3 = 0$ έχω για $x = 0$, $3e^0 - 3 = 0$, άρα η $x = 0$ προφανής ρίζα της $f'(x) = 0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι και μοναδική.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Τα πρόσημα για την $f'(x)$ προκύπτουν ως εξής :

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x) = 0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

• $x < 0 \xrightarrow{f':\uparrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \downarrow$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$

• $x > 0 \xrightarrow{f':\uparrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

ii. $f(x) = 2ex(\ln x - 1) - x^2 = 2ex \ln x - 2ex - x^2$, $D_f = (0, +\infty)$,

$f'(x) = 2e \ln x + 2e - 2e - 2x = 2e \ln x - 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e \ln x - 2x = 0$. Η τελευταία

εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους, για αυτό θα βρω την $f''(x) = \frac{2e}{x} - 2$,

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2e \Leftrightarrow x = e$

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα
	$-$		$-$
f	γν. φθίνουσα		γν. φθίνουσα

Το παραπάνω πίνακάκι συμπληρώνεται ως εξής :

Ψάχνω πρώτα το πρόσημο της $f''(x)$, αφού μπορώ να λύσω την εξίσωση $f''(x) = 0$ με αλγεβρικούς τρόπους, θα μπορώ να λύσω και τις ανισώσεις :
 $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2e - 2x}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2e - 2x > 0 \Leftrightarrow x < e, \text{ άρα } f'(x) \uparrow \text{ στο } (0, e]$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2e - 2x}{x} < 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2e - 2x < 0 \Leftrightarrow x > e, \text{ άρα } f'(x) \downarrow \text{ στο } [e, +\infty)$$

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x) = 0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x < e \stackrel{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(e) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα $f(x) \downarrow$ για κάθε $x \in (0, e]$
- $x > e \stackrel{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(e) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα $f(x) \downarrow$ για κάθε $x \in [e, +\infty)$

Τελικά η $f \downarrow$ για κάθε $x \in D_f = (0, +\infty)$.

Παράδειγμα -3

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

Λύση

Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $f'(x) = \frac{\eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$. Επειδή $\eta\mu^2 x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ με

ενδιαφέρει αποκλειστικά το πρόσημο το αριθμητή της $f'(x)$. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi)$ τότε $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x \eta\mu x = x \eta\mu x > 0$, για κάθε $x \in (0, \pi)$ και επειδή $g(x)$ είναι συνεχής στο 0 έχουμε $g(x) \uparrow [0, \pi)$.

Άρα για κάθε $x \in (0, \pi)$ έχω : $x > 0 \stackrel{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$ άρα και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και άρα τελικά $f(x) \uparrow (0, \pi)$

3. ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΕ Θ.Μ.Τ.

Μέθοδος:

Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της παραγώγου $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$ με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

Παράδειγμα -4

Θεωρούμε τη συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$f(0) = 0 \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Α. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) - f(x) > 0$ ή $xf'(0) < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Β. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση

Α. Θα εφαρμόσουμε ΘΜΤ στο $[0, x]$ αφού $x > 0$.

- f συνεχής στο $[0, x] \subset [0, +\infty)$ σαν παραγωγίσιμη
- f παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ με $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει το ΘΜΤ, οπότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τ.ω.

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow \boxed{f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}} \quad (1).$$

- Όμως $\xi \in (0, x) \Rightarrow 0 < \xi < x \xrightarrow{f' \text{ γν. αύξουσα}} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \xrightarrow{(1)} \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow$

$$\boxed{xf'(x) - f(x) > 0} \quad (2).$$

Β. Είναι $g'(x) = \frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. ,λόγω της (2)

από Α. ερώτημα, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

4. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $\rightarrow$ Μορφή: $f(x) > g(x)$

$$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ (ή με } \geq \text{)}$$

Μέθοδος:

1. $\rightarrow$ **ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ** : Σε τέτοιες ασκήσεις συνήθως ζητείται η μελέτη ως προς τη μονοτονία μιας συνάρτησης και σε δεύτερο ερώτημα ζητείται η απόδειξη μιας ανισότητας που προκύπτει σαν εφαρμογή-

χρήση του ορισμού της μονοτονίας

2. $\rightarrow$ **Θ.Μ.Τ.** : θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλο διάστημα [αν περιέχει μόνο x παίρνουμε διάστημα $[0, x]$] και στη συνέχεια κατάλληλη μόνιμη ανισότητα..

3. $\rightarrow$ **Θ. Rolle** ΓΙΑ $f \dots$ άρα $f'(\xi) = 0$ και ορισμό μονοτονίας της f' εκατέρωθεν του ξ

4. $\rightarrow$ **ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ της ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ F** και ορισμός μονοτονίας στο δοσμένο διάστημα.

► Όμοια για $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Σημείωση: Αν δεν δίνεται συνάρτηση και ζητείται να αποδειχθεί μόνο μια μόνιμη ανισότητα, κάνουμε εμείς κατάλληλη συνάρτηση

► Όμοια για $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Παράδειγμα -5

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ στο πεδίο ορισμού της.

β) Ναδειχθεί ότι: $1 - \frac{1}{x} < \ln x$ (1) για κάθε $x > 1$.

Λύση

α) Έχω Π.Ο. $A=(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ (2)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0, x-1 > 0, x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
x-1	-	0	+
x	+		+
f'	-		+
f	γν. φθίνουσα	f(1)=0	γν. αύξουσα

f γν φθίνουσα στο (0,1]

β) $\rightarrow$ Αν $x \in (1, +\infty)$ τότε: $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

$$\text{Άρα } x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} - 1 > 0$$

Παράδειγμα -6

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Στη συνέχεια να λυθεί η

$$\text{ανίσωση: } (3^{x-1} + 4^{x-1}) \cdot 5^{2x-1} < (3^{2x-1} + 4^{2x-1}) \cdot 5^{x-1} \quad (1)$$

Λύση

$$\text{Είναι: } f'(x) = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \right]' = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ γιατί}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0, \ln \frac{3}{5} < 0 \text{ (αφού } \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow \ln \frac{3}{5} < \ln 1 = 0), \left(\frac{4}{5}\right)^x > 0 \text{ και } \ln \frac{4}{5} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο R.

$$\text{Η (1) γίνεται: } \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow f(x-1) < f(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$* \text{αφού } f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R} \text{ είναι } x-1 > 2x-1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 0}$$

Παράδειγμα -7

Θεωρούμε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $xf'(x) + 1 < xe^{x-1}$ (1), για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι $f(x) < e^{x-1} - \ln x$, για κάθε $x > 1$.

Λύση

$$\text{Η δοσμένη σχέση (1)} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x} < e^{x-1} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x} - e^{x-1} < 0 \Leftrightarrow (f(x) + \ln x - e^{x-1})' < 0 \quad (2).$$

- Θέτω $g(x) = f(x) + \ln x - e^{x-1}$, $x > 0$, Είναι $g'(x) < 0$ λόγω της (2) ,οπότε γνησίως φθίνουσα και $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$.
- Άρα με $x > 1 \Rightarrow g(x) < g(1) \Rightarrow f(x) - e^{x-1} + \ln x < 0 \Rightarrow f(x) < e^{x-1} - \ln x$.

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ → Μορφή: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Μέθοδος:

Βρίσκουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα «1 - 1», δηλαδή:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Παράδειγμα -8

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x + x^3$.

(α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

(β) Να λυθεί η εξίσωση: $e^{\lambda^2-1} - e^{3\lambda^2-9} = -(\lambda^2-1)^3 + (3\lambda^2-9)^3$ (1)

Λύση

α) $f'(x) = e^x + 3x^2$ και επειδή $e^x > 0$ και $3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in A_f = \mathbb{R}$ είναι

$f'(x) > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η (1) γίνεται $e^{\lambda^2-1} + (\lambda^2-1)^3 = e^{3\lambda^2-9} + (3\lambda^2-9)^3$ η οποία με $x = \lambda^2 - 1$ και

$3\lambda^2 - 9$ γίνεται $f(\lambda^2-1) = f(3\lambda^2-9) \Leftrightarrow \lambda^2-1 = 3\lambda^2-9 \Leftrightarrow 2\lambda^2=8 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

* Η ισοδυναμία ισχύει γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1».

6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ: $F(x) = f(x+c) - f(c)$

Μέθοδος:

- Σε ανισώσεις μορφής $f(x_2) \pm f(x_1) = f(x_3) \pm f(x_4)$ θέτουμε βοηθητική συνάρτηση:
 $F(x) = f(x+c) - f(c)$
- Βρίσκουμε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως μονότονη άρα «1 - 1», δηλαδή:
 $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$

Παράδειγμα -9

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.

Να λυθεί η εξίσωση: $f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$, όταν $x \in [0, +\infty)$.

(Θέμα Γ Πανελλήνιες 2016)

i. $A_f = \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{ή} \\ e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από το $2x$ καθώς $e^{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Άρα $f \downarrow (-\infty, 0]$ και $f \uparrow [0, +\infty)$.

Ακόμα : η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2e^{x^2} \geq 0$ (*) για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$, όπου f' είναι συνεχής, άρα η $f \uparrow \mathbb{R}$.

(*) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $2(e^{x^2} - 1) \geq 0$ (από πριν) και $4x^2e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Έστω $h(x) = f(x+3) - f(x)$, $x \in [0, +\infty)$,

h παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με : $h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$

Για $x \geq 0$ έχουμε $x < x+3 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ και h συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών άρα h γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα «1-1» στο $[0, +\infty)$. Έτσι :

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow h(|\eta\mu x|) = h(x) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = x \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = x \Leftrightarrow x = 0$$

Καθώς : $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

7. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ $f(x)$

Μέθοδος

- Αποδεικνύω την ύπαρξη ρίζας ή ριζών $x_0, \dots$ της $f(x) = 0$ με έναν από τους γνωστούς τρόπους (προφανής ρίζα ή Θ.Β. ή Σ.Τ. ή ...)
- Χρήση ορισμού μονοτονίας για την f εκατέρωθεν των ριζών ως εξής:
 i) Αν f γν. αύξουσα στο (α, x_0) με $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) < 0$, **αφού** $f(x_0) = 0$ και ομοίως $f(x) > 0$ για $x \in (x_0, \beta)$.
 ii) Όμοια αν f γν. φθίνουσα.

Παράδειγμα -10

Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$

Λύση

- Είναι $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- $f'(x) = e^x + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$, άρα και γν. μονότονη.
- Προφανής ρίζα το 0 αφού $f(0) = e^0 + 0 - 1 = 0$. Συνεπώς το 0 είναι μοναδική ρίζα γιατί η f είναι γν. μονότονη.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+		+
f	γν. αύξουσα	$f(0) = 0$	γν. αύξουσα
Πρόσημο $f(x)$	-		+

- Για $x < 0 \xRightarrow{f \text{ γν. αύξ.}} f(x) < f(0) \xRightarrow{f(0)=0} f(x) < 0$
- Για $x > 0 \xRightarrow{f \text{ γν. αύξ.}} f(x) > f(0) \xRightarrow{f(0)=0} f(x) > 0$

**8. ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ της $f'(x) = 0$ - ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ $f'(x)$ [$f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$]
ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ**

αν δεν μπορώ να λύσω εξίσωση $f'(x) = 0$ ή $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$ - ΟΥΤΕ $f''(x)$ ή ΑΓΝΩΣΤΗ f

Μέθοδος

Βήμα 1

- Κάνω Θ.ROLLE . ΓΙΑ ΤΗΝ $f \dots$ και καταλήγω.. $f'(\xi) = 0$, για $\xi \in (\alpha, \beta)$ ή
- Θ. BOLZANO ΓΙΑ ΤΗΝ f'
- Προφανής ρίζα της $f'(x) = 0$ ή
- Σύνολο τιμών της f' με $0 \in f'(A)$

Βήμα 2

■ Χρήση ορισμού μονοτονίας για την f' ως εξής:

- Αν f' γν. αύξουσα στο (α, ξ) με $x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ και ομοίως $f'(x) > 0$ για $x \in (\xi, \beta)$.
- Όμοια αν f' γν. φθίνουσα .

Παράδειγμα -11

Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι:

- Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \xi]$ και γν. φθίνουσα στο $[\xi, \beta]$.
- Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Λύση

A. Θ.ROLLE για την f στο $[\alpha, \beta]$

B. Είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f'$ γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

x	α	ξ	β
f''	+		+
f'	γν. φθίνουσα		γν. φθίνουσα
Πρόσημο $f'(x)$	+	$f'(\xi) = 0$	-
Μονοτονία της f	Γν. αύξουσα		Γν. φθίνουσα
Πρόσημο της f	+-		+

➤ Για $\alpha < x < \xi \xRightarrow{f' \text{ γν. φθίν.}} f'(x) > f'(\xi) \xRightarrow{f'(\xi)=0} f'(x) > 0$

➤ Για $\xi < x < \beta \xRightarrow{f' \text{ γν. φθίν.}} f'(x) < f'(\xi) \xRightarrow{f'(\xi)=0} f'(x) < 0$

Γ. Είναι f γν. αύξουσα στο $[\alpha, \xi] \Rightarrow \alpha < x < \xi \xRightarrow{f \text{ γν. φθίν.}} f(\alpha) < f(x) \xRightarrow{f(\alpha)=0} 0 < f(x)$

Είναι f γν. φθίνουσα στο $[\xi, \beta] \Rightarrow \xi < x < \beta \xRightarrow{f \text{ γν. φθίν.}} f(x) > f(\beta) \xRightarrow{f(\beta)=0} f(x) > 0$.

2. ΔΙΠΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ή ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$$f'(\alpha) < \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < f'(\beta) \quad \text{ή} \quad \underline{\text{ΔΙΠΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ}}$$

Μέθοδος → Θ.Μ.Τ. Δ.Λ και ΟΡΙΣΜΟ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ για f' (ή ΔΟΣΜΕΝΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ).

Βήμα 1^ο: Με προσοχή στο μεσαίο σκέλος της ανισότητας επιλέγουμε κατάλληλη συνάρτηση $f(x)$ και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \quad (1)$$

Βήμα 2^ο: Ξεκινάμε από τη σχέση $a < \xi < \beta$ [ή δοσμένη ανισότητα] και δημιουργούμε στο μεσαίο σκέλος της ανισότητας τον τύπο της $f'(\xi)$ με χρήση ορισμού μονοτονίας για την f' ή κατασκευαστικά.

Βήμα 3^ο: Αντικαθιστούμε το $f'(\xi)$ με το κλάσμα που προέκυψε από το Θ.Μ.Τ. και με πράξεις καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν περιέχει μόνο x η ανισότητα παίρνουμε διάστημα $[0, x]$ και στη συνέχεια κατάλληλη μόνιμη ανισότητα..

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ → ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 2.5.

Σημείωση: Αν δεν δίνεται συνάρτηση και ζητείται να αποδειχθεί μόνο μια μόνιμη ανισότητα, κάνουμε εμείς κατάλληλη συνάρτηση.

10. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Μέθοδος

Αν μας ζητούν να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε θέτουμε :

- $f'(x) \geq 0$ αν f είναι γνησίως αύξουσα
- $f'(x) \leq 0$ αν f είναι γνησίως φθίνουσα

Άσκηση-12

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x^2 + \alpha^2) + 2\alpha x + 3$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Είναι $f(x) = 2\ln(x^2 + \alpha^2) + 2\alpha x + 3$ και $A_f = \mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = 2 \frac{2x}{x^2 + \alpha^2} + 2\alpha = \frac{2\alpha x^2 + 4x + 2\alpha^3}{x^2 + \alpha^2} = \frac{2(\alpha x^2 + 2x + \alpha^3)}{x^2 + \alpha^2}$$

Για να είναι f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(\alpha x^2 + 2x + \alpha^3)}{x^2 + \alpha^2} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 + 2x + \alpha^3 \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για να ισχύει αυτό πρέπει : $\alpha < 0$ και $\Delta \leq 0$

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 4\alpha^4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^4 \leq 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha^2)(1 + \alpha^2) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Επιπλέον $\alpha < 0$ άρα τελικά $\alpha \in (-\infty, -1]$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ μόνο όταν $\alpha \in (-\infty, -1] \Leftrightarrow \alpha \leq -1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

88. Να βρείτε τον τύπο της f αν :

A. $e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, x > 0$, με $f(1) = \ln 2$.

B. Αν $f(x) > 0$ και $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .

Γ. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ώστε $f(1) = e$ και $xf'(x) - f(x) = e^x x^2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

89. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο A με $0 \in A$ και ισχύουν :

$f'(x) - g^2(x) = 0$ και $g'(x) + f^2(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f^3 + g^3$ είναι σταθερή στο A .

(β) Αν $f(0) = g(0) = 1$ να βρεθεί η τιμή της $f^3 + g^3$.

90. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες και παραγωγίσιμες δύο φορές σε διάστημα A . Αν επιπλέον ισχύουν:

▪ $f''(x) = g''(x)$ και

▪ $0 \in A$ με $f(0) = g(0)$. Να δείξετε ότι :

(α) $f(x) - g(x) = cx$ για κάθε $x \in A$ και $c \in \mathbb{R}$.

(β) Αν η $f(x) = 0$ έχει δύο ετερόσημες ρίζες ρ_1, ρ_2 , τότε η $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

91. Θεωρούμε τη παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να τη προσδιορίσετε αν ισχύει: $g'(x) - h(x) = 0$, $g(x) + h'(x) = 0$, $g(0) = 0$, $h(0) = 1$.

92. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $x^2 f'(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με $f(1) = 1$.

i) Να δείξετε ότι η $g(x) = e^{-\frac{1}{x}} f(x)$ είναι σταθερή. ii) Να προσδιορίσετε την f

93. Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμες και ισχύει: $f'(x) = f(x) \ln(f(x))$ και $g'(x) = -g(x) \ln(g(x))$.

A. Να δείξετε ότι η $h(x) = [\ln f(x) - \eta \mu x]^2 + [\ln g(x) - \sigma \upsilon \nu x]^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

B. Να βρεθούν οι f, g αν $f(0) = 1$ και $g(0) = e$.

95. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$.

A. Αν $0 < \alpha < 1$ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Αν $\alpha > 1$ να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $\alpha^{\lambda^2} - \alpha^{\lambda-2} = \lambda^2 - (\lambda-2) \alpha^{\lambda^2} - (\lambda+2) = \alpha^{\lambda+2} - \lambda^2$ ως προς λ , με $0 < \alpha < 1$.

96. Έστω συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = g'(x) + \eta \mu^2 x + e^{2x}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Να δείξετε ότι $f(0) + g(x) < f(x) + g(0)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

97. (α) Να αποδείξετε ότι :

$$(A) \eta\mu x < 2x, \text{ για } x > 0. \quad (B) x > \eta\mu x - \frac{x^3}{3}, \text{ για } x > 0.$$

$$(Γ) x - \ln(1+x) < x, \text{ για } x < 0 \text{ και } (Δ) \sigma\upsilon\nu x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \text{ για } x \geq 0$$

98. Α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x$

Β. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ ισχύει: $\eta\mu x - \eta\mu y > x - y$.

99. Δείξτε ότι :

Α. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $x > \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$.

Β. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Γ. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\varepsilon\varphi \alpha}{\varepsilon\varphi \beta} < \frac{\alpha}{\beta}$.

100. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

Α. $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 15$

Β. $f(x) = 2ex(\ln x - 1) - x^2$

Γ. $f(x) = 6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x$

Δ. $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

101. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$ (ΘΕΜΑ Γ/2010)

102. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

103. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = x - \frac{1}{2} \ln^2 x$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1} \left(f(x) - e + \frac{3}{2} \right) > 1$.

104. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$.

Α. Να δείχτεί ότι η $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η $g'(x)$.

Β. Αν η f' είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να δείχτεί ότι και η g είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

105. Έστω f συνεχής στο $[α,β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με $f''(x) < 0$. Αν υπάρχει

$$x_0 \in (α,β) : f(x_0) = 0, \text{ να δείξετε ότι } \frac{f(α)}{x_0 - α} + \frac{f(β)}{x_0 - β} < 0.$$

106. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παρ/μη στο $(-\infty, α)$ και $f''(x) > 0$, να δείξετε ότι η

$$h(x) = f(x) + f(α) - 2f\left(\frac{x+α}{2}\right) \text{ είναι γν. φθίνουσα στο } (-\infty, α).$$

107. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x - x$

A. Να μελετήσετε την f' ως προς την μονοτονία.

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x > 1 \\ -1, & x=1 \end{cases}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

108. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και την $F(x) = f(2x) - f(x)$, $x \geq 0$.

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

B. Να βρείτε τις ρίζες της $f(x) = 0$ και τα πρόσημα της f .

Γ. Να μελετήσετε την F και την f' ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι

$$F(x) < xf'(2x), x > 0$$

Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{x}, & x > 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

109. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2021) = f(1)$ και f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

A. Να λύσετε την εξίσωση $f(x+2020) - f(x) = 0$

B. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x+2020) > f(2x)$.

110. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να μελετήσετε την f και την f' ως προς τη μονοτονία.

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^4+2) - f(2x^2+2) = f(x^4+1) - f(x^2+1) =$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^4+2) + f(x^2+3) > f(x^4+1) + f(x^2+4)$

111. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, για την οποία είναι: $xf'(x)e^{f(x)} + 1 = x$, για κάθε $x > 0$.

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

B. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x - \ln x)$, $x > 0$.

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \eta\mu x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

112. Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο πραγματικών $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \beta, \gamma \text{ πραγματικοί αριθμοί με } \beta^2 < 3\gamma.$$

A. Να βρεθεί η μονοτονία της f .

B. Να δείξετε ότι υπάρχει μία το πολύ ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

113. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
- Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^3 + x) - f(2 - \ln x) < 0$
114. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) + x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- B. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Γ. Να βρείτε την f^{-1} .
115. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + x \ln x - 2$.
- A. Να μελετήσετε την f' ως προς τη μονοτονία.
- B. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\xi \in (0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f σ' αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
116. Έστω f συνεχής στο x_0 με $xf(x_0) + x_0 f(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- A. Να δείχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$
- B. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και $f(1) = 2$, να βρείτε το x_0 ώστε η εφαπτομένη της γραφικής της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται απ' το $A(0,4)$.
117. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > x^2 - \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$.
- A. Να δείξετε ότι $f'(x) < 2x - \sigma \upsilon \nu x$, για κάθε $x < 0$.
- B. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2 - \eta \mu x$. Γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
118. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + xf'(x) = \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x) + \sigma \upsilon \nu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- B. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{1 - \sigma \upsilon \nu x}{x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$
- Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1 - \sigma \upsilon \nu x = x \eta \mu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
- Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε: $\xi \eta \mu \xi + \sigma \upsilon \nu \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2$