

2.5 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

▪ Εισαγωγή

Παράγουσα F [ή ΑΡΧΙΚΗ] μιας συνάρτησης f

Ορισμός 1: Αρχική συνάρτηση F (ή παράγουσα) μιας συνάρτησης f ορισμένης και συνεχούς στο διάστημα Δ λέμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση F για την οποία ισχύει: $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

A. ΑΜΜΕΣΑ

A1. Με τη βοήθεια ιδιοτήτων:

✓ Ιδιότητα Αθροίσματος: $f'(x) + g'(x) = (f(x) + g(x))'$

✓ Ιδιότητα Γινομένου: $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'$

✓ Ιδιότητα $c \cdot f'(x) = (cf(x))'$

✓ Ιδιότητα Πηλίκου: $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$

Παράδειγμα

Να βρείτε την παράγουσα F των συναρτήσεων

A. $f(x) = \eta\mu x + e^x - \frac{1}{x}$, $x > 0$ με $F(1) = 1 - \sigma\upsilon\nu 1^0$ και

B. $f(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x^2}$, $x < 0$.

Λύση

A). $f(x) = \eta\mu x + e^x - \frac{1}{x} = (-\sigma\upsilon\nu x)' + (e^x)' - (\ln x)' = (-\sigma\upsilon\nu x + e^x - \ln x)'$, $x > 0$.

Άρα $F(x) = -\sigma\upsilon\nu x + e^x - \ln x + c$, $x > 0$ (1).

Αλλά $F(1) = 1 - \sigma\upsilon\nu 1^0 \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu 1^0 + e - \ln 1 + c = 1 - \sigma\upsilon\nu 1^0 \Rightarrow c = 1 - e$.

Συνεπώς (1) $\Rightarrow F(x) = -\sigma\upsilon\nu x + e^x - \ln x + 1 - e$, $x > 0$.

B) $f(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x^2} = \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} \right)' + (x^2)' + 3 \left(\frac{1}{x} \right)' = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{x} \right)'$, $x < 0$.

Άρα $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{x} + c$, $x < 0$.

A2. Εξετάζω πρώτα απ' όλα μήπως είναι της μορφής: [έξυπνες παράγουσες]

1. ΜΟΡΦΗ: $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \rightarrow F(x) = \sqrt{f(x)}$, με $f(x) > 0$

2. ΜΟΡΦΗ: $\frac{f'(x)}{f(x)} \rightarrow F(x) = \ln|f(x)|$, με $f(x) > 0$

3. ΜΟΡΦΗ: $f'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = ce^x$

4. ΜΟΡΦΗ: $f'(x) + f(x)g'(x) = h(x)$ $\rightarrow$ πολλαπλασιάζουμε με $e^{g(x)}$ και έχουμε:

$$e^{g(x)}f'(x) + f(x)e^{g(x)}g'(x) = e^{g(x)}h(x) \Rightarrow \left[e^{g(x)}f(x) \right]' = \dots$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
 $f'(x) + f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } f'(x) - f(x) &= 2 \xRightarrow{\cdot e^x} e^x f'(x) - (e^x)' f(x) = 2e^x \Rightarrow (e^x f(x))' = (2e^x)' \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^x f(x) = 2e^x \Rightarrow f(x) = 2 \end{aligned}$$

5. ΜΟΡΦΗ: $f'(x) + g(x)f(x) = 0 \Rightarrow \dots$ (πολ / ζω με $e^{G(x)}$, όπου G παράγουσα της g).

$$\begin{aligned} G'(x) &= g(x) \\ \Rightarrow f'(x)e^{G(x)} + e^{G(x)}G'(x)f(x) &= 0 \Rightarrow F(x) = f(x)e^{G(x)}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε $f'(x) = 2xf(x)$, με $f(x) > 0$ και $f(0) = e$.

Λύση

$$\text{Έχουμε } f'(x) = 2xf(x) \Rightarrow f'(x) - 2xf(x) = 0 \Rightarrow f'(x) - (x^2)' f(x) = 0 \xRightarrow{\cdot e^{-x^2}}$$

$$f'(x)e^{-x^2} + e^{-x^2}(-x^2)' f(x) = 0 \Rightarrow (f(x)e^{-x^2})' = (c)' \Rightarrow f(x)e^{-x^2} = c \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = ce^{x^2}, \text{ με } c \in \mathbb{R}} .$$

➤ $0 = (c)'$	➤ $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))'$
➤ $c = (cx)'$	➤ $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$
➤ $x^\alpha = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)', \alpha \neq -1$	➤ $f(x) + x \cdot f'(x) = (x \cdot f(x))'$
➤ $\frac{1}{x} = (\ln x)', x \neq 0$	➤ $\frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \left(\frac{f(x)}{x} \right)'$
➤ $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right)', x \neq 0$	➤ $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$
➤ $\frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})'$	➤ $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)} \right)'$
➤ $\eta\mu x = (-\sigma\upsilon\nu x)'$	➤ $e^{f(x)} \cdot f'(x) = (e^{f(x)})'$
➤ $\sigma\upsilon\nu x = (\eta\mu x)'$	➤ $f^v(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^{v+1}(x)}{v+1} \right)' \quad \text{π.χ.} \quad f(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^2(x)}{2} \right)'$
➤ $e^x = (e^x)'$	➤ $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$
➤ $a^x = \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)'$	➤ $\sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x) = (\eta\mu f(x))'$
➤ $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\epsilon\phi x)'$	➤ $\eta\mu f(x) \cdot f'(x) = (-\sigma\upsilon\nu f(x))'$
➤ $\frac{1}{\eta\mu^2 x} = (-\sigma\phi x)'$	

Ασκήσεις

58. Να βρείτε τον τύπο της f αν :

A. $e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, x > 0$, με $f(1) = \ln 2$.

B. Αν $f(x) > 0$ και $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(0) = 1$.

Γ. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ώστε $f(1) = e$ και $xf'(x) - f(x) = e^x x^2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Δ. Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε να είναι: $e^x [g(x) + g'(x)] = x^2$

59. Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f ώστε:

α. $f'(x) = 2xf(x), f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. $f'(x) + f(x) = x^3 + 3x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. $f(x) + x = xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.

60. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε μια παράγουσα F των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x + \sin x + \frac{1}{x}, x > 0$. 2. $f(x) = -\eta \mu x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$.

3. $g(x) = f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x}, x > 0$.

4. $g(x) = f'(x) \sin x - f(x) \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$.

5. $g(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}, x > 0$.

61. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f με: $f'(x) + f(x) \cdot 2x = 4x, x \in \mathbb{R}$ και

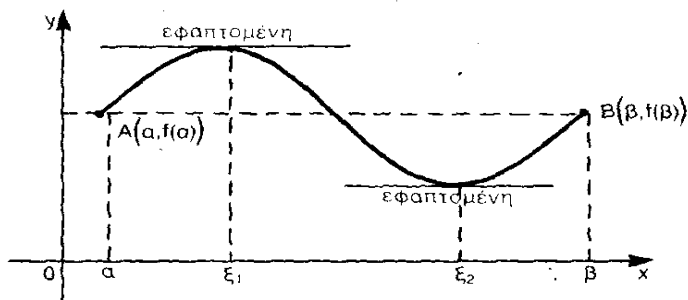
$f(0) = 3$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν η f είναι:

- συνεχής στο $[α,β]$
- παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ και
- $f(α) = f(β)$

τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $ξ ∈ (α,β) : f'(ξ) = 0$.



Γεωμετρική ερμηνεία: Υπάρχει ένας τουλάχιστον $ξ ∈ (α,β)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(ξ, f(ξ))$ να είναι παράλληλη του $x'x$.

ΣΧΟΛΙΑ:

Αν μια συνάρτηση f πληρεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[α,β]$, τότε:

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ$ ή $x_0 ∈ (α,β)$ ώστε $f'(ξ) = 0$.
2. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(α,β)$.
3. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(ξ, f(ξ))$ με $ξ ∈ (α,β)$ ώστε η εφαπτομένη ε να είναι παράλληλη στον $x'x$ [$λ = f'(ξ) = 0$]
4. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $ξ ∈ (α,β)$.

1. ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE – ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f'(x) = 0$

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται:

A. Να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(ξ, f(ξ))$ με $ξ ∈ (α,β)$ ώστε η εφαπτομένη ε της c_f να είναι παράλληλη στον $x'x$ [$f'(ξ) = 0$] → **Θ. ROLLE για την f.**

B. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(α,β)$ → **Θ. ROLLE για την f.**

Γ. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $ξ ∈ (α,β)$

→ **Θ. ROLLE για την f.**

Δ. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες, τότε η $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(α,β)$ → **Θ. ROLLE για την f.**

Παράδειγμα-1

Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την συνάρτηση :

$f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in [1, 3]$. Στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (1, 3)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$.

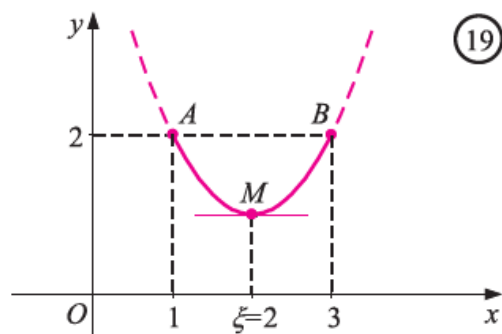
Λύση

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ ως πολυωνυμική
- Η f και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$, με $f'(x) = (x^2)' - (4x)' + (5)' = 2x - 4$ (1).
- $$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 4 + 5 = 2 \\ f(3) &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = f(3),$$

(Σχ. 19), ισχύει το θεώρημα Rolle.

- Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (1, 3)$ τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2\xi - 4 = 0 \Rightarrow \xi = 2.$$



Παράδειγμα-2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-1, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της c_f στο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Λύση

✚ Η συνάρτηση f είναι:

- Συνεχής στο $[-1, 1]$ σαν τετραγωνική ρίζα συνεχούς συνάρτησης
- παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $f'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' \Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ και
- $f(-1) = f(1) = 0$

Άρα ισχύει το Θ.ROLLE, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή $\lambda_\xi = 0$ ή $\varepsilon//x'x$.

2. ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f(x) = 0$ ΜΕ Θ. ROLLE ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ F ΤΗΣ f

- προφανής ρίζα-επαλήθευση
- Θ.Bolzano
- Σύνολο τιμών με το 0 να ανήκει σ' αυτό.
- Θ.ROLLE ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ F ή ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΕΑΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ. → όταν είναι δύσκολο να εφαρμόσουμε κάποια μέθοδο από τις προηγούμενες.

Παράδειγμα-3

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (-1, 0)$ της εξίσωσης $3\lambda x^2 + 2x = \lambda - 1, .$

Λύση

➤ Θεωρούμε $f(x) = 3\lambda x^2 + 2x - \lambda + 1, x \in \mathbb{R}.$

(Επιχειρούμε να κάνουμε Θ.Bolzano. Είναι:

- Συνεχής στο $[-1, 0]$ σαν πολυωνυμική συνάρτηση.
- $f(-1) = 2\lambda - 1, f(0) = 1 - \lambda$. Επειδή δεν μπορούμε να δείξουμε ότι $f(-1)f(0) < 0$, άρα δεν εφαρμόζουμε Θ Bolzano).
- Οπότε θα βρούμε μια αρχική της f και θα κάνουμε Θ. Rolle.

$$3\lambda x^2 + 2x = \lambda - 1 \Rightarrow 3\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \left(\lambda x^3 + x^2 - (\lambda - 1)x \right)' = 0,$$

έχει μια ρίζα $\xi \in (-1, 0)$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $F(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda - 1)x$, $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow$ αρχική ή παράγουσα της f .

- F συνεχής στο $[-1, 0]$ σαν πολυωνυμική
- παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ με $F'(x) = 3\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 1)$
- $F(-1) = F(0) = 0$, Άρα ισχύει το Θ. Rolle.

Οπότε η εξίσωση $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 1) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$

Παράδειγμα-4

Να αποδειχτεί ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)x$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 1]$.

ii) Η εξίσωση $3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

i) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, 1]$ αφού

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f'(x) = 3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1)$ και
- ισχύει $f(0) = f(1) = 0$.

Συνεπώς από Θ. Rolle υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$ (1)

ii) Η $f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)x$ είναι αρχική της $3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0$, οπότε από την (1) $\Rightarrow 3\lambda \xi^2 + 2\xi - (\lambda + 1) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $\lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (0, 1)$.

Παράδειγμα-5

Δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ διάστημα και παραγωγίσιμες στο (α, β) . Επίσης είναι $g(\alpha) \neq g(\beta)$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} \quad (1)$$

Λύση

$$H(1) \Leftrightarrow [g(\beta) - g(\alpha)] \cdot f'(\xi) - [f(\beta) - f(\alpha)] \cdot g'(\xi) = 0$$

Οπότε θεωρώ $h(x) = [g(\beta) - g(\alpha)]f(x) - [f(\beta) - f(\alpha)]g(x) \rightarrow$ ΑΡΧΙΚΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΕΑΣ. Οπότε είναι:

- $h(x)$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ σαν γραμμικός συνδυασμός των συνεχών f, g .
- $h(x)$ παραγωγίσιμη στο (α, β) για τον ίδιο λόγο με $h'(x) = [g(\beta) - g(\alpha)]f'(x) - [f(\beta) - f(\alpha)]g'(x)$ (2).

- $h(\alpha) = [g(\beta) - g(\alpha)]f(\alpha) - [f(\beta) - f(\alpha)]g(\alpha) = g(\beta)f(\alpha) - f(\beta)g(\alpha)$
- $h(\beta) = [g(\beta) - g(\alpha)]f(\beta) - [f(\beta) - f(\alpha)]g(\beta) = f(\alpha)g(\beta) - g(\alpha)f(\beta)$

Άρα $h(\alpha) = h(\beta)$ και από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow [g(\beta) - g(\alpha)]f(\xi) - [f(\beta) - f(\alpha)]g'(\xi) = 0.$$

Παράδειγμα-6

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με ρίζες x_1, x_2 και $x_1 < x_2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = 2\xi \cdot f(\xi)$ (1).

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση (1) $\Leftrightarrow$

$$f'(x) = 2x \cdot f(x) \Rightarrow f'(x) - 2x \cdot f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) + (-x^2)' \cdot f(x) = 0$$

$$\text{πολ/ζω με } e^{-x^2} \Rightarrow e^{-x^2} f'(x) + e^{-x^2} (-x^2)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{(e^{-x^2} \cdot f(x))' = 0}, \text{ να έχει μια τουλάχιστον}$$

ρίζα στο (x_1, x_2) .

Οπότε θεωρώ συνάρτηση $g(x) = e^{-x^2} f(x)$, $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ **ΑΡΧΙΚΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΕΑΣ**. Είναι:

■ $g(x)$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$ σαν γινόμενο συνεχών.

$g(x)$ παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) για τον ίδιο λόγο με

$$g'(x) = (e^{-x^2} f(x))' = e^{-x^2} (-x^2)' \cdot f(x) + e^{-x^2} f'(x) = e^{-x^2} (-2xf(x) + f'(x)) \quad (2).$$

$$g(x_1) = e^{-x_1^2} f(x_1) = e^{-x_1^2} \cdot 0 = 0, \text{ αφού } x_1 \text{ ρίζα της } f \Rightarrow f(x_1) = 0$$

$$g(x_2) = e^{-x_2^2} f(x_2) = e^{-x_2^2} \cdot 0 = 0, \text{ αφού } x_2 \text{ ρίζα της } f \Rightarrow f(x_2) = 0$$

Άρα $g(x_1) = g(x_2)$ και από το Θεώρ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$:

$$g'(\xi) = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} e^{-\xi^2} (-\xi^2)' \cdot f(\xi) + e^{-\xi^2} f'(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$e^{-\xi^2} (-2\xi f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Rightarrow -2\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 2\xi f(\xi) \rightarrow \text{αποδείχτηκε.}$$

3 ΥΠΑΡΞΗ κ- ΡΙΖΩΝ της εξίσωσης $f(x) = 0$

A. Υπαρξη μίας τουλάχιστον ρίζας

ΜΕΘΟΔΟΙ:

1. → Θεώρημα Bolzano
2. → Σύνολο τιμών
3. → Προφανής με δοκιμή.
4. → Θεώρημα Rolle για την παράγουσα F της f.

ΜΕΘΟΔΟΙ:

ΒΗΜΑ1: την ύπαρξη ρίζας με 1 από τους 4 παραπάνω τρόπους.

ΒΗΜΑ2: Για τη μοναδικότητα, δείχνουμε ότι η f είναι:

- γνησίως μονότονη ή
- « 1-1 » ή

Παράδειγμα-7

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με και $f'(x) \neq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x - 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

ΒΗΜΑ 1: (ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ)

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η $f(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) - e^x + 1 = 0$ να έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$, Θέτω $g(x) = f(x) - e^x + 1$, στο $[0, 1]$.

- g συνεχής στο $[0, 1]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $g(0) = f(0) - e^0 + 1 = f(0) > 0$, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, από υπόθεση
- $g(1) = f(1) - e + 1 = (f(1) - 1) + (2 - e) < 0$, αφού $f(x) < 1$, άρα και $f(1) - 1 < 0$, ενώ $2 - e < 0$.

ΑΡΑ $g(0)g(1) < 0$, δηλαδή ισχύει το Θ. Bolzano, οπότε η $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^x - 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΒΗΜΑ 2: (ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΡΙΖΑΣ) → Rolle σε ΑΤΟΠΟ

Έστω ότι η $g(x) = 0$ έχει 2 ρίζες στο διάστημα $(0, 1)$ τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Τότε:

- g συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq [0, 1]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $g'(x) = f'(x) - e^x$ (1).
- $g(x_1) = g(x_2) = 0$, αφού x_1, x_2 ρίζες της $g(x) = 0$

Άρα ισχύει το Θ. Rolle, οπότε η εξίσωση $g'(x) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(x_1, x_2) \subseteq (0, 1)$, ΑΤΟΠΟ γιατί $f'(x) \neq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Γ.Η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα

- (α) πάμε κατευθείαν με απαγωγή σε άτοπο με Θ. Rolle ή
- (β) f γνησίως μονότονη ή
- (γ) f "1-1" (χωρίς θεώρημα B - W) ή
- (δ) με το θεώρημα Rolle σε ΑΤΟΠΟ

Δ. Η $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες → με 2 φορές Θ. Rolle για f και θ. Rolle για f' και

$f''(\xi) = 0 \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ.

Συγκεκριμένα:

- Υποθέτουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει 3 ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$
- 2 φορές Θ. Rolle στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$ και ύπαρξη

4. ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ Θ. ROLLE - ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f''(x) = 0$

Παράδειγμα -8:

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο (2) τουλάχιστον ρίζες σε διάστημα Δ , τότε η $f'(x) = 0$ έχει μια (1) τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ .

Απόδειξη

Λύση

✚ Έστω δύο ρίζες $x_1, x_2 \in \Delta$ της f με $x_1 < x_2$. Η συνάρτηση f είναι:

- Συνεχής στο $[x_1, x_2]$ σαν παραγωγίσιμη
- παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) από υπόθεση
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$, αφού οι x_1, x_2 είναι ρίζες της f .

Άρα ισχύει το Θ. ROLLE, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

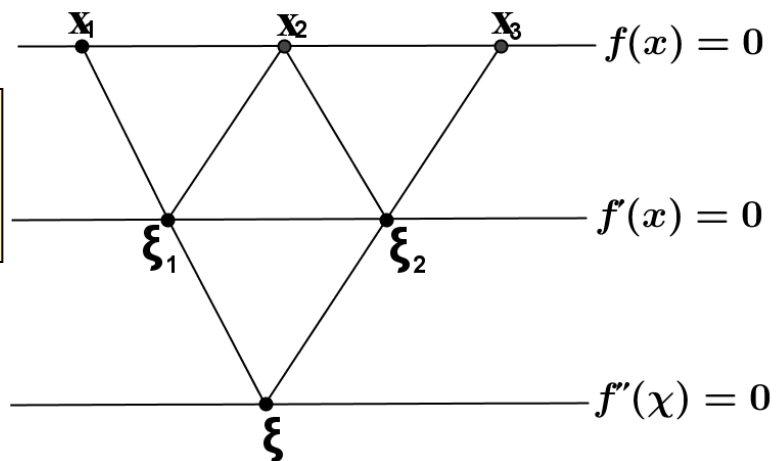
Πρόταση-2:

- Αν η $f(x) = 0$ έχει 3 ρίζες, τότε η $f'(x) = 0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες και η $f''(x) = 0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα.

κ.ο.κ.

ΜΕΘΟΔΟΣ:

- 2 φορές Θ. Rolle → για την f και
- 1 φορά Θ. Rolle → για την f'



Παράδειγμα -9

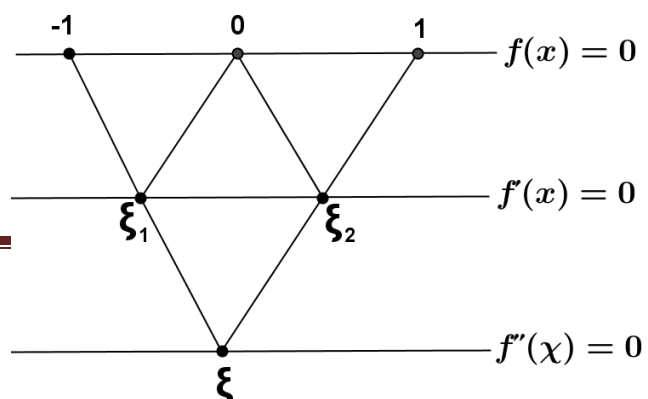
Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = f(0) = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

Λύση

1) Θ. Rolle για την f στο $[-1, 0]$



- συνεχής στο $[-1, 0]$ ως παραγωγίσιμη
 - παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ από υπόθεση
 - $f(-1) = f(0)$, από υπόθεση. Άρα ισχύει το Θ. Rolle, , οπότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi_1 \in (-1, 0)$
- τ.ω. $f'(\xi_1) = 0$ (1)

2) Θ. Rolle για την στο f στο $[0, 1]$

- συνεχής στο $[0, 1]$ ως παραγωγίσιμη
- παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ από υπόθεση
- $f(0) = f(1)$, από υπόθεση
- Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi_2 \in (0, 1)$ τ.ω. $f'(\xi_2) = 0$ (2)

3) Θ. Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$

- συνεχής Η f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ γιατί η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη
- παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) από υπόθεση
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ από τις σχέσεις (1) και (2) .
- Άρα ισχύει το Θ. Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

5. ΥΠΑΡΞΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΑΙ Θ. ROLLE

(ΜΕ άγνωστη f και σε άγνωστο σημείο επαφής της $M(\xi, f(\xi))$)

ΜΕΘΟΔΟΣ:

- Γράφουμε την εξίσωση εφαπτομένης στο $M(\xi, f(\xi)) \rightarrow (\varepsilon)$
- Από τα δεδομένα αντικαθιστούμε τα x, y της $(\varepsilon) \rightarrow$ σχέση (1)
- Θ. Rolle $\rightarrow$ για την αρχική της εξίσωσης (1)

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

- Εξίσωση εφαπτομένης (ε) στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$
- Η (ε) διέρχεται από την αρχή αξόνων $O(0,0)$, οπότε για $x=0, y=0$ η (ε) γίνεται:
- $0 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Rightarrow \boxed{f(\xi) = \xi f'(\xi), (1)}$
- Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει η εξίσωση (1), δηλαδή

$$f(x) = xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - (x)'f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0, (2)}$$
 έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (x_1, x_2)$.

- Θέτω $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$ και εφαρμόζω Θ. Rolle για την g στο $[x_1, x_2]$
- ... Η g συνεχής στο $[x_1, x_2]$ σαν πηλίκο συνεχών (f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής)
- .. Η g παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} \Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}}, (3).$$

$$g(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} = 0, g(x_2) = \frac{f(x_2)}{x_2} = 0$$

(αφού x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$).

Άρα $g(x_1) = g(x_2)$. Οπότε ισχύει το Θ. Rolle, συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{(3) \xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

6. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΑΠΟ Θ. ROLLE

ΜΕΘΟΔΟΣ → Απαιτούμε:

1. → $f(a) = f(b)$

2. → f συνεχής στο $[a, b]$

3. → f παραγωγίσιμη στο (a, b)

Παράδειγμα -11

Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \in [-1,0) \\ x^3 + \gamma, & \text{αν } x \in [0,1] \end{cases}$ Να βρεθούν τα

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.ROLLE στο $[-1,1]$. Στη συνέχεια να βρείτε τα $\xi \in (-1,1)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Λύση

Πρέπει:

$$\bullet \quad f(-1) = f(1) \Rightarrow \alpha - \beta = 1 + \gamma \Rightarrow \underline{\beta = \alpha - \gamma - 1} \quad (1).$$

• Η f να είναι συνεχής στο $[-1,1]$

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0) \cup (0,1]$ σαν πολυωνυμική.

Πρέπει να είναι συνεχής και στο 0. Δηλαδή:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 + \beta x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + \gamma) = \gamma \Leftrightarrow 0 = \gamma = \gamma \Leftrightarrow \underline{\gamma = 0} \quad (2)$$

$$\bullet \quad \text{Από (1), (2) έχουμε } \beta = \alpha - 1, \text{ οπότε } f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + (\alpha - 1)x, & \text{αν } x \in [-1,0) \\ x^3, & \text{αν } x \in [0,1] \end{cases}$$

• Η f να είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (-1,0) \cup (0,1) \text{ με } f'(x) = \begin{cases} 2\alpha x + (\alpha - 1), & \text{αν } x \in (-1,0) \\ 3x^2, & \text{αν } x \in (0,1) \end{cases}$$

Πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο 0. Δηλαδή:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^2 + (\alpha - 1)x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 0}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x + \alpha - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 1} \quad (3)$$

Από (1), (2), και (3) έχουμε $\alpha = 1$, $\beta = 0$ και $\gamma = 0$.

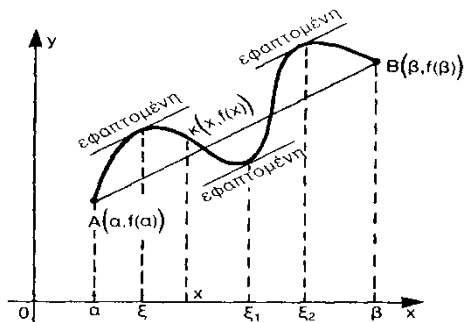
$$\bullet \quad \text{Συνεπώς } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in [-1,0) \\ x^3, & \text{αν } x \in [0,1] \end{cases} \text{ και } f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \in (-1,0) \\ 3x^2, & \text{αν } x \in [0,1) \end{cases}.$$

• Αν $\xi \in (-1,0)$ με $f'(\xi) = 0 \Rightarrow 2\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0 \notin (-1,0) \rightarrow$ απορρίπτεται.

• Αν $\xi \in [0,1)$ με $f'(\xi) = 0 \Rightarrow 3\xi^2 = 0 \Rightarrow \xi = 0 \rightarrow$ δεκτή.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (LANGRANCE JOSEPH-LOUIS)

• Αν μια συνάρτηση f είναι:
 • συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
 • παραγωγίσιμη στο (α, β) } $\Rightarrow$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$



Γεωμετρικά:

Είναι: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, $\lambda_{AB} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και $\lambda_\varepsilon = f'(\xi)$, άρα $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB}$. Δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη ε της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ που είναι παράλληλη στην ευθεία AB με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. (Στο σχήμα μας υπάρχουν και άλλες $\varepsilon_1 \parallel AB, \varepsilon_2 \parallel AB, \varepsilon_3 \parallel AB$)

ΣΧΟΛΙΑ:

Αν μια συνάρτηση f πληρεί τις προϋποθέσεις του Θ. Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε:

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ή $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \lambda_{AB}$.
- Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη ε να είναι παράλληλη στην ευθεία AB, με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

1. ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ Θ.Μ.Τ. Ασκήσεις στις οποίες ζητείται:

A. Αποδείξεις ισοτήτων με παράγωγο σ' ένα τουλάχιστον ξ ή $x_0 \in (\alpha, \beta)$

B. Να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη ε να είναι παράλληλη σε ευθεία που διέρχεται από τα A, B.

Γ. Να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη ε να είναι κάθετη σε ευθεία που διέρχεται από τα A, B.

Δ. Να βρούμε τιμή ή και το πρόσημο της $f'(\xi)$

Παράδειγμα -1

Μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$: $f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$

(ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $x_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $x_2 \in (\gamma, \beta)$ με

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$$

Λύση

(i). Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - (\alpha + \beta)$. Είναι f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα και η g σαν άθροισμα συνεχών

$$g(\alpha) = f(\alpha) + \alpha - (\alpha + \beta) = f(\alpha) - \beta = \alpha - \beta, \quad g(\beta) = f(\beta) + \beta - (\alpha + \beta) = f(\beta) - \alpha = \beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$$

άρα, $g(\alpha) \cdot g(\beta) = -(\alpha - \beta)^2 < 0$, αφού $\alpha \neq \beta$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) + \gamma - (\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma$

(ii). ΘΜΤ ΣΤΟ $[\alpha, \gamma] \subset [\alpha, \beta]$

- Η f συνεχής στο $[\alpha, \gamma] \subset [\alpha, \beta]$ και $[\gamma, \beta] \subset [\alpha, \beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (α, β) άρα και στο $(\alpha, \gamma) \subset (\alpha, \beta)$

Συνεπώς, εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. Έτσι υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \gamma)$ τ.ω.
$$f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \quad (1)$$

ΘΜΤ ΣΤΟ $[\gamma, \beta] \subset [\alpha, \beta]$

- Η f συνεχής στο $[\gamma, \beta] \subset [\alpha, \beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (α, β) άρα και στο $(\alpha, \gamma) \subset (\alpha, \beta)$.

Συνεπώς, εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. Έτσι υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \gamma)$ τ.ω.
$$f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \quad (2)$$

$$\text{Οπότε} \quad f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha + \beta - \gamma - \alpha}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha - \beta + \gamma}{\beta - \gamma} = \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma} = 1$$

2. ΔΙΠΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ή ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$$f'(\alpha) < \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < f'(\beta) \quad \text{ή} \quad \underline{\text{ΔΙΠΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ}}$$

Μέθοδος → Θ.Μ.Τ. Δ.Λ και ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ για f' (ή ΔΟΣΜΕΝΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ).

Βήμα 1ο: Με προσοχή στο μεσαίο σκέλος της ανισότητας επιλέγουμε κατάλληλη συνάρτηση $f(x)$ και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \quad (1)$$

Βήμα 2ο: Ξεκινάμε από τη σχέση $\alpha < \xi < \beta$ [ή δοσμένη ανισότητα] και δημιουργούμε στο μεσαίο σκέλος της ανισότητας τον τύπο της $f'(\xi)$ με χρήση ορισμού μονοτονίας για την f' ή κατασκευαστικά.

Βήμα 3ο: Αντικαθιστούμε το $f'(\xi)$ με το κλάσμα που προέκυψε από το Θ.Μ.Τ. και με πράξεις καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα.

Παράδειγμα -2

$$\text{Αν } 0 < \alpha < \beta \quad \forall \delta > 0 \quad 1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$$

Απόδειξη

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1 \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \beta - \ln \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \beta - \ln \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \quad (2) \text{ αρκεί να δείξουμε αυτή.}$$

- Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ στο $[\alpha, \beta]$, οπότε εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. (γιατί;) και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} \quad (3)$$

- Αλλά $\xi \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$.

3. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: $f(x) > g(x)$ [ή $f(x) < g(x)$]

Μέθοδος:

→ Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ σε κατάλληλο διάστημα [αν περιέχει μόνο x παίρνουμε διάστημα $[0, x]$] και στη συνέχεια κατάλληλη μόνιμη ανισότητα. ή
→ ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΤΗ ΠΑΡ. 2.6.

Παράδειγμα -3

Να δείχθει ότι $e^x > \frac{1}{2x+1}$ (1) για κάθε $x \in (0,1)$

Απόδειξη

$$H (1) \Leftrightarrow e^x(2x+1) > 1 \Leftrightarrow e^x(2x+1) - 1 > 0$$

Θεωρώ τη συνάρτηση f με $f(x) = e^x(2x+1) - 1$. Οπότε στο $[0,x] \subset (0,1)$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f . Άρα

$$\text{υπάρχει } \xi \in (0,x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad (2).$$

$$\text{Αλλά } f'(x) = 2e^x(2x+1) = 2xe^x + 3e^x, \text{ άρα } f'(\xi) = 2\xi e^\xi + 3e^\xi$$

$$H (2) \text{ δίνει: } 2\xi \cdot e^\xi + 3e^\xi = \frac{e^x(2x+1) - 1}{x} \Leftrightarrow x \cdot (2\xi e^\xi + 3e^\xi) = e^x(2x+1) - 1 \quad (3)$$

$$\text{Όμως, } \xi \in (0,x) \Leftrightarrow 0 < \xi < x \Leftrightarrow \dots x \cdot (2\xi e^\xi + 3e^\xi) > 0$$

$$\text{Έτσι η (3) δίνει και } e^x(2x+1) - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x(2x+1) > 1 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2x+1}$$

4. ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f''(x)$

Μέθοδος:

- 2 φορές Θ.Μ.Τ $\rightarrow$ για την f . και
- 1 φορά Θ. Rolle $\rightarrow$ για την f'

Παράδειγμα -4

Θεωρούμε συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\square$ με $f(\alpha) + f(3\alpha) = 2f(2\alpha)$, $\alpha > 0$. Να δείξατε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, 3\alpha)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση

$$\text{Έχουμε } f(\alpha) + f(3\alpha) = 2f(2\alpha) \Leftrightarrow f(2\alpha) - f(\alpha) = f(3\alpha) - f(2\alpha) \quad (1).$$

- Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στο διάστημα $[\alpha, 2\alpha]$
- f συνεχής στο $[\alpha, 2\alpha] \subseteq \square$ γιατί είναι παραγωγίσιμη
- f παραγωγίσιμη στο $(\alpha, 2\alpha)$ από υπόθεση,

$$\text{Άρα από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi_1 \in (\alpha, 2\alpha) \text{ ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(2\alpha) - f(\alpha)}{2\alpha - \alpha} \Rightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2\alpha) - f(\alpha)}{\alpha} \quad (2).$$

- Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στο διάστημα $[2\alpha, 3\alpha]$

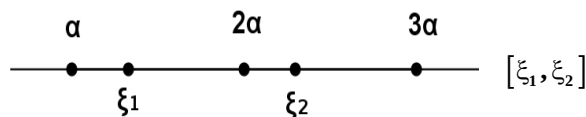
- f συνεχής στο $[2\alpha, 3\alpha] \subseteq \square$ γιατί είναι παραγωγίσιμη
- f παραγωγίσιμη στο $(2\alpha, 3\alpha)$ από υπόθεση,

$$\text{Άρα από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi_2 \in (2\alpha, 3\alpha) \text{ ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(3\alpha) - f(2\alpha)}{3\alpha - 2\alpha} \Rightarrow$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3\alpha) - f(2\alpha)}{\alpha} \quad (3)$$

Από (1),(2) και (3) προκύπτει ότι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (4).

▪ Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την f' στο διάστημα



► f' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subset [\alpha, 3\alpha]$ γιατί είναι

παραγωγίσιμη

► f' παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) από υπόθεση

► $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ από την (4).

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\xi_1, \xi_2) \subset (\alpha, 3\alpha)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Εύρεση παράγουσας-Αντιπαραγωγή

62. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε μια παράγουσα F των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x + \sin x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

2. $f(x) = -\eta\mu x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

3. $g(x) = f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x}$, $x > 0$.

4. $g(x) = f'(x) \sin x - f(x) \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. $g(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$, $x > 0$.

63. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f με : $f'(x) + f(x) \cdot 2x = 4x$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$.

Θεώρημα Rolle

64. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο διάστημα $[3, 4]$ με $f(3) = f(4)$, ο

αριθμός $g(3)$ είναι λύση της εξίσωσης $e^x + x^2 - 1 = 0$, ενώ ο $g(4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{e^{h(x)}}$, με $h(x) = \ln(e^x - x)$.

A. Να υπολογίσετε του αριθμούς $g(3)$ και $g(4)$.

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + g'(x)f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(3, 4)$.

65. Έστω συνάρτηση $f: (2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(x)f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (2, 3)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(2, 3)$.

66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \in [-1, 0] \\ \gamma x^2 + 2x + 2, & x \in (0, 1] \end{cases}$

(α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την f στο $[-1, 1]$.

(β) Να βρεθεί ο $\xi \in (-1, 1)$ του Θ. Rolle

67. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & \text{αν } x \in [-1, 0) \\ \gamma x^2 + 4x + 4 & \text{αν } x \in [0, 1] \end{cases}$

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. ROLLE στο $[-1, 1]$.

68. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[1, 6]$. Αν ισχύει $f(1) = 6f(6)$ ναδειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (1, 6)$ ώστε $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

69. A) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ καθώς και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$: $f'(x_0) + \lambda f(x_0) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B) Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της g . (E.M.E.)

70. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) = ef(\beta) \neq 0$.

i). Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ για τον οποίο εφαρμόζεται στο $[\alpha, \beta]$ το Θ. Rolle για τη συνάρτηση g με $g(x) = e^{\mu x} f(x)$.

ii). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ για τον οποίο ισχύει $f(x_0) = (\alpha - \beta)f'(x_0)$

iii). Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$, να αποδείξετε ότι το σημείο $A(x_0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με $h(x) = f(x) + (\beta - \alpha)f'(x)$ με τον άξονα $x'x$.

71. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, ναδειχτεί ότι η εξίσωση $f'(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) . [πολ/σμός με $e^{g(x)}$].

72. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

(α) Ναδειχθεί ότι για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x - x_0}$ και $x_0 \notin [\alpha, \beta]$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = 0$

(β) Να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ περνάει από το σημείο $N(x_0, 0) \rightarrow$ **ύπαρξη εφαπτομένης**.

73. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) - f(x)}{\alpha + \beta - x}$ ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) - f(\xi)}{\alpha + \beta - \xi}$

Θεώρημα Μέσης Τιμής

74. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(a) = \beta$ και $f(\beta) = a$, με $a < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ που είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x - y + 2021 = 0$. $\rightarrow$ ΘΜΤ

75. Θεωρούμε τη συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2, 8]$ τέτοια ώστε: $f(2) + f(8) = 2f(5)$ (1)

A. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (2, 8)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0$.

B. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 6]$ με $f(0) = 2$ και $1 \leq f'(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (0, 6)$, ν' αποδειχθεί ότι: $8 \leq f(6) \leq 26$.

76. A. Αν $\alpha < \beta$ και $\omega > 1$ να δείξετε ότι $\omega^\alpha \ln \omega < \frac{\omega^\beta - \omega^\alpha}{\beta - \alpha} < \omega^\beta \ln \omega$.

B. Αν $\alpha > \beta > 0$ να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{\alpha} < \ln \alpha - \ln \beta < \frac{\alpha - \beta}{\beta}$

Γ. Να δείξετε ότι $\frac{1}{3} < \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$. Δ. Αν $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι: $2^\alpha \ln 2 < \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} < 2^\beta \ln 2$.

77. (α) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) = 6$ και $f'(x) \leq 9$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να δειχθεί ότι $f(x) \leq 9x + 6$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(β) Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 6]$ με $f(0) = 2$ και $3 \leq f'(x) \leq 7$ για κάθε $x \in (0, 6)$, δείξτε ότι $20 \leq f(6) \leq 44$.

78. Υποθέτουμε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta)$. Αν $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με $\gamma - \alpha = \beta - \gamma$, να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ ώστε $f'(\xi_1) = -f'(\xi_2)$.

79. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο $[3, 8]$ και παραγωγίσιμη στο $(3, 8)$ με $f(3) = 8, f(8) = 3$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (3, 8)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): y = x$

80. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

A. Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

B. Αν γνωρίζουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα, να δειχτεί ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, $x > 0$.

81. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f(2) = 0$ και συνάρτηση g με $g(x) = f(1) \cdot (2x - x^2)$. Να δειχτεί ότι:

α. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε $f'(\xi_1) = g'(\xi_1)$ και $f'(\xi_2) = g'(\xi_2)$

β. Υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ ώστε $f'(1) = \frac{1}{2} f''(\xi)$.

82. Έστω $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$. Αν είναι

παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα με $f'(x) < \frac{1}{3}$ για κάθε $x < 0$, να δειχτεί ότι:

$\frac{x}{3} < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x < 0$.

83. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ τέμνει την C_f στο $B(\beta, f(\beta))$ με $\beta > \alpha$, να δείξετε ότι:

A. Η f' δεν είναι «1-1» και

B. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

Σύνθετες ασκήσεις

84. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

85. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$, με $f(0) = \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}$ (1). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$, ώστε $f'(\xi) = 0$.

86. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ συνάρτηση f με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Να αποδείξετε ότι:

A. Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2f(a) + 3f(\beta)}{5}$.

B. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε: $2f'(\xi_1)(x_0 - a) = 3f'(\xi_2)(\beta - x_0)$.

Γ. Υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\frac{5}{f'(\xi)} = \frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)}$.

87. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική της f διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(1, 5)$, τότε:

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

B. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-4 + f(x^2 - 8)) = -2$.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ που είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): y = -\frac{3}{4}x + 2$.

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha < -3$

A. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

B. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3).

Γ. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Δ. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.