

2.10. ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στην ενότητα αυτή θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη της συνάρτησης**.

• Για τη μελέτη της συνάρτησης κάνουμε τα εξής βήματα:

1. Εύρεση πεδίου ορισμού της .
2. Εξετάζουμε αν είναι άρτια, περιττή ή περιοδική (αν θέλουμε).
3. Συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.
4. Με τη βοήθεια της f' εξετάζουμε τη μονοτονία-ακρότατα και το σύνολο τιμών της .
5. Με τη βοήθεια της f'' την καμπυλότητα και βρίσκουμε τα σημεία καμπής .
6. Εύρεση ασυμπτώτων της .
7. Πίνακας μεταβολών
8. Σημεία τομής με τους άξονες(αν θέλουμε) .
9. Γραφική παράσταση .

Άσκηση-1

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

Λύση

1. $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
2. $f(-x) = \frac{-x((-x)^2+1)}{(-x)^2-1} = -\frac{x(x^2+1)}{x^2-1} = -f(x) \rightarrow$ περιττή και θα έχει κέντρο συμμετρίας την

αρχή $O(0,0)$

3. Η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της σαν ηλίκο συνεχών .

4. Μονοτονία $f'(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$, $x^4-4x^2-1 = 0 \Leftrightarrow \dots x_1 = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ και $x_2 = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$

$$f'(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow , x^4-4x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2+\sqrt{5}} \text{ ή } x > \sqrt{2+\sqrt{5}} .$$

Άρα, η f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{5}}]$ και $[\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\sqrt{2+\sqrt{5}}, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, \sqrt{2+\sqrt{5}}]$.

• Ακρότατα Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$ το $f(-\sqrt{2+\sqrt{5}})$ και τ. ελάχιστο στο $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ το $f(\sqrt{2+\sqrt{5}})$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		-1		1		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$	$+\infty$
f'	+	0	-	X	-	X	-	0	+
f		τ.μ.		X		X		τ.ε.	

5. Κυρτότητα $f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ με $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{-1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}-\sqrt{5}$		-1		0		1		$\sqrt{2}+\sqrt{5}$	$-\infty$
f'	+	0	-	X	-		-	X	-	0	+
f''	-	0	-	X	+		-	X	+	0	+
f		τ.μ.		X		σ.κ. 0		X		τ.ε.	

Συνεπώς η f κοίλη στα $(-\infty, -1)$ και $(0, 1)$, ενώ f κυρτή στα $(-1, 0)$ και $(1, +\infty)$.

Σημεία καμψής: Το σημείο $(0, f(0) = (0, 0))$ γιατί

6. Ασύμπτωτες

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \left(\frac{2}{0} \right) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ η ευθεία $\boxed{x=1}$, ομοίως και η $\boxed{x=-1}$, $\rightarrow$ κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \rightarrow$ δεν έχει οριζόντια όμοια και στο $-\infty$.

- Για πλάγια $y = \lambda x + \beta$

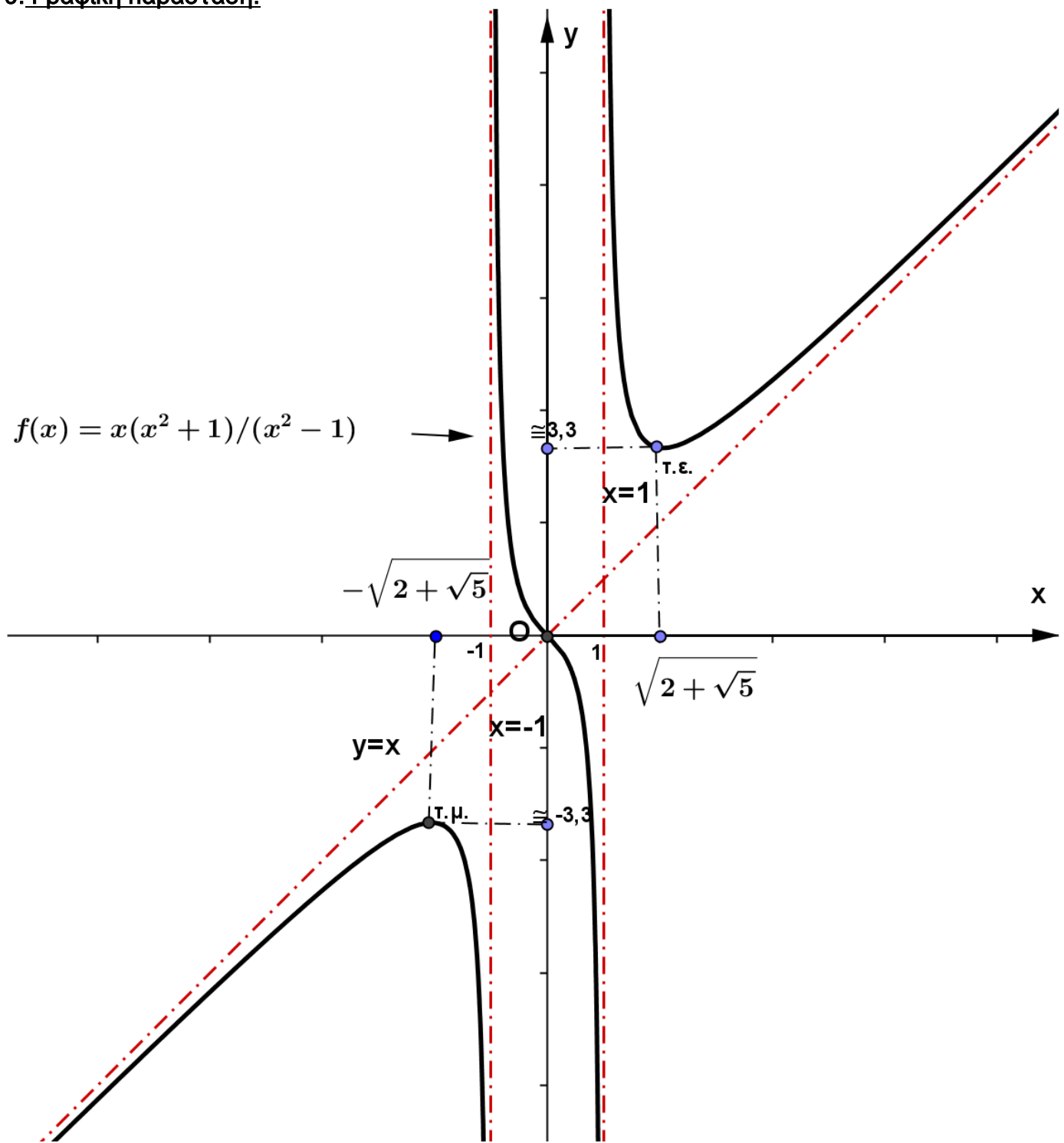
- $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1x] = 0$ άρα η $\boxed{\psi = x} \rightarrow$ πλάγια ασύμπτωτη.

7. Σημεία τομής με άξονες:

Για $x = 0$ έχω και $y = 0$ άρα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

8. Πίνακας μεταβολών

9. Γραφική παράσταση:



...ασκήσεις

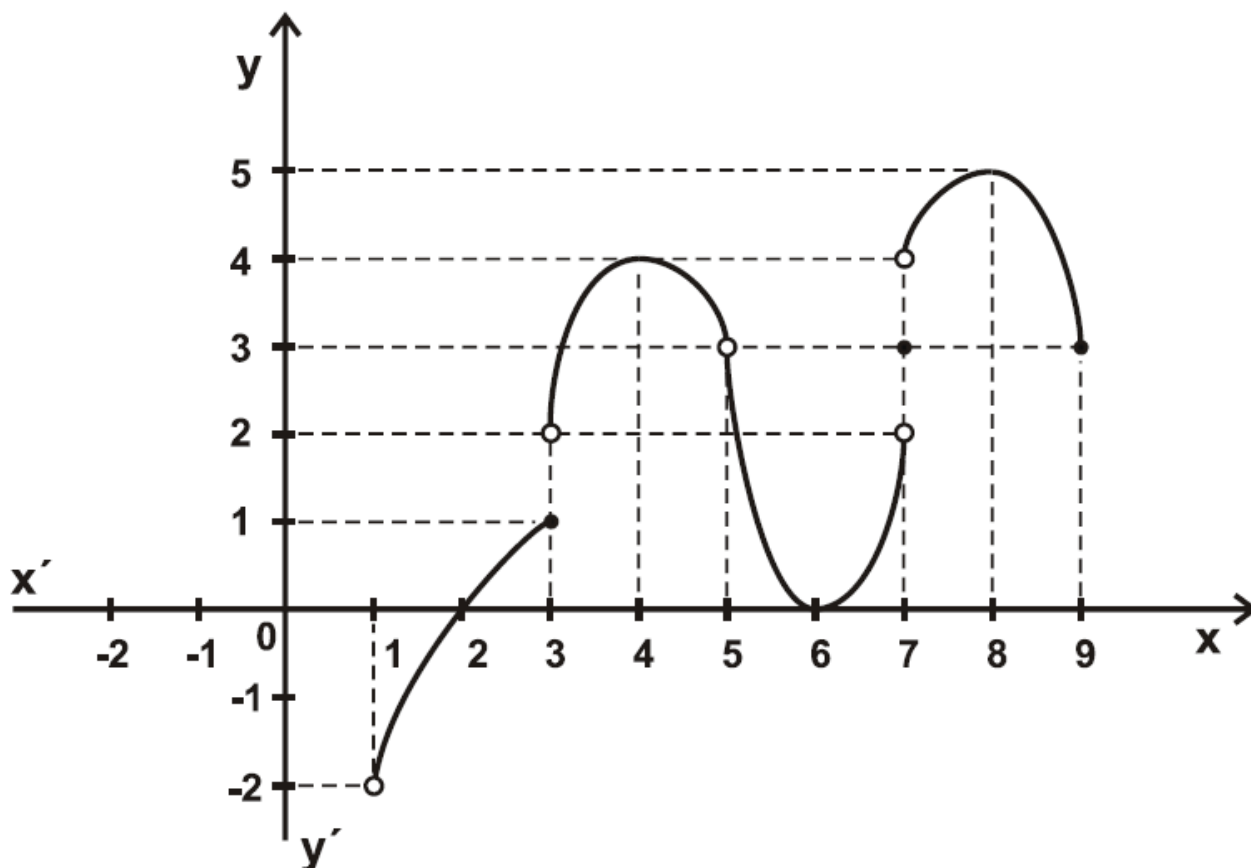
195. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

A. $f(x) = e^x - \ln(x+1)$

B. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-2}$

Γ. $f(x) = e^x (x^2 - 2x + 2)$

196. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

B. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 3) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ 4) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ και 5) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$.

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$.

Δ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f στα οποία είναι $f'(x_0) = 0$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

197. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x - \frac{1}{x} + 2$.

A. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

B. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της c_f στο $x_0 = 1$.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $x^x < e^{2x^2 - 3x + 1}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$, $a > 0$ έχει μοναδική λύση.

Ε. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της c_f από την ευθεία $x - y - 2016 = 0$.

Ζ. Να δείξετε ότι $\ln x + \frac{1}{x} \leq 1$ στο $(0, +\infty)$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = 2xf(x) + 2x^2 - 1$
- $f(0) = 1$, να δειχτεί ότι

A. Η συνάρτηση $h(x) = e^{-x^2} [f(x) + x]$ είναι σταθερή.

B. 1. $f(x) = e^{x^2} - x$, με $x \in \mathbb{R}$

2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{e^{3x} - \sin 2x}$

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της c_f .

4. Να μελετήσετε την f για τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

5. Να αποδειχτεί ότι $e^{x^2} + 1 > x + e$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f'(0) = f(0) = 0$, η

οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{f(x)}$

3. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ.α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ. Ένα υλικό σημείο $M(x, y)$ ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο

$A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ με $x \leq x_0$ και $t \geq 0$. Αν υποθέσουμε ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$, να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του.

E. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f'(x))^2}{f(x)} - 2f(x)$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
- Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δυο κοινές εφαπτόμενες.

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\sin^2 \theta$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμψής.
- Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.
- Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμψής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία

$$y = -2x - 2\sin^2 \theta.$$

6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$;
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$

α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $f(g(x)) = 1$.

7. (ΘΕΜΑ Β - 2016) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

A. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Γ. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Δ. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

8. (ΘΕΜΑ Β - 2017) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

B. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμψής της γραφικής της παράστασης της f .

Γ. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Δ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα A, B, Γ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό).

9 (ΘΕΜΑ_Β-2018). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- Δ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)

10(ΘΕΜΑ_Γ-2018). Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

- A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι
- B. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.
- Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m².

11 (ΘΕΜΑ_Δ-2018). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-a} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 1$.

- A. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $a > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- B. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .
- Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (a, x_2) .

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x + 1$, $x > 0$.

- A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2016}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.
- Γ. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2015$
- Δ. Να αποδείξετε ότι: $xf'(x) < f(2x) - f(x) < xf'(2x)$, για κάθε $x > 0$.

13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 1$ και

$$f'(x) = f(x) - e^x \eta \mu x.$$

- A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \sigma \upsilon \nu x$.
- B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και κατόπιν να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Γ. Ένα σημείο K κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x \sigma \upsilon \nu x$, $x > 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου K είναι 2 cm/s , να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου K τη χρονική στιγμή $t = t_0$ κατά την οποία η τετμημένη ισούται με $\frac{\pi}{4}$.

Δ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \text{ έχει δύο ακριβώς ρίζες η μία εκ των οποίων βρίσκεται στο διάστημα } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

14. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(2)=1$ και $f'(-2)+f(2)f'(3)$.
- $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f''(-2)=-3$ και
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-2021^{x+2}}{x+2} = 2 - \ln 2021$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(-2)=1$ και $f'(-2)=2$.

Δ2. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-2,2)$ στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x+5$ έχει μοναδική λύση την οποία και να υπολογίσετε.