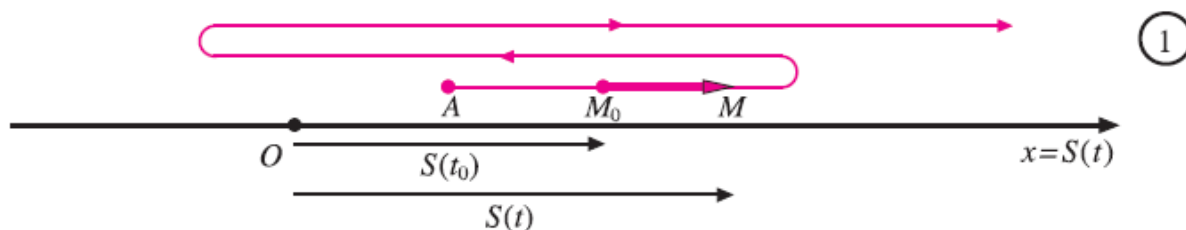


ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

A. Για φυσικά μεγέθη:

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t .



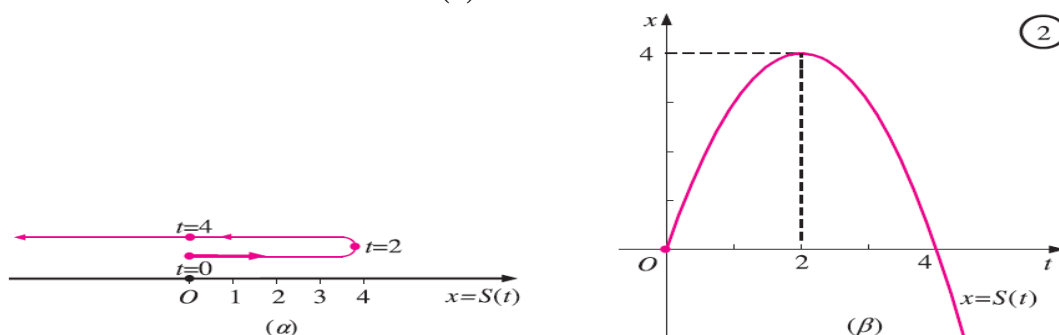
Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

Τότε:

- Μέση ταχύτητα κινητού: $\bar{v}(t_o) = \frac{S(t) - S(t_o)}{t - t_o}$, δηλαδή η μεταβολή του διαστήματος.
- Στιγμιαία ταχύτητα κινητού: $v(t_o) = S'(t_o) = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{S(t) - S(t_o)}{t - t_o}$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος.
- επιτάχυνση κινητού: $a(t_o) = v'(t_o) = \lim_{t \rightarrow t_o} \frac{v(t) - v(t_o)}{t - t_o}$, δηλαδή είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.

Παράδειγμα-1

Θεωρούμε τη συνάρτηση θέσης ενός κινητού $S(t) = -t^2 + 4t$ (σχ. 2), τότε έχουμε:



➤ **Στιγμαία ταχύτητα του κινητού για $t=1$:**

$$v(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^2 + 4t - 3}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-(t-1)(t-3)}{t-1} = 2.$$

➤ **Στιγμαία ταχύτητα του κινητού για $t=2$:**

$$v(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{-t^2 + 4t - 4}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{-(t-2)^2}{\cancel{t-2}} = 0.$$

➤ **Στιγμιαία ταχύτητα του κινητού για $t=3$:**

$$v(3) = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{-t^2 + 4t - 3}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{-(t-1)\cancel{(t-3)}}{\cancel{t-3}} = -2$$

Παρατηρήσεις!

Αν $v(t_0) = s'(t_0) > 0$ [η $s(t)$ είναι γνησίως αύξουσα], το κινητό κατευθύνεται δεξιά].

Αν $v(t_0) = s'(t_0) < 0$ [η $s(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα], το κινητό κατευθύνεται αριστερά .

Β. ΓΕΝΙΚΑ (στα μαθηματικά) :

- $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \rightarrow$ μεταβολή της f από το x στο x_0 .
- $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \rightarrow$ ρυθμός μεταβολής της ή παράγωγος αριθμός ή κλίση της γραφικής της f στο x_0 .

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in A_f$ όταν και μόνο υπάρχει ο κάθε παράγωγος αριθμός $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ή $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός $f'(x_0)$ ονομάζεται παράγωγος αριθμός της f στο $x_0 \in A_f$.

ΓΕΝΙΚΑ:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

ΑΛΛΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ: $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$

B1. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ $x_0 \in A_f$

1. Με ορισμό του $f'(x_0)$
2. Με εύρεση της $f'(x)$ και αντικατάσταση του x με x_0 (ενότητες 2.1-2.3)
3. Από $\lambda = \varepsilon\phi\omega = f'(x_0)$

Παράδειγμα-2

Δίνεται Η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$, να βρεθεί ο $f'(2)$.

Λύση

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4.$$

Παρατήρηση 1^η: Αν η συνάρτηση είναι πολλαπλού τύπου και x_0 σημείο αλλαγής δεν ξεχνάμε ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R} \text{ δηλαδή βρίσκουμε τις πλευρικές παραγώγους της } f.$$

ΜΟΝΟ Σ' ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ.

B2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ $f'(x_0)$

ΜΕΘΟΔΟΣ $\rightarrow$

- Δημιουργούμε μεταξύ άλλων στο όριο που ζητείται το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- Αντικαθιστούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ ή
- Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (οπότε) $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f'(x_0) \\ f(x) = g(x) \cdot (x-x_0) + f(x_0) \end{cases}$

Έστω συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$, να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 + x - 2}$

Λύση

Έχουμε $f'(1) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = -1$ (1). Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)} \frac{f(x)[f(x) - 2]}{(x-1) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x + 2} = f'(1) \cdot \frac{f(1)}{1 + 2} = -1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{3},$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Γ. Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ $M(x_0, f(x_0))$

Γ1. ΚΛΙΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ Ε ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΗΣ C_f

Ένας άλλος υπολογισμός της κλίσης ευθείας που εφάπτεται γραφικής παράστασης συνάρτησης : $\lambda_\varepsilon = f'(x_0)$

→ κλίση εφαπτομένης ευθείας

Απόδειξη:

• Έστω c_f η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , $A(x, f(x))$ ένα μεταβαλλόμενο σημείο της και $M(x_0, f(x_0))$ σταθερό σημείο της c_f , με $x \neq x_0$ (Σχ. 1).

• Έχουμε ότι η κλίση της τέμνουσας είναι:

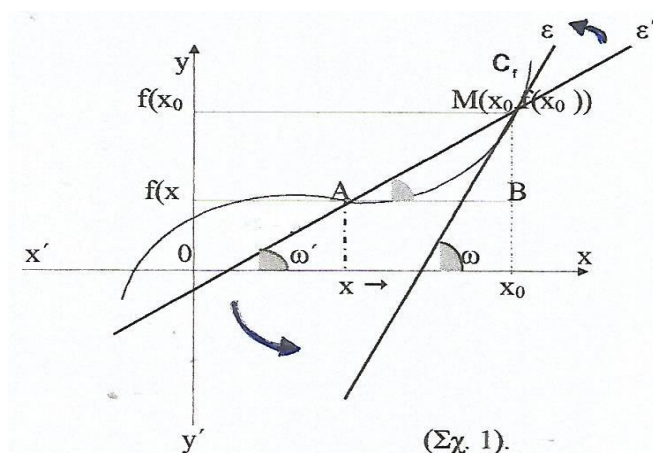
$$\lambda_{AM} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι: Αν $A \rightarrow M$ (x τείνει στο x_0), η τέμνουσα AM γίνεται εφαπτομένη στο M δηλαδή έχει την οριακή θέση ε .

Δηλαδή, $\lim_{A \rightarrow M} \varepsilon' = \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{A \rightarrow M} \lambda_{AM} = \lambda_\varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda_\varepsilon$$

ΤΕΛΙΚΑ: $\lambda_\varepsilon = \varepsilon \varphi \omega = f'(x_0)$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Όταν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , $M(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της δηλαδή

όταν: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε

ορίζουμε εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f την ευθεία ε η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = f'(x_0)$

Σημείωση: Αυτά ισχύουν για παραγωγίσιμες συναρτήσεις στα σημεία με τετμημένες x_0 .

ΜΑ ΘΥΜΑΜΑΙ! Συντελεστής διεύθυνσης (ε) = κλίση εφαπτομένης c_f στο $x_0 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = f'(x_0)$

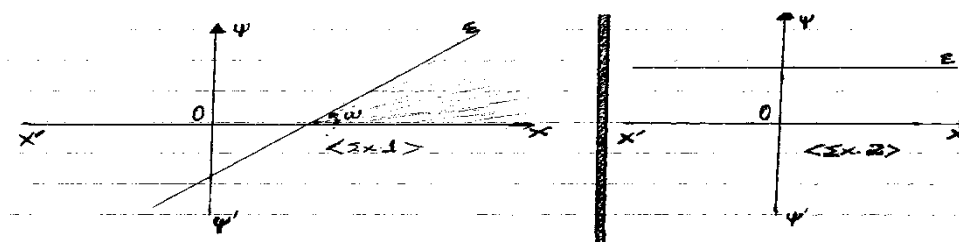
Γ2. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ:

Ας θυμηθούμε:

ΓΩΝΙΑ της ευθείας ε με τον x' άξονα λέμε τη γωνία που διαγράφει η ημιευθεία AX αν περιστραφεί κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε . (Σχ. 1)

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη του άξονα x' ή ταυτίζεται μ' αυτόν η γωνία ω μεταξύ της ε και του x' είναι μηδέν.

Συνεπώς $0 \leq \omega < \pi$



➤ Αν $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ τότε λέμε κλίση ή συντελεστή διεύθυνσης της ε τον αριθμό $\lambda = \varepsilon\psi\omega$

➤ Αν είναι γνωστά δύο σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$ της ε τότε $\lambda = \frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1}$

Από Β' Λυκείου γνωρίζουμε ότι :

1^η Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

$(\varepsilon): y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, με λ : συντελεστής διεύθυνσης της ε και $M(x_0, \psi_0)$: σημείο επαφής με C_f .

ΑΡΑ: $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

2^η Μορφή Εξίσωσης Ευθείας :

$(\varepsilon): \psi = \lambda x + \beta$, με λ : συντελεστής διεύθυνσης και $B(0, \beta)$: σημείο τομής της ευθείας και του άξονα ψ'

Ειδικές περιπτώσεις

A). Αν $\varepsilon \perp x'x$ στο $M(x_0, 0)$ τότε: $x = x_0 \rightarrow$ όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ **ΒΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ**(σελ.57,58)

B). Αν $\varepsilon // x'x$ και τέμνει τον $\psi'\psi$ στο $(0, \beta)$: $\psi = \beta$ ή $y = f(x_0) \rightarrow$ όταν $f'(x_0) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

Η ερμηνεία αυτή μας διευκολύνει σε προβλήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας.

- Όταν χρησιμοποιούμε την εξίσωση $\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ να μην ξεχνάμε ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0)) \in C_f$ οπότε επαληθεύει την εξίσωση $\psi = f(x)$ και έτσι έχουμε μια από τις εξισώσεις του συστήματος που θέλουμε για την εύρεση των αγνώστων μας.

Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις

1. Αν δεν γνωρίζουμε το σημείο επαφής αλλά ένα άλλο $A(x_1, y_1)$ από το οποίο περνάει η (ε) θεωρούμε εμείς σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ και χρησιμοποιούμε την εξίσωση $\psi - \psi_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, με αγνώστους τα $f'(x_0), x$ και $f(x_0)$. Από τα δεδομένα κάθε άσκησης να δημιουργούμε το σύστημα

$$\begin{cases} f'(x_0), \text{ από την } f \\ A(x_1, y_1) \in (\varepsilon) \text{ και βρίσκουμε τους αγνώστους [ή την εξίσωση : } \psi = \lambda x + \beta \dots] \\ M(x_0, y_0) \in C_f \end{cases}$$

2. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, \psi_0)$.

3. Αυτά ισχύουν για παραγωγίσιμες συναρτήσεις στα σημεία με τετμημένες x_0 .

Παράδειγμα-4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(4, 0)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $A \notin c_f$ γιατί οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν την $f(x)=x^2-3x$ Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε: $f'(x) = 2x - 3$ και $f'(x_0) = 2x_0 - 3$, άρα

$$\varepsilon : \left. \begin{aligned} \psi - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ \text{Αλλά } M \in c_f &\Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2 - 3x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi - (x_0^2 - 3x_0) = (2x_0 - 3)(x - x_0)$$

$$\text{Επίσης, } A \in (\varepsilon) \text{ οπότε: } 0 - (x_0^2 - 3x_0) = (2x_0 - 3)(4 - x_0) \Leftrightarrow x_0^2 - 8x_0 + 12 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 64 - 48 = 16 \quad \text{και} \quad x_0 = \frac{8 \pm 4}{2} \rightarrow \frac{6}{2}$$

• Για $x_0 = 6 \rightarrow f(x_0) = f(6) = 6^2 - 3 \cdot 6 = 18$, άρα η εφαπτομένη στο σημείο $M_1(6, 18)$ με

$$f'(x_0) = f'(6) = 2 \cdot 6 - 3 = 9 \text{ είναι: } \varepsilon_1 : \psi - 18 = 9(x - 6) \Leftrightarrow 9x - \psi = 36 \Rightarrow \varepsilon_1$$

• Για $x_0 = 2 \rightarrow f(x_0) = f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$ και $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, άρα $\varepsilon_2 : \psi - (-2) = 1(x - 2) \Leftrightarrow x - \psi = 4 \Rightarrow \varepsilon_2$

Δ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Όταν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 , τότε είναι συνεχής σ' αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ → σελ. 99

$$\text{Για } x \neq x_0 \text{ έχουμε: } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \text{ αφού η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι}$$

συνεχής στο x_0 . ■

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ:

1. Το αντίστροφο **δεν ισχύει**, δηλαδή αν f είναι συνεχής στο x_0 **δεν είναι υποχρεωτικά** παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Ισχυρισμός- Αντιπαράδειγμα

«Κάθε συνεχής συνάρτηση σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ».

Απάντηση

Είναι Λάθος

Αντιπαράδειγμα

$$\text{Η συνάρτηση } f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αφού :

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

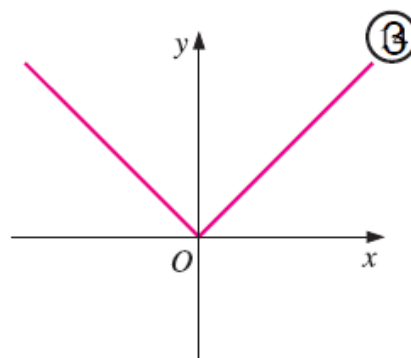
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0), \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0), \text{ αλλά δεν είναι}$$

παραγωγίσιμη στο 0 (γωνιακό σημείο) γιατί :

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1, \text{ ενώ}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$



Πρόταση

Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Δ1. ΜΗ ΥΠΑΡΞΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ x_0

Μέθοδοι:

Α' ΤΡΟΠΟΣ: Αποδεικνύουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$

Β' ΤΡΟΠΟΣ: Αν το x_0 είναι σημείο αλλαγής τύπου δείχνουμε ότι $f'_\alpha(x_0) \neq f'_\delta(x_0)$, δηλαδή ότι οι πλευρικοί παράγωγοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ή ακόμη ότι δεν υπάρχει κάποιος απ' αυτούς.

Γ' ΤΡΟΠΟΣ: Βρίσκουμε την f' και δείχνουμε ότι δεν ορίζεται στο σημείο x_0 .

Δ' ΤΡΟΠΟΣ: Δείχνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0

ΔΕΝ ΞΕΧΝΩ	f παραγωγίσιμη σε σημείο x_0	$\Rightarrow$	f συνεχής στο x_0
	f δεν είναι συνεχής στο x_0	$\Rightarrow$	f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
	f συνεχής σε σημείο x_0	$\nRightarrow$	κατ' ανάγκη η f παραγωγίσιμη στο x_0

Παράδειγμα-5

Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός στο σημείο x_0 των συναρτήσεων:

$$f(x) = |x-1| \quad \text{στο } x_0 = 1$$

Απόδειξη

α) Έχουμε $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

$$\bullet \quad f'_\alpha(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1-0}{x-1} = -1 \quad \text{και}$$

$$\bullet \quad f'_\delta(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-0}{x-1} = 1$$

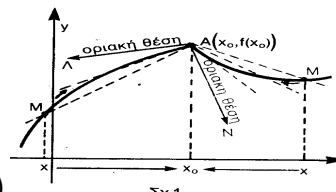
Επειδή $f'_\alpha(1) \neq f'_\delta(1)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Παρατήρηση: Το πεδίο ορισμού της f' είναι πάντα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f .

Δ2. ΜΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ- ΓΩΝΙΑΚΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ α_f

Μέθοδος Σ' αυτή την περίπτωση αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι:

α) συνεχής στο x_0



$$\beta) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{Σχ. 1})$$

Παράδειγμα-6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 3, & \text{αν } x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} + 1, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$. Να δειχθεί ότι το σημείο $x_0 = -1$ είναι γωνιακό.

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^3 - x^2 + 3) = 1 = f(-1), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\sqrt{x+1} + 1) = 1. \text{ Άρα, η } f \text{ συνεχής στο } x_0 = -1.$$

$$\bullet f'_\alpha(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x^3 - x^2 + 3) - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 2x + 2) = 6$$

$$\bullet f'_\delta(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\sqrt{x+1} + 1) - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$. Άρα στο $x_0 = -1$ έχουμε γωνιακό σημείο.

Δ3. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μέθοδος* Στις ασκήσεις αυτές δίνονται ιδιότητες της συνάρτησης και εμείς εφαρμόζουμε τα αντίστοιχα θεωρήματα -όπως το παραπάνω- δημιουργώντας έτσι συστήματα για τον υπολογισμό των μεταβλητών.

Παράδειγμα-7

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ \alpha x + \beta, & x > 2 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι αριθμοί α, β ώστε να υπάρχει ο αριθμός $f'(2)$

Λύση

Θέλουμε να υπάρχει ο $f'(2)$ άρα πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ η f . Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\alpha x + \beta) = 2^2 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 4 \quad (1)$$

Επίσης f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ άρα:

$$f'_\alpha(2) = f'_\delta(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\alpha x + \beta) - 4}{x - 2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\alpha x + \beta - (2\alpha + \beta)}{x - 2} \Leftrightarrow 4 = \alpha \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\beta = -4$

Ε. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ: → Προσπαθούμε από τη συναρτησιακή σχέση (υπόθεση) να δημιουργήσουμε τον παράγωγο αριθμό

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ τον οποίο και υπολογίζουμε. Επίσης στην κατηγορία αυτή η συναρτησιακή σχέση που μας}$$

δίνεται ισχύει για κάθε τιμή των γραμμάτων της όπως :

$$f(x+\psi) = \psi f(x) + x f(\psi), \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbf{R}. \quad (1) \text{ ή } f(x, \psi) = f(x) + f(\psi) + 1, \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbf{R} \quad (2).$$

$$\bullet \rightarrow \text{Θέτω για την (1) } x - x_0 = h \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 0 \\ \& \text{ ή για την (2) } \frac{x}{x_0} = h \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 1 \\ \& \text{ και χρησιμοποιούμε τον ορισμό} \\ x = x_0 h \end{cases} \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Παράδειγμα-8

Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο 1. Αν $f^3(x) + (x-1)^2 f(x) - 2(x-1)^3 = 0 \quad (1)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι α) $f(1)=0$ και $f'(1)=1$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Για } x=1 \text{ η } (1) \Rightarrow f^3(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0.$$

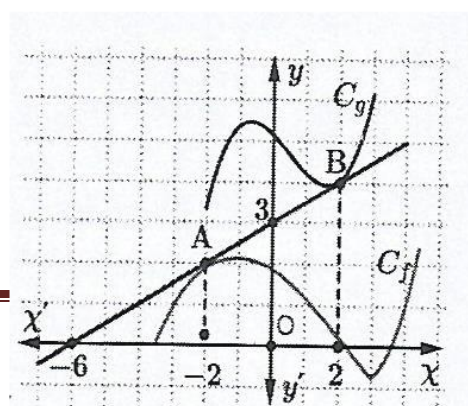
$$\beta) \text{ Είναι } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \quad (2). \text{ Διαιρούμε τα μέλη της (1) με } (x-1)^3 \text{ και έχουμε :}$$

$$\frac{f^3(x)}{(x-1)^3} + \frac{(x-1)^2 f(x)}{(x-1)^3} - \frac{2(x-1)^3}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{(x-1)} \right]^3 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)} - \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 0$$

$$\Rightarrow [f'(1)]^3 - f'(1) - 2 = 0 \xrightarrow{\text{Horner}} f'(1) = 1. \text{ (Από Horner για } f'(1) = \omega \text{ έχουμε } \omega^3 - \omega - 2 = 0 \text{ κλπ).}$$

Ασκήσεις για λύση

ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΑΠΟ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



1. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές των συναρτήσεων f, g και η ευθεία (ε) που εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(-2, f(-2))$ και της C_g στο $B(2, g(2))$.

A. Να υπολογίσετε τα $f(-2)$ και $g(2)$.

B. Να αποδείξετε ότι $8f'(-2)g'(2) = g(2) - f(-2)$.

2. Έστω η παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ με $g'(a) = 0$.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) \eta \mu^2 x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4. Έστω δύο παραγωγίσιμες στο x_0 συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x_0) = g(x_0) = 0$ και $g'(x_0) \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

A. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$, για κάθε $x_0, h > 0$ και $x = \frac{h}{x_0}$

B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 > 0$ με $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} f'(1)$.

6. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) + 1 = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

A. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

B. $f'(1) = 3$.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ-ΥΠΑΡΞΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

7. Προσδιορίστε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \sqrt{5+x^2}, & x \leq 2 \\ \eta \mu(\pi x) + \beta, & x > 2 \end{cases}$ να

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$. [$\alpha = -\frac{2}{3} + \pi, \beta = \pi + 1$]

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha \sqrt{x} + \mu^2 x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2 - \lambda^2 x + \alpha, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να

δειχθεί ότι το σημείο $M(\mu, \lambda)$ διαγράφει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

9. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \geq -1 \\ \frac{\gamma}{x}, & x < -1 \end{cases}$, να βρεθούν τα α, β, γ ώστε η C_f να έχει εφαπτομένη στο σημείο

της $A(-1, f(-1))$ κάθετη στην ευθεία $x + 2y = 2006$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ $f'(x_0)$

10. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \lambda x - x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = \lambda$.

(β) Υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$ και είναι ίσο με $f'(0)$.

11. Αν $f(2) = 3$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(2) = -1$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 6}{x - 2}$.

12. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f(2) = -3$ και $f'(2) = 5$, να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

13. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ με $a > 0$, να δειχθεί ότι

A. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$.

B. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) - xf(a)}{x^2 - ax} = f'(a) - \frac{f(a)}{a}$.

ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ $x_0 \in A_f$ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ

14. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 1. Αν $f^3(x) + (x-1)^2 f(x) - 2(x-1)^3 = 0$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι α) $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$.

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 6x}{x^2 - 9} = 10$, να βρεθούν

α. Ο αριθμός $f(3)$

β. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$

γ. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x^2}{4x^2 - 12x}$

16. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{\eta \mu x} = 2005$, να βρεθούν τους αριθμούς:

α.) $f(0)$ και β) $f'(0)$

17. Αν συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f(xy) = f(x) + f(y) - xy^2 + x - 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν είναι $f'(1) = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του διαστήματος $(0, +\infty)$.

2.2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A .

• Παράγωγος συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε τη συνάρτηση που ορίζεται (παράγεται) από την συνάρτηση f και την αντιστοιχία: $x \rightarrow f'(x)$ από τον τύπο: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

• Πεδίο ορισμού της f' είναι το $A_1 \subseteq A$, όπου A το Π.Ο. της f .



Άλλος συμβολισμός: $\frac{df}{dx}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι :

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή απλά **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$, δηλαδή αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο : $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, για κάθε $x_0 \in A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A .

Θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4:

Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι :

- παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει :
- $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

Σημειώσεις-επισημάνσεις:

- ✓ Πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της $f \Rightarrow$ λέγεται η συνάρτηση f'
- ✓ Δεύτερη παράγωγος της $f \Rightarrow$ λέγεται η συνάρτηση $f''(x) = (f'(x))'$
- ✓
- ✓ Νιοστή παράγωγος της $f \Rightarrow$ λέγεται η συνάρτηση $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

1. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = 0, \text{ δηλαδή } \boxed{(c)' = 0} \rightarrow \text{σελ. 105}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει : $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. Δηλαδή $(c)' = 0$. ■

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $\boxed{(x)' = 1}$. →σελ. 105

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει : $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$. Δηλαδή $(x)' = 1$.

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει

$f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή $\boxed{(x^v)' = vx^{v-1}}$ →σελ. 106

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Να θυμάμαι:

$$\alpha^v - \beta^v = (\alpha - \beta)(\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \alpha^{v-3}\beta^2 + \dots + \beta^{v-1})$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}$.

δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$ ■

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

δηλαδή $\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ →σελ. 106 .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $\boxed{(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x}$.

→σελ. 106-107→χωρίς απόδειξη

6. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$,

δηλαδή $\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x}$. →σελ. 107→χωρίς απόδειξη

7. Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x) = e^x$,

δηλαδή $\boxed{(e^x)' = e^x}$ (ιδία) →σελ. 108→χωρίς απόδειξη

8.Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$,

δηλαδή $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (ίδια) → σελ. 108 → χωρίς απόδειξη

Εφαρμογή 1^η

Να βρεθεί το σημείο επαφής της εφαπτομένης ϵ και της γραφικής της f με $f(x) = \ln x$, όταν η ϵ διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Λύση

Είναι $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

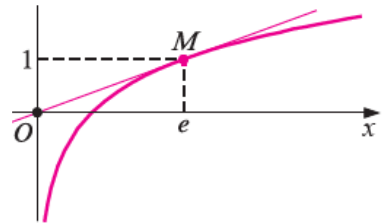
Εστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε είναι

(ϵ): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$

→ (ϵ).

Η (ϵ) διέρχεται από την αρχή αξόνων $O(0,0)$ άρα επαληθεύεται από το $O(0,0)$. Οπότε

(ϵ) $\Leftrightarrow 0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Rightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$ και $f(e) = \ln e = 1$. Άρα $M(e, f(e)) = (e, 1)$.



Εφαρμογή 2^η

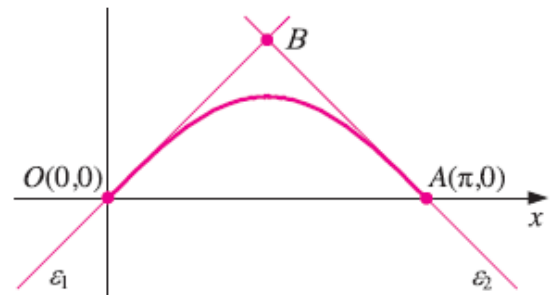
Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, ορισμένη στο $[0, \pi]$.

i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων ϵ_1 και ϵ_2 στα σημεία $O(0,0)$ και $A(\pi, 0)$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις εφαπτομένες ϵ_1 και ϵ_2 και τον άξονα των x .

Λύση

i) Είναι $f'(x) = (\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x$, $x \in [0, \pi]$.



Εξίσωση εφαπτομένης ϵ στο σημείο $O(0,0)$:

$$f(0) = \eta \mu 0^\circ = 0$$

$$f'(x) = \sigma \nu \eta x \Rightarrow f'(0) = \sigma \nu 0 = 1$$

$$(\epsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x \rightarrow (\epsilon_1).$$

Εξίσωση εφαπτομένης ϵ στο σημείο $A(0, \pi)$

$$f(\pi) = \eta \mu \pi = 0$$

$$f'(x) = \sigma \nu \eta x \Rightarrow f'(\pi) = \sigma \nu \pi = -1$$

$$(\epsilon): y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Rightarrow y - 0 = -1(x - \pi) \Rightarrow y = \pi - x \rightarrow (\epsilon_2).$$

$$\text{ii) Σημείο τομής των } \epsilon_1 \text{ και } \epsilon_2, \text{ λύνω σύστημα } \begin{cases} y = x \\ y = \pi - x \end{cases} \dots \text{ και βρίσκω } B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

➤ Εμβαδόν τριγώνου OAB : $(OAB) = \frac{(OA) \cdot |y_B|}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

2.3. ΚΑΝΟΝΕΣ(ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ- 1 (Παράγωγος αθροίσματος): Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \rightarrow \text{σελ. 111}.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει :
$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Δηλαδή $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) . \blacksquare$

ΓΕΝΙΚΑ : Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει :

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Παρατήρηση: Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, \dots, f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ , τότε

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ-2 (Παράγωγος Γινομένου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \rightarrow \text{σελ. 112}.$

ΓΕΝΙΚΑ $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$

π.χ. $(e^x \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right), x > 0$

Παρατήρηση: Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

Πρόταση: Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει :

$$[(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x). \end{aligned}$$

$$(\sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})' \cdot \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\eta\mu x)' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot (\ln x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{1}{x} \quad x > 0.$$

Εφαρμογή

$$(\sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})' \cdot \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\eta\mu x)' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot (\ln x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{1}{x} \quad x > 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ -3 Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ τότε ισχύει:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ όπου } c \in \mathbb{R}$$

π.χ. $(\ln 2 \cdot x^3)' = \ln 2 \cdot (x^3)' = \ln 2 \cdot 3x^2 = 3 \ln 2 \cdot x^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ-4 (Παράγωγος Πηλίκου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη

στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \rightarrow \text{σελ. 114}.$

Εφαρμογή

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$.

Λύση

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x \ln x}{x-1}\right)' = \frac{(x \ln x)'(x-1) - x \ln x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x \ln x - \ln x + x - 1 - x \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ-5 (Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης)

Αν μία συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε

η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \rightarrow \text{σελ. 117}.$

ΓΕΝΙΚΑ: $\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$

• Δηλαδή θέτουμε $u = g(x)$

• Οπότε $\boxed{[f(g(x))]' = (f(u))' = f'(u)u'}$

π.χ.

$$\begin{aligned} (\eta\mu 2x)' &= (2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)' = 2(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)' \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x = 2(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x. \end{aligned}$$

Ένας άλλος συμβολισμός

• Αν θέσουμε $y = f(u)$ και $u = g(x)$ τότε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \rightarrow \text{κανόνας αλυσίδας του Leibniz}$$

ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ!

 $\boxed{\alpha^x = e^{a \ln x}}, x > 0 \rightarrow \text{για εκθετικές συναρτήσεις.}$

Γενικά: $\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}}, f(x) > 0$

Επιπλέον Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbf{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει

$f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $\boxed{(x^{-v})' = -vx^{-v-1}} \rightarrow \text{σελ. 113-114.}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$ έχουμε: $(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^v - 1 \cdot (x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = \mathbf{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει

$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $\boxed{(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \rightarrow \text{σελ. 114}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in R_1$ έχουμε:

$$(\epsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο

$R_1 = \mathbf{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή $\boxed{(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}} \rightarrow \text{σελ. 114 (χωρίς απόδειξη)}$



4. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$, δηλαδή

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1} \rightarrow \text{σελ. 116}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y = x^a = e^{a \ln x}$ και θέσουμε $u = a \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1} . \blacksquare$$

5. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, με $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \rightarrow \text{σελ. 116-117}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, είναι $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $f(u) = e^u$. Επομένως:

$$f'(x) = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a . \blacksquare$$

[Αποδεικνύεται ότι, για $a > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο].

6. . συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \rightarrow \text{σελ. 117}.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln (-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln (-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

$$\text{Επομένως, } y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot (-1) = \frac{1}{x} .$$

$$\text{Άρα : } (\ln |x|)' = \frac{1}{x} .$$

1. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

α. με τον ορισμό (υποχρεωτικά στο σημείο αλλαγής στις ασκήσεις πολλαπλού τύπου)

β. με τις ιδιότητες και τον παρακάτω πίνακα

Ιδιότητες Παραγώγων	
$(f+g)' = f' + g'$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

		$(c.f)' = c.f' , c \in \mathbb{R}$
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ		
1.	$(c)' = 0$	--- ---
2.	$(x)' = 1$	--- ---
3.	$(x^v)' = v x^{v-1}, v \in \mathbb{N}^*$	$\left([f(x)]^v\right)' = v.f(x)^{v-1} \cdot f'(x)$
4.	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, f(x) > 0$
5.	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x)$
6.	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
7.	$(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(\epsilon\phi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
8.	$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$(\sigma\phi f(x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
9.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$	$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), f(x) > 0$
10.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
11.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, f(x) \neq 0$
12.	$(e^x)' = e^x$	$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
13.	$(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha$	$(\alpha^{f(x)})' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln \alpha \cdot f'(x)$
14.	$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}, p \in \mathbb{Q}, x > 0$	$\left[f^p(x)\right]' = p[f(x)]^{p-1} \cdot f'(x), p \in \mathbb{Q}$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ ΤΑΞΗΣ $v > 2^{\text{ης}}$

Αν η συνάρτηση έχει ρίζα τάξης μεγαλύτερης της 2ης εφαρμόζουμε την ιδιότητα: $\sqrt[v]{x^u} = |x|^{\frac{u}{v}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}, v \geq 3$ (φυσικός αριθμός) και μ άρτιος φυσικός αριθμός.

Παράδειγμα-1

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(|x|^{1/3}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \text{ αφού } x \geq 0.$$

Παράδειγμα-2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Λύση

$$\text{Είναι τότε } f(x) = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f(x) = |x|^{2/3} = \begin{cases} (-x)^{2/3}, & \text{για } x < 0 \\ x^{2/3}, & \text{για } x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Στο διάστημα } (-\infty, 0) \text{ έχουμε } f'(x) = \left((-x)^{2/3}\right)' = \frac{2}{3}(-x)^{\frac{2}{3}-1}(-x)' = -\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}$$

$$\text{Στο διάστημα } (0, +\infty) \text{ έχουμε } f'(x) = \left(x^{2/3}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{Στο } x_0 = 0 \text{ έχουμε: } f'_a(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{2/3} - 0}{x - 0} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)^{-1/3} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{-x}} = -\infty$$

$$\text{και } f'_\delta(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2/3} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{-1/3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty. \text{ Επομένως η } f \text{ δεν παραγωγίζεται}$$

$$\text{στο μηδέν. Άρα } f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}, & \text{για } x < 0 \\ \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, & \text{για } x > 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα-3

Να παραγωγισθεί η f με τύπο: $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$

Λύση

Είναι $x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} \right]' = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' \cdot (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} + (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \left[(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} \right]' = \\ &= (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \cdot (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} + (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (x^2 + 1)' = \\ &= (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \cdot (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} + (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \frac{2}{3} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x \end{aligned}$$

Παράδειγμα-4

Δίνονται οι συναρτήσεις: i) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x}$ ii) $g(x) = (x-1)^2$.

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι f', g' των συναρτήσεων.

Λύση

$$\text{i) Είναι } A = \mathbb{R} - \{0\}. \text{ Από την ιδιότητα } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2} \text{ έχουμε:}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 5x + 6)' \cdot x - (x^2 - 5x + 6) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{[(x^2)' \cdot (5x)' + (6)'] \cdot x - (x^2 - 5x + 6) \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{(2x - 5) \cdot x - (x^2 - 5x + 6) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 5x - x^2 + 5x - 6}{x^2} = \frac{x^2 - 6}{x^2} \quad \text{με } A' = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ii) Είναι $B = \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1$. Άρα $g'(x) = (x^2)' - (2x)' + (1)' = 2x - 2 + 0 = 2x - 2$ με π.ο. το $\mathbb{R}$.

2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ Ή ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Μέθοδος* Βρίσκουμε την παράγωγο στα ανοικτά διαστήματα του πεδίου ορισμού της με τους κανόνες παραγώγισης απλής ή σύνθετης συνάρτησης, ενώ στα άκρα των διαστημάτων δηλαδή **στα σημεία αλλαγής τύπου, βρίσκουμε τον παράγωγο αριθμό πάντοτε με τον ορισμό.**

Παράδειγμα-5

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + |x - 1| + 2$.

Λύση

■ Η ρίζα του απολύτου είναι το 1, άρα: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + x + 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

■ Στο $(-\infty, 1)$ έχουμε: $f'(x) = 2x - 1$

■ Στο $(1, +\infty)$ έχουμε: $f'(x) = 2x + 1$

$$f'_\alpha(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \quad \text{και}$$

$$f'_\delta(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$$

Επειδή $f'_\alpha(1) \neq f'_\delta(1)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\text{Συνεπώς } f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x > 1 \\ -x + 3, & \text{αν } x < 1 \end{cases}.$$

3. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ : $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$.

Είναι $A = \{x \in \mathbb{R} / g(x) > 0 \text{ και } h(x) \in \mathbb{R}\}$

Μέθοδος 1^η: Τη μετατρέπουμε σε εκθετική πάλι με βάση e . Δηλαδή, $f(x) = [g(x)]^{h(x)} = e^{h(x) \cdot \ln g(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \left[e^{h(x) \cdot \ln g(x)} \right]' = e^{h(x) \cdot \ln g(x)} \cdot [h(x) \ln g(x)]' = e^{h(x) \cdot \ln g(x)} \left(h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \right)$$

Μέθοδος 2^η: Έχουμε:

$$f(x) = [g(x)]^{h(x)} \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln [g(x)]^{h(x)} \Leftrightarrow [\ln f(x)]' = [h(x) \cdot \ln g(x)]' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \ln g(x) + h(x) [\ln g(x)]' \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \cdot \left(h'(x) \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \right)$$

Παράδειγμα-6

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης με τύπο: $f(x) = (\eta \mu x)^{e^{\phi x}}$

$$f'(x) = \left[e^{\ln(\eta\mu x)^{\epsilon\phi x}} \right]' = \left(e^{\epsilon\phi x \ln(\eta\mu x)} \right)' = e^{\epsilon\phi x \ln(\eta\mu x)} \cdot (\epsilon\phi x \cdot \ln(\eta\mu x))' = (\eta\mu x)^{\epsilon\phi x} \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \ln \eta\mu x + \epsilon\phi x \cdot \frac{1}{\eta\mu x} \right)$$

4. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη στο διάστημα A με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$, τότε υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και είναι παραγωγίσιμη στο $f(A)$ με

$$\left(f^{-1} \right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \text{ με } x \in f(A).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τη σχέση

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \left(f(f^{-1}(x)) \right)' = (x)' \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot \left(f^{-1} \right)'(x) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1} \right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

5. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στην ομάδα αυτή συμπεριλαμβάνουμε ασκήσεις που δεν επιλύονται με συγκεκριμένη μεθοδολογία. Επιλύονται με σωστή εφαρμογή θεωρημάτων και ορισμών. Ακόμη και με τη βοήθεια τεχνασμάτων.

ΜΕΘΟΔΟΣ; ΔΟΚΙΜΗ - ΠΛΑΝΗ

Είναι για μαθητές με αυξημένες απαιτήσεις, που γνωρίζουν πολύ καλά τη θεωρία και με τέτοιου είδους ασκήσεις επιτυγχάνεται αύξηση της κριτικής ικανότητας και ακονισμός της σκέψης.

✚ **ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ** μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 και θέλουμε να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$, γνωρίζοντας ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

1^{ος} τρόπος: → αποδεικνύουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \in \mathcal{R}$ αν θέσουμε :

- $x - x_0 = h$ αν στη συναρτησιακή σχέση όπως στο παρακάτω παράδειγμα έχω σαν πρώτο μέλος $f(x+\psi)$ ή
- $\frac{x}{x_0} = h$... αν όμως υπάρχει $f(x \cdot \psi)$ ή $f(\alpha \cdot \beta)$

2^{ος} τρόπος: → Θεωρούμε σταθερή τη μια μεταβλητή y και παραγωγίζουμε ως προς x με τη βοήθεια ιδιοτήτων – τυπολογίου .

Παράδειγμα-7

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με $f(x + \psi) = f(x) \cdot f(\psi) + x^2 \cdot y$ (1)

Αν $f'(0) = 1$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x, \psi \in \mathcal{R}$, τότε η f παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$.

Λύση

Η (1) για $x = \psi = 0$ γίνεται:

$$f(0+0) = f(0) + 0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) \cdot [f(0) - 1] = 0 \text{ και } f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

$$\text{Άρα, } f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1 \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1 \quad (2)$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ αρκεί να είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο $x_0 \in \mathcal{R}$.

1^{ος} τρόπος:

- Θέτω $x - x_0 = h \rightarrow x = x_0 + h$ και $h \rightarrow 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot f(h) + x_0^2 h - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x_0) \frac{f(h) - 1}{h} + x_0^2 \right]$$

$$= f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + x_0^2 \stackrel{(2)}{=} f(x_0) \cdot f'(0) - x_0^2 = f(x_0) + x_0^2 \in \mathbb{R},$$

άρα η f παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x) - 2x^2$.

2ος τρόπος: ➔ Θεωρούμε x σταθερό και παραγωγίζουμε την (1) ως επίσης y και έχουμε:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + x^2 \cdot y \Rightarrow (f(x+y))' = (f(x) \cdot f(y))' + (x^2 \cdot y)' \Rightarrow f'(x+y) \cdot (x+y)' = f(x) \cdot f'(y) + x^2 \cdot 1$$

$$f'(x+y) \cdot (0+1) = f(x) \cdot f'(y) + x^2 \Rightarrow f'(x+y) = f(x) \cdot f'(y) + x^2 \quad (1) \rightarrow x, f(x): \text{αριθμοί.}$$

$$\text{Για } y=0 \text{ και από υπόθεση για } f'(0)=1 \text{ η (1)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot f'(0) + x^2 \Rightarrow f'(x) = f(x) - 2x^2$$

6. Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Μέθοδος* Σ' αυτές επίσης κατηγορίες ασκήσεων εκτός των προηγούμενων θα πρέπει να ξέρουμε κάποιες βασικές γνώσεις από την Β' Λυκείου, επίσης:

$$\left. \begin{array}{l} \rho \text{ ρίζα του πολωνύμου} \quad f(x) \Leftrightarrow f(\rho)=0 \\ x-\rho \text{ παράγοντας του πολωνύμου} \quad f(x) \Leftrightarrow f(\rho)=0 \\ \text{ή } x-\rho \text{ διαιρεί το} \quad f(x) \Leftrightarrow f(\rho)=0 \end{array} \right\}$$

Επίσης: $f(x) = (x-\rho) \cdot \pi(x)$, με $v(\rho) = 0$ και $\pi(x)$: πολυώνυμο.

Βασική πρόταση: Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση n -βαθμού έχει παράγωγο $(n-1)$ βαθμού.

Παράδειγμα-8

Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $f(x)$ για τα οποία ισχύει: $3f(x) = 2[f'(x)]^2 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Λύση

Έστω βαθμός $f(x) = n$, τότε βαθμός $f'(x) = n-1$ και βαθμός $[f'(x)]^2 = 2(n-1)$, άρα από (1) θα πρέπει να ισχύει: $n = 2(n-1) \Leftrightarrow n = 2n - 2 \Leftrightarrow n = 2$

συνεπώς το πολυώνυμο έχει τη μορφή:

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma \quad \text{με } a \neq 0, \quad f'(x) = 2ax + \beta, \text{ άρα αντικαθιστούμε και έχουμε:}$$

$$3f(x) = 2[f'(x)]^2 \Leftrightarrow 3(ax^2 + bx + \gamma) = 2(2ax + \beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$3ax^2 + 3bx + 3\gamma = 8a^2x^2 + 8a\beta x + 2\beta^2 \quad \begin{array}{l} \text{ισότητα} \\ \Leftrightarrow \\ \text{πολυωνύμων} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3a = 8a^2 \\ 3b = 8a\beta \\ 3\gamma = 2\beta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=0 \text{ ή } a = \frac{3}{8} \\ 3b = 8a\beta \\ 3\gamma = 2\beta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{8} \\ 3b = 8 \cdot \frac{3}{8} \beta \\ \gamma = \frac{2}{3} \beta^2 \end{array} \right.,$$

$$\text{για κάθε } \beta \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } f(x) = \frac{3}{8}x^2 + \beta x + \frac{2}{3}\beta^2.$$

7. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ $f'(x_0)$

Παράδειγμα-9

$$\text{Να βρεθεί το όριο } L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - \sqrt{3}}{6x - \pi}$$

Λύση

$$\text{Είναι } L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{6 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}, \text{ θέτω } f(x) = \sin x \text{ και τότε } L = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Αλλά } f'(x) = (\sin x)' = -\eta \mu x \text{ και } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Επομένως } L = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}.$$

8. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ $A(x_1, y_1) \notin C_f$:

Βήμα 1°: Αν δεν γνωρίζουμε το σημείο επαφής αλλά ένα άλλο $A(x_1, y_1)$ από το οποίο περνάει η (ε) θεωρούμε εμείς σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ και χρησιμοποιούμε την εξίσωση $\psi - \psi_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, με αγνώστους τα $f'(x_0)$, x και $f(x_0)$.

Βήμα 2°: Από τα δεδομένα κάθε άσκησης να δημιουργούμε το σύστημα $\begin{cases} f'(x_0) \text{, από την } f \\ A(x_1, y_1) \in (\varepsilon) \\ M(x_0, y_0) \in C_f \end{cases}$ και βρίσκουμε

τους αγνώστους [ή την εξίσωση : $y = \lambda x + \beta \dots$].

Παράδειγμα-10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της c_f που διέρχεται από το σημείο $A(4, 0)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $A \notin c_f$ γιατί οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν την $f(x) = x^2 - 3x$. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε: $f'(x) = 2x - 3$ και $f'(x_0) = 2x_0 - 3$, άρα

$$\varepsilon : \left. \begin{aligned} \psi - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ \text{Αλλά } M \in c_f &\Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2 - 3x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi - (x_0^2 - 3x_0) = (2x_0 - 3)(x - x_0)$$

$$\text{Επίσης, } A \in (\varepsilon) \text{ οπότε: } 0 - (x_0^2 - 3x_0) = (2x_0 - 3)(4 - x_0) \Leftrightarrow x_0^2 - 8x_0 + 12 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 64 - 48 = 16 \quad \text{και} \quad x_0 = \frac{8 \pm 4}{2} \rightarrow \frac{6}{2}$$

- Για $x_0 = 6 \rightarrow f(x_0) = f(6) = 6^2 - 3 \cdot 6 = 18$, άρα η εφαπτομένη στο σημείο $M_1(6, 18)$ με $f'(x_0) = f'(6) = 2 \cdot 6 - 3 = 9$ είναι: $\varepsilon_1 : \psi - 18 = 9(x - 6) \Leftrightarrow 9x - \psi = 36 \Rightarrow \varepsilon_1$
- Για $x_0 = 2 \rightarrow f(x_0) = f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$ και $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, άρα $\varepsilon_2 : \psi - (-2) = 1(x - 2) \Leftrightarrow x - \psi = 4 \Rightarrow \varepsilon_2$

9. ΥΠΑΡΞΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ $A(x_1, y_1) \notin C_f$:

1. Γενική εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0)) \rightarrow$ το υποθέτουμε

$$(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Αντικατάσταση των $f(x_0)$, $f'(x_0)$ και την συνθήκη του προβλήματος οπότε καταλήγουμε σε εξίσωση $g(x) = 0$ με x_0 να θέλουμε να ανήκει σε γνωστό διάστημα.

3.

- Θεώρημα Bolzano ή
- προφανής ρίζα ή
- Σύνολο Τιμών στο διάστημα αυτό και μοναδικότητα (αν ζητείται) για την $g(x) \rightarrow$ όπου x_0

Ασκήσεις για λύση

18. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$.

19. Έστω η συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0 - x)}{2x} = f'(x_0).$$

20. Βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

(α) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, (β) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{x}$, (γ) $f(x) = e^x \ln(\eta \mu x) - \ln x \sigma \nu \chi$

(δ) $f(x) = (2x^2 + x)^x + 5 \ln x$, (ε) $f(x) = \eta \mu x^{\sigma \nu \chi} + \sigma \nu \chi^{\eta \mu x}$, με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, (στ) $f(x) = (\ln x)^{\eta \mu x} + 2x$

21. Έστω την άρτια συνάρτηση f και παραγωγίσιμη το $\mathbb{R}$. Αν $g(x) = (x^2 + x + 1)f(x) + 2 \sigma \nu \chi$, $f(0)=1$, να υπολογίσετε τον αριθμό $g'(0)$. [$g'(0)=1$].

22. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ τότε:}$$

A. Να βρείτε την συνάρτηση $f'(x)$ σε συνάρτηση της f .

B. Αν ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x) < \frac{1}{2}$.

23. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-\alpha) + \ln(x-\beta)$. Να δείχτεί ότι η παράσταση $A = \frac{2[f''(x)]^2 - f'(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ είναι ανεξάρτητη του x .

24. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$ και $g(x_0) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν

για τη συνάρτηση $h(x) = e^{\frac{f(x)}{g(x)}}$ ισχύει $h'(x_0) = 0$, να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

25. α) Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η f' είναι περιττή.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η f' είναι άρτια.

26. Θεωρούμε δύο πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ ίδιου βαθμού και ρ μια ρίζα του $P(x)$ πολλαπλότητας 1.

Αν η συνάρτηση $f(x) = (P(x)/Q(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \rho \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα του $Q(x)$.

27. (α) Αν ένας αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ και του $P'(x)$, να δείξετε ότι ρ ρίζα διπλή και της $P(x)=0$ εξίσωσης και αντιστρόφως.

(β) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $(x-1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + (3\alpha - \beta)x - 2$.

28. (α) Βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές για το οποίο ισχύει:

$$[P'(x)]^2 = P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(β) Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ ώστε: $3f(x) - 2[f'(x)]^2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$.

29. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού ώστε $P(0)=1$, $P'(0)=-3$, $P'(1)=-7$ και $P''(1)=12$.

30. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει: $P(x) = [P'(x)]^2 P''(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (1)

A. Βρείτε το βαθμό του $P(x)$

B. Βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ που επαληθεύουν την (1).

31. Θεωρούμε πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού με ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες της, διαφορετικές ανά δύο.

(α) Δείξτε ότι οι ρ_1, ρ_2, ρ_3 αριθμοί δεν είναι ρίζες της $f'(x)$.

(β) Δείξτε ότι $\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = 0$.

32. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και διπλά παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)=g(x)g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x)g'(x) \neq 0$ να

δειχθεί ότι : (α) f' άρτια (β) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{g''(x)}{g'(x)}$

33. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+ax+b$. Δείξτε ότι η χορδή που περνάει από τα σημεία M_1, M_2 του διαγράμματος της f με τετμημένες α και β αντίστοιχα είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη στο σημείο M της C_f με τετμημένη $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

34. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + x$

A. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Να υπολογίσετε τον αριθμό $(f^{-1})'(1)$.

35. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=|\ln x|$

A. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

B. Αν η ευθεία $y=\alpha$, $\alpha>0$ τέμνει την C_f στα σημεία A και B με τετμημένες x_1, x_2 αντίστοιχα και $M(x_0, y_0)$ στο σημείο τομής των εφαπτομένων της C_f στα σημεία A και B, δείξτε ότι :

(α) Η παράσταση $K = x_0^2 + (\psi_0 - \alpha)^2$ είναι ανεξάρτητη του α . (β) $x_1 x_2 = 1$.

36. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής με $f(0) = 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{f(x)} \cdot (e^{f(x)} + 2x) = 1, \text{ τότε:}$$

A. Να βρείτε την συνάρτηση f και στη συνέχεια την f' .

B. Αν $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Γ. Να δείξετε ότι η διχοτόμος του x' Ογ' εφάπτεται της γραφικής της f στην αρχή αξόνων $O(0,0)$.

Δ. Να δείξετε ότι : Δ1. $f(-x) = -f(x)$, Δ2. $f'(-x) = f'(x)$, Δ3. $(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) \cdot f''(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

37. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y) + \alpha$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

A. $f(0) = -\alpha = 0$ και B. $f'(x) = f'(0)e^x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

38. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + 1$.

A. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B. Να βρείτε την $f'(x)$ σε συνάρτηση της $f(x)$ και αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να υπολογίσετε τον αριθμό $(f^{-1})'(2)$.

38. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

A. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $D_{f^{-1}}$.

B. Να βρείτε την $f'(x)$ σε συνάρτηση της $f(x)$ και αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 3$.

39. A. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2x^2 - 1 = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

B. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης $h(x) = -2x^2 + \ln x$ στο σημείο της με τετμημένη x_0 , να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

40. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x στο $x_0 = 1$.

B. Να βρείτε τις τιμές του x , που ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι αρνητικός.

Γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο

$M(x, f(x))$ ως προς x στο $x_0 = 2$.

41. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής με $f(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$. Αν για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^{2f(x)} = 1 + 2xe^{f(x)}$, τότε:

A. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Να εξετάσετε την f ως προς τη συμμετρία.

Γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της f στο σημείο όπου x_0 η ρίζα της $f''(x) = 0$.

43. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$.

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

B. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $e^{f(2f'(x))} < \frac{e}{e+1}$

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της f που είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: 2x + y - 1 = 0$.

44. α). Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = e^{x^2} + x - 1$.

β). Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + x - 1}{x}$

45. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2} + 3x - x^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο

ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $M(0, 2)$.

2.4. ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ $f(x)$ ΩΣ ΠΡΟΣ x

Έστω μια συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x στο x_0 είναι ο αριθμός $f'(x_0)$.

Παρατηρήσεις - Μεθοδολογία

Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας χρησιμοποιούμε τον κανόνα αλυσίδας του Leibniz για σύνθετες συναρτήσεις. **Δηλαδή έχουμε σύνθετες συναρτήσεις.**

Συγκεκριμένα:

Αν ένα μέγεθος f εξαρτάται από το x , τότε το f είναι συνάρτηση με μεταβλητή x . Δηλαδή: $y = f(x)$.

Αν επιπλέον το x εξαρτάται από το χρόνο t , τότε το x είναι συνάρτηση του t . Δηλαδή: $x = x(t)$.

Τελικά το μέγεθος f είναι συνάρτηση του t . Δηλαδή: $y = f(t)$ ή $y = f(x(t)) \rightarrow$ σύνθετη συνάρτηση

Να θυμάμαι:

Για φυσικά μεγέθη:

🚦 **στιγμιαία ταχύτητα κινητού:** $v(t_0) = S'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος.

🚦 **Γενικά:** $v(t) = s'(t)$ ή $v(t) = x'(t)$

🚦 **Επιτάχυνση κινητού:** $a(t_0) = v'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$, δηλαδή είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.

Γενικά: $a(t) = v'(t) = s''(t)$

..... άλλα μεγέθη

- **ένταση ρεύματος:** $I(t_0) = Q'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$
- **Επίσης Κέρδος = Έσοδα - Κόστος** $\rightarrow P(x) = E(x) - K(x)$,
- **Μέσο κόστος:** $K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}$
- $P'(x) \rightarrow$ οριακό κέρδος
- $K'(x) \rightarrow$ οριακό κόστος
- $E'(x) \rightarrow$ οριακή είσπραξη

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Βήμα 1: Καταγράφουμε τα δεδομένα και τις σχέσεις που τα συνδέουν με τους αγνώστους.

Βήμα 2: Γράφουμε την εξίσωση συνάρτησης $y = \varphi(x)$ για την οποία μας ζητάνε το ρυθμό μεταβολής (π.χ. εξίσωση εφαπτομένης).

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων για $x = x_0$ που ζητείται ο ρυθμός μεταβολής.

Βήμα 4: Αντικαθιστούμε $x = x(t)$, δηλαδή έχουμε την $y = \varphi(x(t))$ και μετά παραγωγίζουμε - αντικαθιστούμε τα δεδομένα και υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής που μας ζητάνε.

Παράδειγμα 1

Σε σφαιρικό μπαλόνι διοχετεύουμε αέριο με σταθερή παροχή 400 cm^3 στο δευτερόλεπτο διατηρώντας την πίεση σταθερή. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας της σφαίρας ως προς το χρόνο τη στιγμή t_0 που η τιμή της είναι $R = 10 \text{ cm}$

Λύση

➔ Έχουμε τη χρονική στιγμή t_0 : $R(t_0) = 10 \text{ cm}$, $V'(t_0) = 400 \text{ cm}^3$.

- Ο όγκος σφαίρας είναι: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ή $V = \frac{4}{3}\pi [R(t)]^3$ και η παροχή $V'(t) = 400 \text{ cm}^3$

$$V'(t) = \underbrace{\frac{dV}{dR}}_{\frac{4}{3}\pi R^2(t)} \cdot \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{R'(t)} \Rightarrow V'(t) = 4\pi R^2(t) \cdot R'(t) \quad (1) \rightarrow \text{ρυθμός μεταβολής όγκου ως προς χρόνο.}$$

Οπότε την χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι :

$$V'(t_0) = 4\pi R^2(t_0) \cdot R'(t_0) \Rightarrow 400 = 4\pi \cdot 10^2 \cdot R'(t_0) \Rightarrow R'(t_0) = \frac{1}{\pi}$$

Παράδειγμα 2(Εφαρμογή 1- σελ.124)

Ένα βότσαλο που ρίχνεται σε μία λίμνη προκαλεί κυκλικό κυματισμό. Μία συσκευή μέτρησης δείχνει ότι τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα r του κυματισμού είναι 50 cm, ο ρυθμός μεταβολής της r είναι 20 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E που περικλείεται από το κυκλικό κύμα, τη χρονική στιγμή t_0 .

Λύση

Επειδή $E = \pi r^2$ και η ακτίνα r είναι συνάρτηση του χρόνου t , έχουμε

$$E(t) = \pi r^2(t) \Rightarrow E'(t) = 2\pi r(t) \cdot r'(t) \quad (1).$$

Οπότε για $t = t_0$ είναι: $r(t_0) = 50$, $r'(t_0) = 10$

Επομένως η $(1) \Rightarrow E'(t_0) = 2\pi r(t_0) \cdot r'(t_0) = 2\pi \cdot 50 \cdot 20 = 2000\pi$ (cm²/sec).

Ασκήσεις για λύση

46. Υλικό σημείο $\mathbf{M}(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\mathbf{c}: y = e^x + x^3 + 1$, με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M περνάει από το σημείο $A(0, 2)$ η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 2 μονάδες/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $l = (OM)$ τη χρονική στιγμή που το M περνάει από το σημείο A.

$$47. \text{Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda & , x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x & , 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \lambda > 0.$$

A. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

B. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Γ. Να βρείτε τα εσωτερικά σημεία όπου η παράγωγος της f μηδενίζεται ή δεν παραγωγίζεται (κρίσιμα σημεία).

Δ. Ένα υλικό σημείο $\mathbf{M}(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \leq 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f .

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι $a'(t) = -\frac{a(t)}{3}$. Η εφαπτομένη της γραφικής

παράστασης της f στο σημείο M τέμνει τον $x'x$ στο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B κατά την χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

48. Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\mathbf{f}(x) = \ln x$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης ενός σημείου

$\mathbf{A}(\alpha, f(\alpha))$ δίνεται από τη σχέση $\alpha'(t) = 2\alpha(t)$, να υπολογιστούν:

A. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής M της εφαπτομένης ε της C_f στο

A με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το A έχει τετμημένη e.

B. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη ε του A. ερωτήματος με τον $x'x$ την ίδια χρονική στιγμή με το A. ερώτημα.

49.Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής με $f(0) = 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{f(x)} \cdot (e^{f(x)} - 2x) = 1, \text{ τότε:}$$

A. Να βρείτε την συνάρτηση f και στη συνέχεια την f' .

B. Αν $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, $x \in \mathbb{R}$. να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες της ευθείας $\eta: x - 2y + 1 = 0$

Γ. Ένα υλικό σημείο $M(x, y)$ ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 < 0$ και

κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ με $x \leq x_0$ και $t \geq 0$. Αν υποθέσουμε ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$, να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του.

50. Ένα κινητό σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $f(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι

κατά τη χρονική στιγμή t_0 Απου το σημείο M βρίσκεται στον άξονα $x'x$, ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του σημείου τομής M από την ευθεία $(\delta): y = x$ είναι ίσος με μηδέν.

Υπόδειξη: Θεωρήσατε ότι $x > \ln x$, για κάθε $x > 0$.

51. Η θέση ενός κινητού σημείου A που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο:

$$x = x(t), \text{ με } x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t, \text{ όπου } t \text{ χρόνος σε sec και } x \text{ μήκος σε μέτρα (m).}$$

A. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου A, για $t=2\text{sec}$ και για $t=4\text{sec}$.

B. Πότε το σημείο A είναι (στιγμιαία) ακίνητο;

Γ. Να βρείτε πότε το κινητό κινείται σε θετική και πότε σε αρνητική κατεύθυνση.

Δ. Να υπολογίσετε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό A στη διάρκεια των πρώτων 5sec.

52. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x \ln x$.

i)Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 0$.

ii)Αν η τετμημένη α αυξάνει με ρυθμό μεταβολής 2cm/sec, βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες, όταν $\alpha=5\text{cm}$.

53.Ευθεία (ε) στρέφεται γύρω από το $A(4,2)$ με ρυθμό $\frac{d\lambda}{dt} = 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$. $\lambda > 0$ ο συντελεστής

διευθύνσεως. Αν η ευθεία τέμνει τους άξονες Ox, Oy στα σημεία M, N αντίστοιχα να

βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMN τη στιγμή που η ευθεία περνά από το $B(5,3)$

54. Σημείο M κινείται σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $R=3\text{cm}$. Αν η προβολή του M στη διάμετρο AB κινείται με ταχύτητα 2cm/sec, από το A στο B, να υπολογιστεί η μεταβολή της απόστασης (AM) όταν η προβολή του M στην AB είναι στο κέντρο του κύκλου.

55. Απο σημείο A αφήνουμε να πέσει ένα μπαλόνι P, το οποίο ανεβαίνει προς τα πάνω Με σταθερή ταχύτητα 5m/sec. Έστω σημείο B σε οριζόντια απόσταση 10m από το A. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας PBA, όταν η απόσταση PA ισούται με 20m.

56. Δίνεται η συνάρτηση $\phi(t) = 2t + \mu$, $t \in \mathbb{R}$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$ [παράμετρος]. Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται απ' τον τύπο $E(t) = (t-1) \phi(t)$, $t \geq 0$ σε εκατομμύρια ευρώ όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη. Το κόστος λειτουργίας δίνεται από το τύπο $K(t) = \phi(t+4)$, $t \geq 0$.

α] Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$, για $t \geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι το 1^ο έτος

η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια ευρώ.

β] Ποιά χρ. στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ] Ποιός θα είναι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους στο τέλος του 2^{ου} έτους;

57. Δίνεται το κόστος παραγωγής $K(x)=800+550x-15x^2+\frac{x^3}{3}$ και η τιμή πώλησης $\Pi(x)=425x$.

A. Πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός ;

B. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους $K_{\mu}(x)=\frac{K(x)}{x}$ μηδενίζεται αν το μέσο κόστος ισούται με το οριακό.