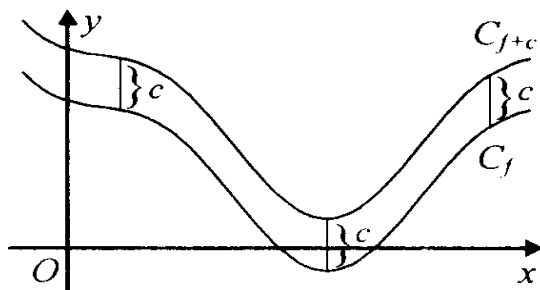


ΚΕΦ. 1ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ



Χρήστος Κωστόπουλος
μαθηματικός

1.2 Έννοια Συνάρτησης

1. ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ - ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ - ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $f(x) = a$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f_1(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{\sqrt{|x| - x}}$ ii) $f_2(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ iii) $f_3(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - x + 1}}$

2. Όμοια των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{x-5}$ (β) $h(x) = \sqrt{\ln\left(\ln\frac{5x+3}{5-2x}\right)}$ (γ) $\varphi(x) = x-3\sqrt{-x^2+9x-7}$ (δ) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+4|x|-5}}$

3. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

i) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ ii) $g(x) = \ln\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ iii). $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ iv). $f(x) = (1-x^2)^{\sqrt{x}}$
v). $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ vi) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ vii). $f(x) = \sqrt{\ln\frac{4x-x^2}{3}}$ viii). $f(x) = \sqrt{\ln(3-|2x+1|)}$
ix) $f(x) = \sqrt{5^{2x} - 5^{x+1} + 4}$. x). $f(x) = \sqrt{|x^2+8x-9|-24}$ και xi). $g(x) = \ln(x - \sqrt{x^2+x+1})$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha \ln x + \beta, & \text{αν } x > 0 \\ \alpha e^x - \beta, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

B. Αν $f(0) = -1$ και $f(1) = 3$, να βρείτε τις τιμές α και β και τις ρίζες της f.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + e^x$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

B. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a^2 - 1$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln(x-3)$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

B. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - \alpha = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση, για κάθε $\alpha > 0$.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^5(x) + f(x) - e^x + 1 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τις ρίζες και πρόσημο της f στο $\mathbb{R}$.

B. Αν γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2025 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

7. A. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$.

B. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

8. Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των

δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι $E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in (0,8)$.

2. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ - ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ

9. Να σχεδιάσετε τις γραφικές των συναρτήσεων: α) $f(x) = \sqrt{-x}$ β) $f(x) = \sqrt{|x|}$ και γ) $f(x) = \sqrt{|x-1|} + 2$

10. Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g όταν:

A. $f(x) - g(x) = x^2 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$. και B. $f(x) = g(x) + \ln(x-1)$, με $x > 0$.

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) - 2f^2(x) + 5f(x) = -e^{2x} - e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow x \in \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $g(x) = \frac{2f^2(x) - 3f(x) + 1}{x^2 - 3x + 4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να

δείξετε ότι η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

3. ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

13. Έστω οι συναρτήσεις f, g που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$4x^2 + 3f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x) = 4xf(x) + f^2(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } f = g.$$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2\lambda^3 - x}{x + \lambda^2 - 2\lambda}$ & $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2\lambda + \lambda^2x}{(x-1)^2}$.

Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f=g$.

4. ΣΥΝΘΕΣΗ – ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

15.Α] Έστω $(g \circ f)(x) = 12$ και $g(x) = e^{2x} - e^x$, $h(x) = \ln(x^3 + 3x)$.

A.1. Να βρεθεί η f .

A.2. Να βρεθούν τα x ώστε η γραφική της f να είναι πάνω από τη γραφική της h .

B] Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $g(x) = e^x$ και $f(x) = \ln x$ Να λυθεί η εξίσωση: $x(g \circ f)(x) = (f \circ g)(2x^2 + x - 2)$.

16. Αν $f(f(x)) = x^2 + 2x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τον $f(2)$.

17. Να βρείτε δυο συναρτήσεις f & g τέτοιες ώστε: $(f \circ g)(x) = | \eta \mu x |$ και $(g \circ f)(x) = (\eta \mu \sqrt{x})^2$.

18. Αν $f(x) = 2x - 1$ και $f(e^{g(x)}) = 2x^2 + 3$, να βρεθεί η $g(x)$.

19. Να βρείτε τη συνάρτηση f όταν:

A. $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + 4$.

B. $(f \circ g)(x) = \frac{1-x}{1+x}$, για κάθε $x > -1$ και $g(x) = \ln(x+1)$.

20. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g με κοινό Π.Ο. το A , υποθέτουμε ότι $f \circ g$ ορίζεται στο $A' = [-\alpha, \alpha] \subseteq A$

με $\alpha \in (0, +\infty)$.

(i) Αν f άρτια και g άρτια δείξτε ότι: $f \circ g$ άρτια.

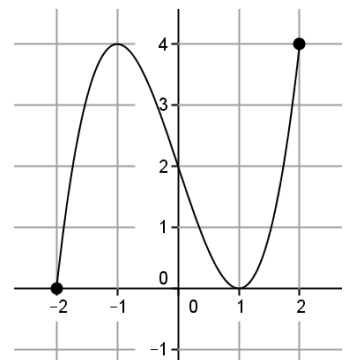
(ii) Αν f περιπτή και g άρτια δείξτε ότι: $f \circ g$ άρτια.

(iii) Αν f άρτια και g περιπτή δείξτε ότι: $f \circ g$ άρτια.

(iv) Αν f και g περιπτές δείξτε ότι: $f \circ g$ περιπτή.

21. Δίνονται η συνάρτηση και η σχέση $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + \lambda x + 4}$ και η σχέση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 7x + 14x + 20}, & x \leq \mu \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}, & x > 4\mu - 4 \end{cases}$$



α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ ώστε ο τύπος της g να είναι τύπος συνάρτησης.

Για $\mu=2=\lambda$

γ) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

i) $f + g$, ii) $\frac{f}{h}$ και iii) $h \circ f$, όπου h η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.

5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x \cdot \psi) = f(x) + f(\psi)$ για κάθε $x, \psi \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε

ότι: i) $f(1)=0$ ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, $x \in (0, +\infty)$ iii) $f\left(\frac{x}{\omega}\right) = f(x) - f(\omega)$, με $x, \omega \in (0, +\infty)$.

23. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(x-y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1). Δείξτε ότι

i) $f(0)=0$. ii) η συνάρτηση f είναι άρτια. και iii) $f(x+y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

1.3. Μονοτονία- Ακρότατα- Αντίστροφη συνάρτηση

1. MONOTONIA -ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ MONOTONIA

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$, με $x \in (-1, +\infty)$.

A. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

B. . Να αποδείξετε ότι η γραφική της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) = 1$.

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x+3}{x^2+1}$.

25. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f(x))^3 + 2f(x) = x^3 + 5x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3 - 1) > f(x - 1)$.

26. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = e^x + x - 1$

A. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία στο $\mathbb{R}$.

B. Να δείξετε ότι έχει μία μόνο ρίζα και ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $g(x) > 0$ $x \in (0, +\infty)$.

27. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λύσετε τις ανισώσεις:

A. $f(5x+1) > f(5x)$, αν $g(3) = 0$

B. $f(x^2 + 3x + 2) > f(x(x+3)+1) - 1$, αν $f(2) = f(1) - 1$

Γ. $f(x^3 + 1) + f(x^2) < f(x^2 + 1) + f(x^3)$

2. ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ «1-1» -ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ -ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ-ΑΝΙΣΩΣΗΣ

28. Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

και $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

**Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών - Οικονομίας και Πληροφορικής
Συναρτήσεις**

A. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$ και $r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1} = f$, όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

ii) Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η ισότητα: $e^{-(\lambda^2-4)} - e^{-(\lambda-2)} = -\lambda^2 + 4 - (\lambda - 2)$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^5 + x - 1$. Να δειχθεί ότι:

i) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η f είναι «1-1».

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$. (Ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$).

iv) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(-1) = x$.

v) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x+9) > x$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^5 + x - 2$.

i) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2) = x$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(5x+6) < 1$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 - 1$.

i) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_φ και $C_{\varphi^{-1}}$.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $\varphi^{-1}(x) > -3$.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $\varphi^{-1}(x) = 0$.

33. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η c_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(1,2)$, να λυθεί η εξίσωση $f(f(e^x - 2) - 2) = 2$ και η ανίσωση $f^{-1}(\ln x + 1) > -1$.

34. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f^3(x) + f(x) - e^x - x + 1 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

B. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

Γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f^3(x) + f(x)) = 0$.

35. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^2 - 1$, $x \in (0, +\infty)$.

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $(0, +\infty)$.

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $\ln 2x - (x+1)^2 > \ln(x+1) - 4x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$ & $g: B \rightarrow A$. Δείξτε ότι:

i) Αν $(g \circ f)(x) = x$ τότε η f είναι «1-1»

ii) Αν $(g \circ f)(x) = x$ τότε: $g = f^{-1}$.

iii) Αν $(g \circ f)(x) = x$ και g «1-1», τότε: $f = g^{-1}$.

37. Θεωρούμε τις «1-1» συναρτήσεις f και g ορισμένες στα A και B αντίστοιχα και για τις οποίες υπάρχει

η gof . A) Να δείξετε ότι η gof είναι «1-1» και B) $(\text{gof})^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α.
- ii) Να εξεταστεί αν είναι άρτια ή περιπτή.
- iii) Να βρεθεί αν υπάρχει η αντίστροφη f^{-1} .

39. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow [0, +\infty)$, με $f(x) = \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right)$.

- i) Ναδειχθεί ότι: $A = [0, 1)$
- ii) Ναδειχθεί ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και να βρεθεί.

40. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ & $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x+1$.

- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- ii) Ναδειχθεί ότι η f είναι περιπτή.
- iii) Ναδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .
- iv) Να βρεθεί η συνάρτηση $g \circ f^{-1}$

41. Δίνεται η «επί» συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} (x-2) + \beta, & \text{για κάθε } x \in [2, +\infty) \\ \lambda(x-2) + \beta, & \text{για κάθε } x \in (-\infty, 2) \end{cases}$.

Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει η αντίστροφή της και να βρεθεί.

42. Έστω οι γνήσιες φθίνουσες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ & $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$. Δείξτε ότι:

- i) Η σύνθεση $f \circ g$ και το γινόμενο $f \cdot g$ είναι γνησίως μονότονες συναρτήσεις.
- ii) Η εξίσωση $f(g(x)) = f(x) \cdot g(x)$ έχει το πολύ μια πραγματική λύση.

43. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 8x + 7) = f(x - 1)$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x), x \in \mathbb{R}$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Ναδειχθεί ότι: i) η f αντιστρέφεται ii) $f^{-1}(x) = -f(x)$ iii) η f είναι περιπτή iv) $f(0) = 0$.

46. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ με $x \in [1, +\infty)$. Να δείξετε ότι είναι 1-1.

β) Να βρεθεί ο $f^{-1}(\frac{4}{5})$.

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών των f και f^{-1}

47. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f(x))^3 + 3f(x) + 2002 - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- β. Να βρεθεί η αντίστροφή της

48. α. Δίνεται η «1-1» συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ναδειχθεί ότι η $g(x) = f(\ln x + 2) + 1$ είναι «1-1» και να βρεθεί η g^{-1} .

β. Αν η c_f διέρχεται από το $A(2, 1)$, να λυθεί $g^{-1}(x) = 1$.

49. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε: $e^{f(x)} + f(x) - x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(A) = \mathbb{R}$.

- A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- B. Να βρείτε την f^{-1} .
- Γ. Να βρείτε το $f(0)$.

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-2} < 3 - x^2$.

Ε. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

50. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε: $e^{f(x)} + f(x) = x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f\left(\frac{e}{x}\right)$

Γ. Να βρείτε την f^{-1}

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $(x^3 - 8)(e^x - 3) < f(-1)$.

51. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \kappa x + \ln(e^x + 1) - 1$, για κάθε $\kappa > 0$ και $g(x) = f(x) - x$.

A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Αν $f^{-1}(\ln 6 - 1) = \ln 2$, να βρεθεί ο αριθμός κ .

Γ. Για $\kappa = -1$, να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} .

Δ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική της g^{-1} βρίσκεται κάτω από τον x 's άξονα.

E. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) - f(x) = 0$.

52. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι η $f \circ g$ είναι «1-1».

A. Να δείξετε ότι η g είναι «1-1».

B. Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x) + x^3 + x) = g(f(x) - \ln x + 2)$

Γ. Αν το σύνολο τιμών της g είναι το $(0, +\infty)$ να δείχτεί ότι η εξίσωση $ae^{g(x)} = 1$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $a \in (0, 1)$.

53. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε: $f(e^x - 1) = x - e^{-x} + 1$, για κάθε $x > -1$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση g με $A_g = \mathbb{R}$ και $g(A) = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$(g^2(x) - g(x) + 1) \cdot \ln g(x) - x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η $f(x) = \ln(x + 1) - \frac{1}{x + 1} + 1$, $x > -1$.

B. Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)} - 1 > 0$.

Γ. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} .

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x)) = 1$.

54. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και για την συνάρτηση f ισχύει: $(f \circ f)(x) = x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».

B. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Γ. Αν ισχύει: $f(g(e^x) - 2x + 3) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την συνάρτηση g .

55. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $e^{f(x)} - e^{1+\ln x} = 1 + \ln x - f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να δείξετε ότι $f(x) = 1 + \ln x$, $x > 0$.

Γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

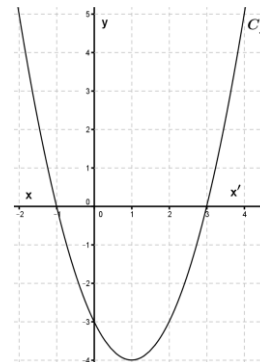
Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x + 2) = 0$.

56. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x - 2 + \ln x$.

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- B. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
- Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = 0$.

57. A. Δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f .

- A.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f και το σύνολο τιμών $f(A)$.
- A.2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- A.3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- B. Να κάνετε το ίδιο για τη συνάρτηση $-f$.
- Γ. Όμοια και για την συνάρτηση $|f|$.



58. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(3,4) B(6,-2).

1. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να δείξετε ότι και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .
3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(-3 + f^{-1}(|x| - 5)) < 4$.
4. Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(f(x^2 + 2) + 6) = 3$.

59. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x+1) + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x+1) - f(4) = f(5) - f(2x)$.
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει: $f(a) + f(3a+1) > f(2a) + f(4a+1)$.

1.4 Όρια Συναρτήσεων

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x}$. Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση και να βρείτε

εφόσον υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και το $f(1)$.

61. Για μια συνάρτηση f ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lambda(3 - 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει όριο καθώς $x \rightarrow 2$.

62. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x < 3 \\ \sqrt{x - 3}, & x \geq 3 \end{cases}$. Να γίνει γραφική παράσταση και να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

1.5 Ιδιότητες Ορίων

1. **f ΡΗΤΗ** με $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$

→ **ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$** : Παραγοντοποιούμε - απλοποιούμε- αντικαθιστούμε

63. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 5x + 4}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 4}$ ε) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x^2 - 4}$ και στ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x - 3}$,
με $9\alpha + 3\beta + \gamma = 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\Rightarrow$ Παραγοντοποιούμε - απλοποιούμε- αντικαθιστούμε ή Κ.Π.

64. Να υπολογίσετε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x}{x}$, β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x - 2\eta\mu x}{x^2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \varepsilon\phi x}{x^2}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^5 \sin\left(\frac{1}{x^{100}}\right) \right)$

65. Να υπολογίσετε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \eta\mu x} - 1}{x}$, β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\eta\mu x}{x^2 - 2x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1}$.

3. ΟΡΙΑ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

66. Να υπολογίσετε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{\eta\mu \beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi \alpha x}{\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu nx}{x}$ δ) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x - \alpha}{2} \varepsilon\phi \frac{\pi x}{2\alpha}$ και (ε) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - 2\sin x}$

67. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\eta\mu(x+2)}{4x+8}$, β) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 \alpha}{x^2 - \alpha^2}$, $\alpha \neq 0$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - 3}{\eta\mu(\pi x)}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\eta\mu 5x - \eta\mu 3x)}{1 - \sin x}$.

68. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2 + x] = 2$ (1) και $f(x) = f(2-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΥΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ Ή ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

69. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+1} - 2}{x}, & -1 < x < 0 \\ 6x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

70. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3| + x^2 - 9}{x-3}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{|x^2 - x| + |x-4| - 3x}{\sqrt{x-4}} \quad \text{και} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2| - |2x-1|}{x^2 - 1}$$

5. ΟΡΙΟ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

71. Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 2 \right) g(x) \right] = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(x + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 9} \right) f(x) \right] = 1$

, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

72. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu 3x} = 4$ & $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) (\sqrt{1+x} - 1) = 10$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$.

73. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν: i) $(f \circ g)(x) = x^4 + x^2 + 5$ με $g(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - h(x)] = 2$.

A. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$

B. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

6. ΟΡΙΟ ΜΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ : $|f(x)| \leq \theta$ ή $|f(x)| \leq |g(x)| \rightarrow$ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

74. Να βρεθούν τα όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $|f(x)| \leq x^2 \eta \mu \frac{1}{x}$, για κάθε $x \neq 0$.

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $\frac{|x+1|}{x^2 + x + 1} \leq f(x) \leq \left| \frac{\eta \mu x}{x} (x^4 + x^2 + 1) \right|$, για κάθε $x \neq 0$.

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $|xf(x) - 2\eta \mu x| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $|x^2 f(x) - \sigma \nu 2x + 1| < x^4 + |x^3|$, για κάθε $x \neq 0$.

75. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x + 2$ για κάθε $x > 0$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 5} - 3}{x^2 - 4}$ και δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) - 3| - 1}{x^2 - 5x + 6}$

7. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ- ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

76. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ & $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf^2(x) - 16x}{xf(x) - 2\mu f(x) - 4x + 8\mu} = 4$, να βρεθεί ο αριθμός $\mu \in \mathbb{R}$.

77. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, & x < 1 \\ \alpha x + \beta, & x \geq 1 \end{cases}$. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς

α και β ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και να ισχύει $f(2) = 1$.

8. ΟΡΙΟ ΤΗΣ f ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

⇒ Στην κατηγορία αυτή η συναρτησιακή σχέση που μας δίνεται είναι :

$$f(x+y) = \dots, \text{ για κάθε } x, y \in \square \in \mathbf{R}. \quad (1) \quad \text{ή} \quad f(x \cdot y) = \dots, \text{ για κάθε } x, y \in \square \quad (2).$$

$$\text{ΓΙΑ ΟΡΙΟ} \rightarrow \text{θέτω για την (1) } x-x_0=h \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 0 \\ \& \\ x = x_0 + h \end{cases} \quad \text{ή για την (2)} \quad \frac{x}{x_0} = h \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 1 \\ \& \\ x = x_0 h \end{cases}$$

78. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathfrak{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι είναι

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta), \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathfrak{R}. \text{ Αν είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

79. (α) Να αποδείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) = l, \quad x_0 \neq 0$

(β) Αν για κάθε $x \neq 0$ ισχύει : $f(x\psi)=f(x)+f(\psi)+(x-1)(\psi-1)$ (1) και (2), να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

80. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathfrak{R}$ τέτοια ώστε : $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta + f(\beta)\sigma\upsilon\nu\alpha$, για

$$\text{κάθε } \alpha, \beta \in \square \quad (1) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha}.$$

81. Έστω η συνάρτηση $f : \square \rightarrow \square$ για την οποία υποθέτουμε ότι είναι $f(xy) = f(x)f(y) - 2xy$

$$\text{για κάθε } x, y \in \square, \quad f(x) > 0 \quad (1) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad (2).$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

B. Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(1), f(2)$.

$$\Gamma. \text{ Αν } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x^2)}{x^2}, & x > 0 \\ x^5 \eta \mu \frac{2015}{x^{2015}} - a, & x < 0 \end{cases}, \text{ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό } a \text{ ώστε να υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

9. ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΜΕ ΜΟΝΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

82. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ και

$$f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathfrak{R} \quad (1). \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

83. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f : \square \rightarrow \square$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ και

$$xf(x) - \eta \mu x \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathfrak{R} \quad (1). \text{ Να βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

84. A. Αν η f είναι περιπτή και $\lim_{x \rightarrow 3} [-2f(x) + x - 1] = 4$, να δείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$.

B. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και $\lim_{x \rightarrow 1} [-3f(x) + x - 2] = 5$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

1.6. Μη πεπερασμένο όριο($\pm\infty$) συνάρτησης όταν $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

1.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{a}{0}$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

1. Βρίσκω το πρόσημο της $g(x) \rightarrow$ του παρονομαστή

1.α. Αν η $g(x)$ έχει σταθερό πρόσημο τότε έχοντας υπόψιν την ιδιότητα :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty \text{ Οπότε γράφουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \text{ σύμφωνα με τις επιτρεπτές πράξεις του } \overline{\mathbb{R}}.$$

1.β. Αν η $g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 κάνω πλευρικά όρια σύμφωνα με την περίπτωση

$$1.α. \text{ Δηλαδή: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \end{cases},$$

διαφορετικά μεταξύ τους οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

85. Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x + 1}{x^4 + x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^3}$ και γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{x^2 - x - 2}$.

2.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΥ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{l}{0}$ με $l \neq 0 \rightarrow$ παράμετρος.

86. Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (\lambda + 1)x - \mu + 2}{x^2 - 1} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + (\lambda + \mu)x^2 - 2\lambda + \mu - 1}{x} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+3} - \mu}{x^2 - 9}$$

3. ΟΡΙΟ $f(x)$ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ $|f(x)| \leq \theta$ ή $|f(x)| \leq |g(x)| \rightarrow$ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

87. Θεωρούμε τη συνεχή και «1-1» συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

i) $e^{x+1} - 1 \leq (x+1) \cdot f(x) \leq e^{\varphi(x+1)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$, τότε: Να βρεθούν οι αριθμοί $f(2), f(-1), f^{-1}(0), f^{-1}(1)$.

88. Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(x^2 - 2x + 1)f(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \neq 1$,

(1). Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

4.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ ΟΡΙΟ ΤΗΣ f ΜΟΡΦΗΣ $\frac{a}{0}$

Έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ με $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ Κάνουμε διερεύνηση για την παράμετρο.

- Αν $\ell > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } g(x) > 0 \\ -\infty, & \text{αν } g(x) < 0 \end{cases}$
- Αν $\ell < 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } g(x) > 0 \\ +\infty, & \text{αν } g(x) < 0 \end{cases}$
- Αν $\ell = 0$ τότε βρίσκουμε τη τιμή της παραμέτρου ℓ και την αντικαθιστούμε στο αρχικό όριο και γίνεται το οποίο και υπολογίζουμε κατά τα γνωστά .

89. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta x - 2}{x^2 - 1}, & \text{αν } x < -1 \\ \frac{\alpha x^2 - \gamma x + 5}{x + 1}, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$, να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

και να είναι πραγματικός αριθμός.

90. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1+\alpha x)}{x^2}$, και πεδίο ορισμού $[-1,0) \cup (0,+\infty)$.

α) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \beta$, όπου $\beta \in \mathbb{Q}$. β) Να βρεθεί το β .

91. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{x + 1} = 4$.

92. Αν $f(x) = \frac{\alpha|x+2| + \beta|x-4| - 2}{x^2 - 5x + 6}$, να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$.

5.ΟΡΙΟ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

- $|\eta\mu x| \leq 1, |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1, |x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$,
- $|\eta\mu x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ & $|x+\psi| \leq |x|+|\psi|$ και άλλων ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών όπως στη

93. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 - \eta\mu x}{x^2 + x} = 3$, να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5 - 3f(x)| - 1}{x^2 - x}$.

94. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ για τα οποία $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^v - \alpha f(x) + \beta}{x - 1} = 3$, $v \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ & $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 1$.

95. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 2)] = -\infty$, να υπολογιστούν τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, B) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$ και Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ με $g(x) \succ f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.7 Όριο Συνάρτησης στο $\pm\infty$

1. ΟΡΙΟ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

96. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

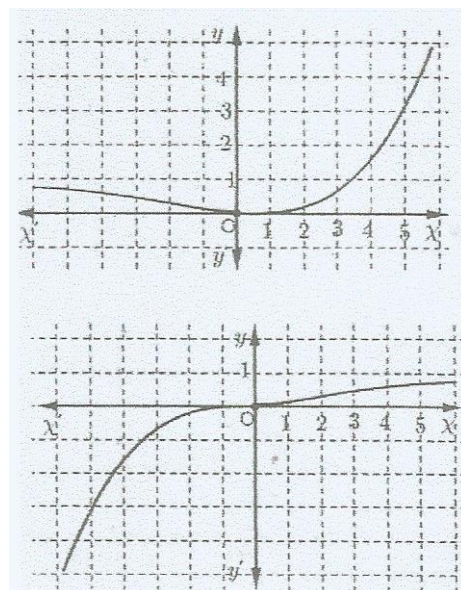
A. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$ και 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

97. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

A. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$ και 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$



2. ΟΡΙΟ ΠΩΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ - ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k}$.

Δηλαδή κρατάμε τους μεγιστοβάθμιους όρους ως προς x και στον αριθμητή και στον παρονομαστή.

ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΜΕΝΑ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & , \text{αν βαθμός } P(x) < \text{βαθμός } Q(x) \\ \frac{\alpha_v}{\beta_k} & , \text{αν βαθμός } P(x) = \text{βαθμός } Q(x) \\ \pm\infty & , \text{αν βαθμός } P(x) > \text{βαθμός } Q(x) \end{cases}$

98. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 6x + 1}{3x^2 + x - 2}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3x-1}{x^2-3x+2} \right)$ και γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 3x| + 2x - 1}{2x - 5}$

3. ΟΡΙΟ ΑΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΟΡΦΗΣ : $\left[\sqrt{\frac{h(x)}{g(x)}}, \frac{\sqrt{h(x)}}{g(x)}, \frac{h(x)}{\sqrt{g(x)}} \right]$

Μορφή $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ κοινό παράγοντας ο μεγιστοβάθμιος όρος από αριθμητή και παρονομαστή.

Προσοχή στη ιδιότητα $\sqrt[2v]{x^{2v}} = |x| = \begin{cases} -x & , \text{αν } x \rightarrow -\infty \\ x & , \text{αν } x \rightarrow +\infty \end{cases}$

4. ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(g(x))$, $\rightarrow$ Θέτουμε $u = g(x) \rightarrow$ Βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = u_0$ ή $\pm\infty \rightarrow \lim_{u \rightarrow u_0 \text{ ή } \pm\infty} f(u)$.

99. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \eta\mu \left(\frac{2x^2}{x^4 + 1} \right) \right) = 2$.

5. ΟΡΙΟ ΑΡΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\rightarrow \sqrt[n]{g(x)} - \sqrt[n]{h(x)}$

(α) $\rightarrow$ κοινός παράγοντας στο υπόρριζο τον μεγιστοβάθμιο όρο από αριθμητή και παρονομαστή- αντικαθιστούμε και προκύπτει το όριο $\neq$ προκύπτει

(β) **ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ ΜΟΡΦΗΣ** $\infty - \infty \rightarrow$ πολ/με και διαιρούμε με συζυγή παράσταση κάνοντας χρήση της

$$\alpha - \beta = \frac{\alpha^v - \beta^v}{\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{v-2} + \beta^{v-1}},$$

ΝΑ ΠΡΟΣΕΧΩ! ΣΤΗΝ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ ΜΟΡΦΗΣ $\infty - \infty$ με παράσταση $\ln f(x) - h(x) \rightarrow$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$\ln f(x) - h(x) = \ln f(x) - \ln e^{h(x)} = \ln \frac{f(x)}{e^{h(x)}}$$

Θέτω $u = \frac{f(x)}{e^{h(x)}}$ και ως σύνθετη βρίσκω το όριό της με γνωστό τρόπο.

100. Υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει:

$$(α) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0 \quad (β) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - ax - b \right) = 0$$

101. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3} - x$ ημα + συνβ, με $\alpha \in (0, \pi)$ και $\beta \in \mathbb{R}$.

A. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των α, β.

B. Για ποιες τιμές των α, β έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$;

102. Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+2) - \ln(x^2+1)]$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2+5) - \ln(x^2+1)]$.

6. ΟΡΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΔΕΝ Ξεχνάμε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$, $\lim_{\varphi(x) \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu\varphi(x)}{\varphi(x)} = 0 \Rightarrow$ χρήση κατάλληλων ανισώσεων και Κ.Π

103. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) + 1821 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

ii) Βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 1825} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^5}$

104. Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ β). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{e^x} \right)$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x + \eta\mu x]$

105. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ αν ισχύει: $\sqrt{\frac{9x^2 - 3x + 1}{x + 2}} < f(x) < \frac{3x + 4}{x}$ (1)

7. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΟΡΦΗΣ $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{g(x)}$

Βήμα 1: ► Κάνουμε χρήση της ιδιότητας (Β' ΛΥΚΕΙΟΥ) : $\alpha^x = e^{x \cdot \ln \alpha}$, με $\alpha > 0$ και έχουμε:

Βήμα 2: ► $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ (1) η οποία είναι σύνθετη, οπότε εργαζόμαστε σύμφωνα με την 4^η μέθοδο της ίδιας παραγράφου §1.7.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Στο Βήμα 2 μπορεί να καταλήξουμε σε μορφή ορίου $0 \cdot (\pm\infty)$ την οποία μετασχηματίζουμε ως εξής:

$$0 \cdot (\pm\infty) \rightarrow \frac{1}{0} \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

Να θυμάμαι (ΑΠΟ ΣΧΗΜΑ) ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ [$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$, με $\alpha > 1$] **και** $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ [$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$, με $\alpha > 1$]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$, με $\alpha < 1$ **και** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = -\infty$, με $\alpha < 1$

και οι μεθοδεύσεις ορίων είναι ίδιες με των προηγούμενων συναρτήσεων.

106. Να βρεθούν τα όρια: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x$.

8. ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Ρητή Εκθετική συνάρτηση με σταθερές βάσεις

- Αν $x \rightarrow -\infty$: κοινός παράγοντας ο εκθετικός όρος με τη μικρότερη βάση από αριθμητή και παρονομαστή-αντικαθιστούμε
- Αν $x \rightarrow +\infty$: κοινός παράγοντας ο εκθετικός όρος με τη μεγαλύτερη βάση από αριθμητή και παρονομαστή-αντικαθιστούμε

2. Ρητή Εκθετική συνάρτηση με βάση παράμετρο

→ Κάνουμε περιπτώσεις για τη παράμετρο συγκρίνοντας την με την βάση σταθερής .

107. Να βρεθούν τα όρια: a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+2}}{3^x + 2^x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+2} + \alpha^{x+1}}{\alpha^{x-1} + 2^{x-1}}$.

9. ΟΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ

108. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5$ να βρεθεί ο αριθμός μ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

109. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^4(x) + 2006f(x) = 2x + 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Ν' αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να βρεθεί η αντίστροφη f^{-1}

γ. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f^{-1}(x) + \eta\mu x + 6}{x}$.

110. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x+2}{x^2+x}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

α). Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{-x} f(x) \eta\mu \frac{1}{2f(x)} \right]$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left[e^{\frac{1}{x}} f(x) + e^{-f(x)} \cdot \ln x \right]$.

111. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^x) - \ln(1 + e^x)$.

A). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B). Να βρείτε το πρόσημο της f .

Γ). Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Δ). Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{f^{-1}(x)} - e^{f(x)})$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. **1. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ x_0 - ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΕΥΡΕΣΗ ΤΙΜΗΣ ΤΗΣ f**

Να θυμάμαι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

112. Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \eta\mu(x-1)}{x^2 - 4x + 3} = +\infty$, τότε να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

113. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)}{h} = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

114. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = \frac{11}{4}$, τότε :

(i). Να δείξετε ότι το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στην C_f .

(ii). Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

115. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10$.

(i). Να βρείτε το $f(1)$

(ii). Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1=-1$

(iii). Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 5}{x + 1}$.

116. Θεωρούμε συνάρτηση f "1-1" και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x^2}{x - 1} = 3$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $(1, f(1))$, να υπολογιστούν (α) ο αριθμός $f(1)$ και (β) ο αριθμός $f^{-1}(2)$

117. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{9+x}}{x} = 2$ (1) τότε:

(i) Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$. (ii) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

118. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0=1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x-1) - x^2 + x}{x - 1} = 1$, να βρείτε την τιμή της f στο $x_0=1$.

119. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και για κάθε $x \neq 1$ ισχύει: $|x-1| \cdot \eta\mu \frac{1}{(x-1)^2} \leq f(x) + 2 \leq \frac{|x-1|}{1 + e^{\frac{1}{|x-1|}}}$, να βρεθεί το $f(1)$.

2. **ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ D_f ή ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $(\alpha, \beta) \subseteq D_f$**

120. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \square \rightarrow \square$ ώστε να ισχύει: $xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \square$.

(1), για κάθε $x \in \mathfrak{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathfrak{R}$, να βρείτε τη τιμή $f(1)$ και κατόπιν το τύπο της f .

3. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $[a, b]$

Βήμα 1: Θεωρούμε τυχαίο σημείο $x_0 \in A_f$ [ή $x_0 \in (a, b)$] και αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 ή χρησιμοποιούμε τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις και τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

Βήμα 2: Δείχνουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

121. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση συνεχής με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) + 2x^2 = 2xf(x) + 1, \text{ για κάθε } x \in [-1, 1]. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

122. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow [-2, 2]$. Να δείχτεί ότι η εξίσωση $f^2(x) - 2f(x) + 4x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.

4. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ - ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

(α) Εντοπίζουμε τα πιθανά σημεία ασυνέχειας, δηλαδή τα σημεία στα οποία δεξιά και αριστερά η συνάρτηση έχει διαφορετικό τύπο.

(β) Εξετάζουμε με πλευρικά όρια αν η συνάρτηση είναι συνεχής ή ασυνεχής.

123. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} ax^2 - \beta x + 5, & x \leq 1 \\ 2ax^2 + 2\beta, & x > 1 \end{cases}$ Αν η f είναι συνεχής και το

σημείο $A(a, 3\beta + 1)$ ανήκει στην ευθεία $\psi = 2x$, να προσδιορίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$

5. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ

• Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. ΔΗΛΑΔΗ:

Μέθοδοι:

1. $\rightarrow$ Θ.Β.-W στο $[a, b]$ για την f

2. $\rightarrow$ Σύνολο τιμών που να περιέχει το $0 \in f(A)$ και f συνεχής άρα υπάρχει ενδιάμεση τιμή $x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) = 0$.

3. $\rightarrow$ Θεώρημα Bolzano ΣΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

4. $\rightarrow$ Προφανής με δοκιμή.

5. $\rightarrow$ (αν είναι δύσκολο ν.δ.ο. $f(a) \cdot f(b) < 0$) Βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow \kappa^+} f(x) < 0 \Rightarrow f(a) < 0$ με a κοντά στη περιοχή του κ . ιδιότη.

$\rightarrow$ Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow \lambda^+} f(x) > 0 \Rightarrow f(b) > 0$ με β κοντά στη περιοχή του λ . Μετά κάνουμε Θ.Β. στο διάστημα (a, b) .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο αριθμός $x_0 \in (a, b)$ δεν είναι μοναδικός.

$\left. \begin{aligned} &\bullet \text{ Αν } g \text{ συνεχής στο } x_0 \in \mathbb{R} \\ &\bullet \text{ Η } f \circ g \text{ ορίζεται σε διάστημα } \cup(x_0, \delta) \\ &\bullet \text{ Η } f \text{ συνεχής στο } g(x_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \circ g \text{ συνεχής στο } x_0$

6. ΥΠΑΡΞΗ ΜΙΑΣ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f(x) = 0$ Ή ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΜΗΣ ΤΗΣ c_f ΜΕ ΤΟΝ x ΣΕ ΑΝΟΙΧΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (a, b)

**Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών - Οικονομίας και Πληροφορικής
Συναρτήσεις**

124. Θεωρούμε τη συνάρτηση f στο διάστημα $A=[\alpha, \beta]$ με $f(A)$ και $|f(x_1)-f(x_2)| = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$

για κάθε $x_1, x_2 \in A$. Να αποδείξετε ότι:

- (i) Η f είναι συνεχής στο A
- (ii) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$: $f(x_0)=x_0$.

7. ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΜΗΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Μέθοδος: → Αντικαθιστούμε όπου ξ το x και θεωρούμε $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ και αναγώμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

8. ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΣΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μέθοδος: → Μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε ισοδύναμη της πολυωνυμική και εφαρμόζουμε το Θ.Β.-W στην αντίστοιχη συνάρτηση.

9. ΥΠΑΡΞΗ ΔΥΟ, ΤΡΙΩΝ, ... n - ΡΙΖΩΝ ΣΤΟ (α, β)

Χωρίζουμε το διάστημα (α, β) σε n υποδιαστήματα ξένα μεταξύ τους και δείχνουμε σε καθένα από αυτά το θεώρημα B-W.

1^η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε πολυωνυμική εξίσωση n -βαθμού έχει το πολύ n το πλήθος πραγματικές ρίζες.

2^η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν δεν έχουμε διάστημα τότε επιλέγουμε εμείς κατάλληλα ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Β.

■ Εκτός του θεωρήματος Θ.Β. εξετάζουμε επιπλέον και τις περιπτώσεις για $x_0=\alpha$, $x_0=\beta$.

10. ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $[\alpha, \beta]$

- (α) Δείχνουμε ότι ισχύει το Θ.Β.W. στο (α, β) ή Σ.ΤΙΜΩΝ, δηλαδή εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ρίζας.
- (β) Για τη μοναδικότητα, δείχνουμε ότι η f είναι:
 - γνησίως μονότονη ή
 - « 1-1 » ή
 - με το θεώρημα Rolle → στο κεφάλαιο των παραγώγων, καθώς και με τη βοήθεια των παραγουσών.

125. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δυο

ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ ετερόσημες. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = \frac{\lambda x}{1 + g^2(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η εξίσωση

$f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

126. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=1-x^3$ και $g(x)=x^2+cx$, $c \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι οι C_f και C_g τέμνονται σε σημείο (x_0, y_0) με $x_0 \in [-1, 1]$.

11. ΥΠΑΡΞΗ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ (ΜΙΑ ΜΟΝΟ ΡΙΖΑ)

127. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x)+f(x)=x^3+x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Ν' αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
- ii. είναι γνησίως αύξουσα
- iii. Η $f(x)=0$ έχει μοναδική μη μηδενική ρίζα στο $(-1, 1)$

128. Έστω η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει ένας μοναδικός $x_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$

11.1. Σε ασκήσεις με εκφράσεις « το πολύ μια ρίζα »

- (α) πάμε κατευθείαν με απαγωγή σε άτοπο με Θ. Rolle ή
- (β) f γνησίως μονότονη ή
- (γ) f « 1-1 » (χωρίς θεώρημα B - W)

12. **Θ.Β. ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ® ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$**

(Αν για την $g(x)=f(x)-\eta$ είναι δύσκολο να βρώ πρόσημα των $g(\alpha)$ και $g(\beta)$)

Μέθοδος: → κάνω Θ. Μ'ΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ για το « η » και Θ.Ε.Τ. για την f .

129. Έστω f συνεχής στο διάστημα $[0,4]$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in [0,4]$ υπάρχει

$$\gamma \in [0,4] \text{ τέτοιο ώστε } f(\gamma) = \frac{3f(\alpha) + 2f(\beta)}{5}.$$

130. Αν για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \beta, \gamma \text{ πραγματικοί αριθμοί με } \beta^2 < 4\gamma.$$

α. Να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ να δείχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) = \frac{2f\left(\frac{1}{3}\right) + 4f\left(\frac{2}{3}\right)}{6}$.

131. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[0,1]$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$ να δείξετε ότι:

A. Η ευθεία $\psi=3$ και η γραφική της f τέμνονται σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

B. Υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $f(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(\frac{x^2-1}{2}\right) < 1$, στο $(0,1)$

Δ. Να δείξετε ότι $f(x) + f(3x) < f(2x) + f(4x)$ για κάθε $x \in (0,1)$,

13. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

• **Η πρόταση ότι :** « Η εικόνα κλειστού διαστήματος σε συνεχή και και μη σταθερή συνάρτηση είναι κλειστό διάστημα » σε συνδυασμό με τη μονοτονία, τα ακρότατα και το Θ.Ε.Τ.,

βρίσκοντας τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ στο $[\alpha, \beta]$ ή τα $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ & $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x)$ στο (α, β) που μας δίνουν το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ της συνάρτησης f .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της $f(A)$ είναι κλειστό διάστημα. **ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ:**

1. Αν η f γν. μονότονη και συνεχής στο $A=[\alpha, \beta]$ τότε:

(α) $f(A)=[f(\alpha), f(\beta)]$, αν $f \uparrow$

(β) $f(A)=[f(\beta), f(\alpha)]$, αν $f \downarrow$.

2. Αν η f γν. μονότονη και συνεχής στο $A=(\alpha, \beta)$ τότε:

(α) $f(A)=(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$, αν $f \uparrow$

(β) $f(A)=(\lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x))$, αν $f \downarrow$.

14. ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f

Βήμα 1: Βρίσκουμε τις ρίζες της $f(x)=0$ στο Π.Ο. της A .

Βήμα 2: Σε καθένα από τα διαστήματα των διαδοχικών ριζών η f διατηρεί σταθερό πρόσημο (σχετ. θεώρημα)

Βήμα 3: Συνεπώς επιλέγουμε ένα τυχαίο αριθμό από κάθε διάστημα και κάνουμε δοκιμή για να βρούμε το πρόσημο της f σ' αυτό το διάστημα με βάση την εξής πρόταση:

Έστω ρ_1, ρ_2 διαδοχικές ρίζες της f , δηλαδή $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, τότε:

■ Αν ρ_1, ρ_2 με $\alpha \in (\rho_1, \rho_2)$ και $f(\alpha) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$

■ Αν ρ_1, ρ_2 με $\alpha \in (\rho_1, \rho_2)$ και $f(\alpha) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$, για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$

132. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ χωρίς ρίζα στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > 0$, να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε

$x \in [\alpha, \beta]$.

15. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (α, β)

1^η ΜΕΘΟΔΟΣ : → ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

Υποθέτουμε ότι δεν έχει σταθερό πρόσημο και με τη βοήθεια του Θ. Bolzano λύνοντας την εξίσωση $f(x)=0$, βρίσκουμε τη ρίζα $x_0 \notin (\alpha, \beta)$, άρα ΑΤΟΠΟ.

2^η ΜΕΘΟΔΟΣ : → Δείχνουμε ότι στο διάστημα (α, β) η $f(x)=0$ δεν έχει ρίζες και χρήση της πρότασης : « μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών μιας εξίσωσης η αντίστοιχη συνάρτηση έχει σταθερό πρόσημο ».

133. Έστω $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή συνάρτηση και για κάθε $x > 1$ ισχύει: $|f(x)-1| - \frac{2}{x+1} = x-1$ (1)

Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1, +\infty)$.

16. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

134. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+\psi)=f(x)+f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $\mathbb{R}$.

135. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+\psi)=f(x)+f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $\mathbb{R}$.

136. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(i) $f(x+\psi)=f(x)+f(\psi)+(x^2-x)(\psi^2-\psi)$, $\forall x, \psi \in \mathbb{R}$

(ii) f συνεχής στο $x_0=1$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$. Να δείξετε ότι:

(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (β) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{3}{x_0} + x_0 - 1$.

17. ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΟΥ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{-1}(x)$

ΜΕΘΟΔΟΣ : → Έστω συνάρτηση f με $A_f = (\alpha, \beta)$ και $f((\alpha, \beta))$ ή $f(A) = (\gamma, \delta) \rightarrow \Sigma.Τιμών$ της f .

• Αν $f \square$ στο (α, β) τότε $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \gamma$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \delta$.

• Επειδή η f είναι αύξουσα (γν. μονότονη), άρα «1-1», υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση: $f^{-1}: (\gamma, \delta) \rightarrow \square$ και είναι γν. αύξουσα κι αυτή με $f^{-1}((\gamma, \delta)) = (\alpha, \beta) \rightarrow \Sigma.Τιμών$.

• ΆΡΑ: $\lim_{x \rightarrow \gamma^+} f^{-1}(x) = \alpha$ και $\lim_{x \rightarrow \delta^-} f^{-1}(x) = \beta$.

• Όμοια αν $f \square$ στο (α, β) και $f^{-1}: (\gamma, \delta) \rightarrow \square$ και είναι γν. φθίνουσα κι αυτή με $f^{-1}((\gamma, \delta)) = (\alpha, \beta) \rightarrow \Sigma.Τιμών$. ΆΡΑ: $\lim_{x \rightarrow \gamma^+} f^{-1}(x) = \beta$ και $\lim_{x \rightarrow \delta^-} f^{-1}(x) = \alpha$.

18. ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

137. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2012$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να δειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να δειχτεί ότι η C_f τέμνει σ' ένα ακριβώς σημείο $(x_0, 0)$ τον άξονα $x'x$.

2. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$

3. Έστω επίσης η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g με $e^{g(x)} + g(x) - 2012 = 2e^x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ναδειχτεί ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2012)$ τέτοιος ώστε

$$g(x_0) = \ln(2012 - g(x_0)) \text{ αν } 0 < g(x_0) < 2012, \text{ για κάθε } x \in [0, 2012].$$

138. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1)$.

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

B. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Γ. Να δείξετε ότι η γραφική της f^{-1} τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

Δ. Αν γνωρίζουμε ότι η f^{-1} και η f έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - 2x}{x + f^{-1}(x)}$

E. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(e^a - 1) - 1}{x - 1} - \frac{f(\eta\mu\alpha) - f(\alpha)}{x - 2} = 2017$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$, για κάθε $a > 0$.

139. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{e^x}{f(x)}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

B. Αν επιπλέον ισχύει $f(2) = -3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)| - 3}{f^2(x) + 3f(x)}$.

140. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής με $f(0) = 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{f(x)} \cdot (e^{f(x)} + 2x) = 1, \text{ τότε:}$$

A. Να βρείτε την συνάρτηση f .

B. Αν $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

Γ. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και στη συνέχεια το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{2f(x)} - 2017 = 0$, έχει μια τουλάχιστον λύση.

141. Αν $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για την οποία ισχύει: $4x^2 + f^2(x) = 4$ (1), για κάθε $x \in [-1, 1]$.

A. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

B. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-1, 1)$.

Γ. Να βρείτε τις συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (1).

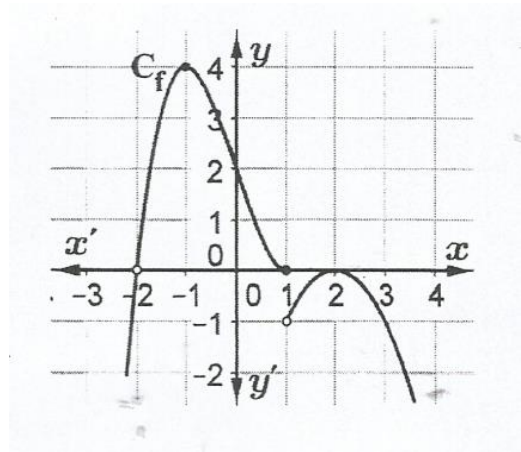
142. Έστω $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση συνεχής με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) + 2x^2 = 2xf(x) + 1$, για κάθε $x \in [-1, 1]$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

143. Δίνεται συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

A. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$.



Σωστή

B. Από το παραπάνω γραφική παράσταση της f να χαρακτηρίσετε ως

(Σ) ή Λανθασμένη (Λ) καθεμία από

τις παρακάτω προτάσεις.

1) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$.

2) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

3) Το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-2, 1]$ είναι το διάστημα $(0, 4]$.

4) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

5) Η εξίσωση $f(x) = \frac{9}{2}$ έχει ακριβώς μια λύση στο πεδίο ορισμού της f .

144. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

B. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

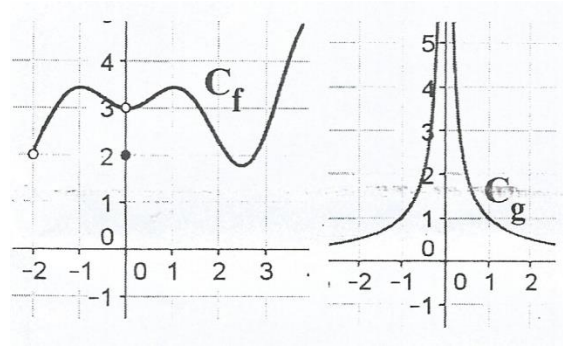
Γ. Έστω $\alpha = -1$ και $\beta = 2$

1) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x + 2}$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)}$. (M.4)

2) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + 2x}{x^2 - 3f(x)}$. (M.4)

3) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^4 + 1}{f(x) - 1} + \frac{x^6 + 1}{f(x)} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

145. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Επίσης δίνεται η συνάρτηση φ με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} + \beta, & x < 0 \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{g(u)}, & x = 0 \\ h(x), & x > 0 \end{cases}, \text{ με}$$

$$h(x) = \frac{x^2 + (\gamma - 1)x + \delta + 2}{x}, \quad x \neq 0 \text{ και } \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

1. α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .

β) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$ σε συνάρτηση των α, β .

γ) Να βρείτε το $\varphi(0)$

2. Αν $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και η συνάρτηση φ είναι συνεχής να βρείτε:

α) Τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

β) Τους πραγματικούς αριθμούς γ και δ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ το οποίο και να βρείτε.

γ) Τον τύπο της φ .

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)$ και $\alpha(x) = -x - 2\pi$ τέμνονται

σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη αρνητική και μεγαλύτερη του -2π .

146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

γ. Να λύσετε την: i. Την εξίσωση $f^{-1}(\ln x) = x$ και ii. Την ανίσωση $\ln \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 3} > e^{x^2+2} - e^{3x^2}$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} + \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right)$.

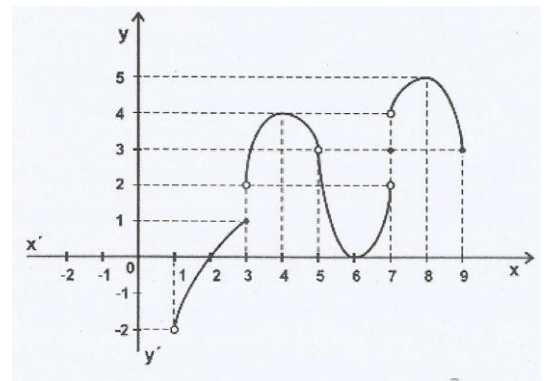
147. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 3) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ 5) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$.



**Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών - Οικονομίας και Πληροφορικής
Συναρτήσεις**

Γ. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια : 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{f(x)}$.

Δ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

148. Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των

δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι $E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in (0, 8)$.

B. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m².

149. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $e^{f(x)} + g(x) = 1 - x$, με $x \in \mathbb{R}$.. Αν η C_f τέμνει τον x' σε δύο σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων με $x_1 < x_2$, τότε :

A. Αποδείξτε ότι η C_g τέμνει τον x' σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, f(x_0))$ μεταξύ των A και B.

B. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$, να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $g^{-1}(e^{f(x)} + g(x)) < x_0$, όπου x_0 η τετμημένη του $M(x_0, f(x_0))$ του Γ.1. ερωτήματος.

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{f(x)} + g(x) + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της και ως προς το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$.

E. ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

2. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

3. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

4. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

5. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

6. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$
και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

7. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

8. Η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα x' σ' ένα το πολύ σημείο.

9. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

10. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
11. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
12. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
13. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = |l|$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.
14. Κάθε άρτια συνάρτησης είναι «1-1».
15. Αν $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
16. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(b) > 0$.
17. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$
18. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
19. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$
20. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.
21. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$
22. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
23. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[a, b]$ και συνεχής στο $(a, b]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[a, b]$ μία μέγιστη τιμή.
24. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
25. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (a, b) , τότε $f(a) \cdot f(b) \geq 0$.
26. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
27. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.