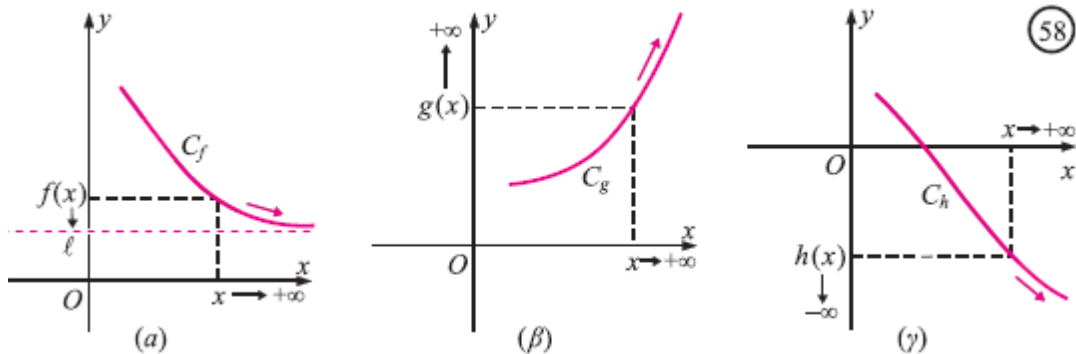


1.7 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $\pm\infty$

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.



Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.
- Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \rightarrow -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

Όριο πολωνυμικής συνάρτησης Έστω, με $a_n \neq 0$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{ισχύει:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$$

→

ΚΡΑΤΑΜΕ ΤΟΝ ΜΕΓΙΣΤΟΒΑΘΜΙΟ ΟΡΟ

Όριο ρητής συνάρτησης Έστω

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$$

Όριο τριγωνομετρικής συνάρτησης →

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$$

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής
Όρια-συνέχεια συναρτήσεων
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι: Είναι $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \quad (1)$

✚ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0$. Λόγω της (1) από κριτ. παρεμβολής και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

✚ Όμοια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Γενικά,

✚ **Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης**

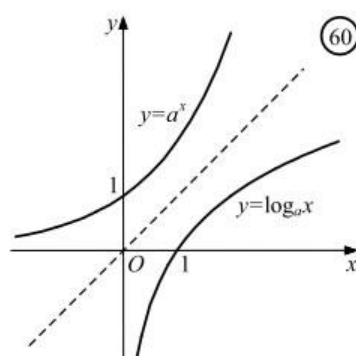
- Αν $a > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$



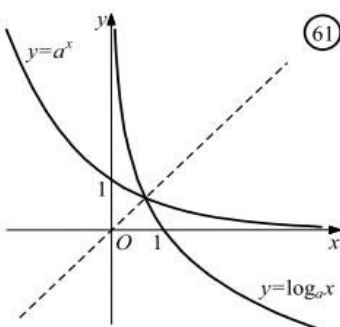
- Αν $0 < a < 1$ (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$



Επισημάνσεις -Ιδιότητες

1. Ορίζουμε $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

2. Αν $x \rightarrow \pm\infty$ τότε $\frac{1}{x^v} \rightarrow 0$. Συμβολικά: $\frac{\alpha}{\pm\infty} = 0$

3. Αν $x \rightarrow 0^+$ τότε $\frac{1}{x^v} \rightarrow +\infty$, ενώ Αν $x \rightarrow 0^-$ τότε $\frac{1}{x^v} \rightarrow -\infty$. Συμβολικά: $\frac{\alpha}{0} = \pm\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } v=2\kappa+1 \\ +\infty, & \text{αν } v=2\kappa \end{cases}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

5. Επειδή τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \epsilon\phi f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\phi f(x)$ δεν υπάρχουν, προτιμάμε να εργαζόμαστε με ανισώσεις συνήθως.

6. Όλες οι ιδιότητες του $x \rightarrow x_0$ ισχύουν και όταν $x \rightarrow \pm\infty$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ (εκτός σχολικού βιβλίου)

$$1^{\eta}. \text{ Αν } \begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

$$2^{\eta}. \text{ Αν } \begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Παρατήρηση: Το ίδιο ισχύει και όταν $x \rightarrow \pm\infty$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΟΡΙΟΥ

1^η. Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης

Ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου.

$$\text{ΔΗΛΑΔΗ: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n).$$

2^η. Όριο Ρητής συνάρτησης(πολυώνυμο)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_n x^n}{\beta_k x^k}$, δηλαδή κρατάμε τους μεγιστοβάθμιους όρους ως προς x και στον αριθμητή και στον παρονομαστή.

$$\text{ΣΥΓΓΕΚΡΙΜΜΕΝΑ: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{αν βαθμός } P(x) < \text{βαθμός } Q(x) \\ \frac{\alpha_n}{\beta_k}, & \text{αν βαθμός } P(x) = \text{βαθμός } Q(x) \\ \pm\infty, & \text{αν βαθμός } P(x) > \text{βαθμός } Q(x) \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 6x + 1}{3x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{3x^2} \right) = \frac{5}{3}.$$

$$3^{\eta}. \text{ Όριο άρρητης συνάρτησης μορφής: } \left[\sqrt{\frac{h(x)}{g(x)}}, \sqrt[3]{\frac{h(x)}{g(x)}}, \frac{h(x)}{\sqrt{g(x)}} \right] \text{ μορφή } \frac{\infty}{\infty}$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο όρο από αριθμητή και παρονομαστή. Προσοχή στη ιδιότητα

$$\sqrt[2v]{x^{2v}} = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \rightarrow -\infty \\ x, & \text{αν } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 4}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}}{x \left(2 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\left(4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}}{x \left(2 + \frac{2}{x} \right)} = -\frac{\sqrt{4+0+0}}{2+0} = -1$$

4η Όριο σύνθετης συνάρτησης

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης fog στο σημείο x_0 , τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = u_0$ ή $\pm\infty$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\lim_{u \rightarrow u_0 \text{ ή } \pm\infty} f(u)$ με γνωστό τρόπο.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x))$.

Λύση

- Θέτω $u = 1 + e^x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) \overset{\text{σχήμα}}{=} 1 + \infty = +\infty$
- Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) \overset{\text{σχήμα}}{=} +\infty$.

5η. Όριο Άρρητης συνάρτησης μορφής: $\sqrt[n]{g(x)} - \sqrt[n]{h(x)}$

(α) → κοινός παράγοντας στο υπόρριζο τον μεγιστοβάθμιο όρο από αριθμητή και παρονομαστή- αντικαθιστούμε και προκύπτει το όριο ή προκύπτει

(β) ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ ΜΟΡΦΗΣ $\infty - \infty$ → πολ/με και διαιρούμε με συζυγή παράσταση, φυσικά στο τέλος βγάζουμε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του x και υπολογίζουμε το όριο.

ΝΑ ΠΡΟΣΕΧΩ!!!!!!

ΣΤΗΝ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ ΜΟΡΦΗΣ $\infty - \infty$ με παράσταση $\ln f(x) - h(x)$ → εργαζόμαστε ως εξής:

- $\ln f(x) - h(x) = \ln f(x) - \ln e^{h(x)} = \ln \frac{f(x)}{e^{h(x)}}$
- Θέτω $u = \frac{f(x)}{e^{h(x)}}$ και ως σύνθετη βρίσκω το όριό της με γνωστό τρόπο.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - 2x)$.

Λύση

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - \ln e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1 + e^x}{e^{2x}} \right) \quad (1).$
- Θέτω $u = \frac{1 + e^x}{e^{2x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{2x}} + \frac{e^x}{e^{2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-2x} + e^{-x}) \quad (2).$
- Με $y = -2x \leftrightarrow -\infty$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \overset{\text{σχήμα}}{=} 0$. Όμοια και $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \overset{\text{σχήμα}}{=} 0$.
- Οπότε η (2) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-2x} + e^{-x}) = 0 + 0 = 0$.
- Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1 + e^x}{e^{2x}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} (\ln u) \overset{\text{sx;hma}}{=} -\infty$.

6η. Όριο Τριγωνομετρικής συνάρτησης

ΔΕΝ Ξεχνάμε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ και $\lim_{\varphi(x) \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu\varphi(x)}{\varphi(x)} = 0$ και χρήση κατάλληλων ανισώσεων.

Παράδειγμα

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

Από $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x}$ διαιρώντας με $x \neq 0$ αφού $x \rightarrow +\infty$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

7η. Όριο Εκθετικής ή Λογαριθμικής συνάρτησης

A. → Να θυμάμαι(ΑΠΟ ΣΧΗΜΑ) ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ [$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$, με $\alpha > 1$] και $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ [$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$, με $\alpha > 1$]
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$, με $\alpha < 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = -\infty$, με $\alpha < 1$

και οι μεθοδεύσεις ορίων είναι ίδιες με των προηγούμενων συναρτήσεων.

B. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ X ΔΗΛ. ΜΟΡΦΗΣ $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{g(x)}$

Βήμα 1: ► Κάνουμε χρήση της ιδιότητας(Β'ΛΥΚΕΙΟΥ) : $\alpha^x = e^{x \cdot \ln \alpha}$, με $\alpha > 0$ και έχουμε:

Βήμα 2: ► $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ (1) η οποία είναι σύνθετη, οπότε εργαζόμαστε σύμφωνα με την 4η μέθοδο της ίδιας παραγράφου §1.7.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Στο Βήμα 2 μπορεί να καταλήξουμε σε μορφή ορίου $0 \cdot (\pm\infty)$ την οποία μετασχηματίζουμε ως εξής:

$$0 \cdot (\pm\infty) \rightarrow \frac{1}{0} \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^x$.

Λύση

Από την ιδιότητα (Β'ΛΥΚΕΙΟΥ) : $\alpha^x = e^{x \cdot \ln \alpha}$, με $\alpha > 0$ έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \cdot \ln(x+1)}$ (1)
- Θέτω $u = x \cdot \ln(x+1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln(x+1)) \stackrel{\text{από θεωρία}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^x = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u \stackrel{\text{από θεωρία}}{=} = +\infty$.

8η. Όριο Ρητής Εκθετικής συνάρτησης

8.1. Ρητή Εκθετική συνάρτηση με σταθερές βάσεις

(α) Αν $x \rightarrow -\infty$: κοινός παράγοντας ο εκθετικός όρος με τη μικρότερη βάση από αριθμητή και παρονομαστή- αντικαθιστούμε

(β) Αν : κοινός παράγοντας ο εκθετικός όρος με τη μεγαλύτερη βάση από αριθμητή και παρονομαστή- αντικαθιστούμε

$$\text{π.χ. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^x + e^{x+1}}{3^{x+1} + 2e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \left[2 \cdot \left(\frac{3}{e}\right)^x + e \right]}{e^x \left[3 \left(\frac{3}{e}\right)^x + 2 \right]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[2 \cdot \left(\frac{3}{e}\right)^x + e \right]}{\left[3 \cdot \left(\frac{3}{e}\right)^x + 2 \right]} = \frac{2 \cdot 0 + e}{3 \cdot 0 + 2} = \frac{e}{2}.$$

8.2. Ρητή Εκθετική συνάρτηση με βάση παράμετρο

→Κάνουμε περιπτώσεις για τη παράμετρο συγκρίνοντάς την με την εβάση σταθερής εκθετικής και εφαρμόζουμε την μέθοδο της 8.1.

Παράδειγμα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^x + \alpha^{x+1}}{3^{x+1} + 2\alpha^x}$$

Λύση

$$\text{i) Αν } \alpha < 3 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^x + \alpha^{x+1}}{3^{x+1} + 2\alpha^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha^x \left[2 \cdot \left(\frac{3}{\alpha}\right)^x + \alpha \right]}{\alpha^x \left[3 \left(\frac{3}{\alpha}\right)^x + 2 \right]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[2 \cdot \left(\frac{3}{\alpha}\right)^x + \alpha \right]}{\left[3 \cdot \left(\frac{3}{\alpha}\right)^x + 2 \right]} = \frac{2 \cdot 0 + \alpha}{3 \cdot 0 + 2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{ii) Αν } \alpha > 3 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^x + \alpha^{x+1}}{3^{x+1} + 2\alpha^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x \left[2 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^x \cdot \alpha \right]}{3^x \left[3 + 2 \left(\frac{\alpha}{3}\right)^x \right]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[2 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^x \cdot \alpha \right]}{\left[3 + 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{3}\right)^x \right]} = \frac{2 + 0 \cdot \alpha}{3 + 2 \cdot 0} = \frac{2}{3}$$

$$\text{iii) Αν } \alpha = 3 \text{ αντικαθιστώ και έχω } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^x + 3^{x+1}}{3^{x+1} + 2 \cdot 3^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x [2+3]}{3^x [3+2]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1.$$

Ασκήσεις

1. ΟΡΙΟ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

96. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

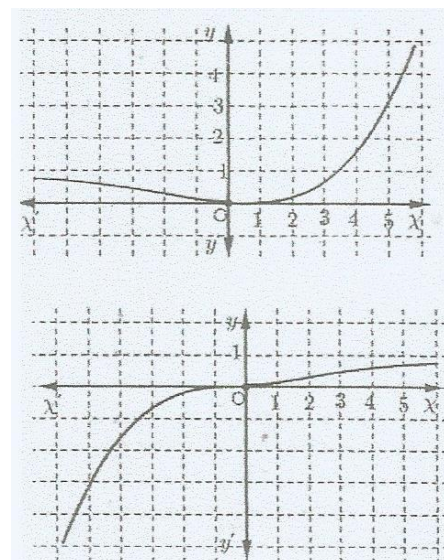
Α. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} \quad \text{και} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$$

97. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Α. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} \quad \text{και} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$$



Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής
Όρια-συνέχεια συναρτήσεων

$$\boxed{2. \text{ΟΡΙΟ ΠΩΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ - ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k}.$$

98. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 6x + 1}{3x^2 + x - 2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3x-1}{x^2 - 3x + 2} \right) \quad \text{και} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 3x| + 2x - 1}{2x - 5}$$

$$\boxed{3. \text{ΟΡΙΟ ΑΡΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΟΡΦΗΣ}}: \left[\sqrt{\frac{h(x)}{g(x)}}, \sqrt{\frac{h(x)}{g(x)}}, \frac{h(x)}{\sqrt{g(x)}} \right]$$

Μορφή $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ κοινό παράγοντας ο μεγιστοβάθμιος όρος από αριθμητή και παρονομαστή.

Προσοχή στη ιδιότητα $\sqrt[2v]{x^{2v}} = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \rightarrow -\infty \\ x, & \text{αν } x \rightarrow +\infty \end{cases}$

99.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + x + 1}{x + 2} & (\text{Απ. } 2) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 7}}{x + 3} \\ \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 4x + 3} & \text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + 5x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x} \end{array}$$

4. ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(g(x)), \Rightarrow \text{Θέτουμε } u = g(x) \Rightarrow \text{Βρίσκουμε } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = u_0 \text{ ή } \pm\infty \Rightarrow \lim_{u \rightarrow u_0 \text{ ή } \pm\infty} f(u).$$

101. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \eta\mu \left(\frac{2x^2}{x^4 + 1} \right) \right) = 2.$

5. ΟΡΙΟ ΑΡΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\Rightarrow \sqrt[v]{g(x)} - \sqrt[v]{h(x)}$

102. Υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 0 \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - ax - b \right) = 0$$

103. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3} - x \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta$, με $\alpha \in (0, \pi)$ και $\beta \in \mathfrak{R}$.

A. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των α, β.

B. Για ποιες τιμές των α, β έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$;

104. Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+2) - \ln(x^2+1)]$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2+5) - \ln(x^2+1)]$.

6. ΟΡΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

105. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) + 1821 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

ii) Βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 1825} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^5}$

106. Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{e^x} \right)$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x + \eta\mu x]$

107. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ αν ισχύει: $\sqrt{\frac{9x^2 - 3x + 1}{x + 2}} < f(x) < \frac{3x + 4}{x}$ (1)

7. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΟΡΦΗΣ $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{g(x)}$

108. Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x$.

8. ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

109. Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+2}}{3^x + 2^x}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+2} + a^{x+1}}{a^{x-1} + 2^{x-1}}$.

9. ΟΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ

110. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5$ να βρεθεί ο αριθμός μ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

111. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^4(x) + 2006f(x) = 2x + 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Ν' αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να βρεθεί η αντίστροφη f^{-1}

γ. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f^{-1}(x) + \eta\mu x + 6}{x}$.

112. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x+2}{x^2+x}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

α). Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{-x} f(x) \eta\mu \frac{1}{2f(x)} \right]$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left[e^{\frac{1}{x}} f(x) + e^{-f(x)} \cdot \ln x \right]$.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{f(x) + \eta\mu x} \right)$

δ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και στη συνέχεια το λ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda x e^{f(x)}}{1 + f(x) - \sigma\upsilon\nu x} - \lambda \right) = e^\lambda - 1$

113. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^x) - \ln(1 + e^x)$.

A). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B). Να βρείτε το πρόσημο της f .

Γ). Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Δ). Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{f^{-1}(x)} - e^{f(x)})$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.