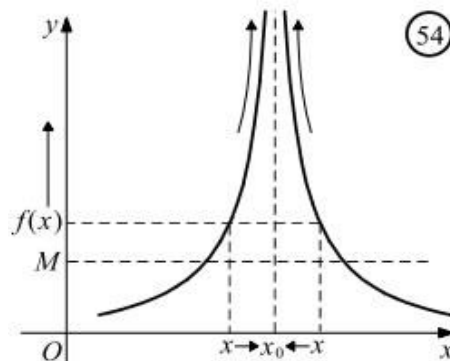


1.6. ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ($\pm\infty$) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΟΤΑΝ $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

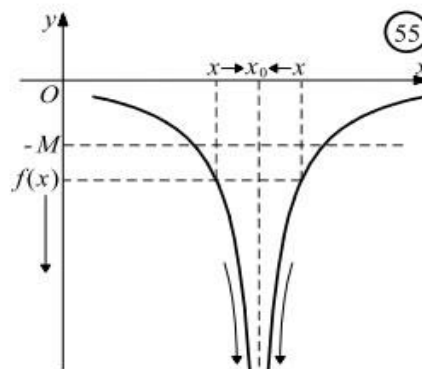
- Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0 .

- Παρατηρούμε ότι:
- καθώς το $x \rightarrow x_0$, οι τιμές $f(x) > M$, από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M (αυξάνεται απεριόριστα).
- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

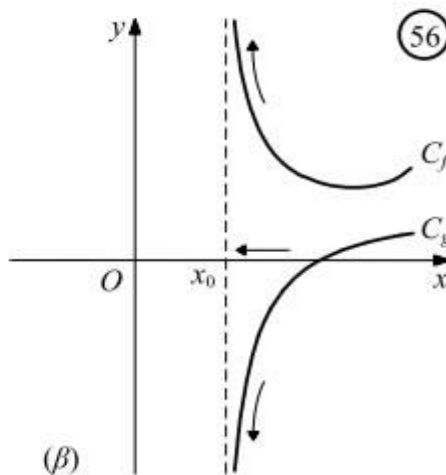
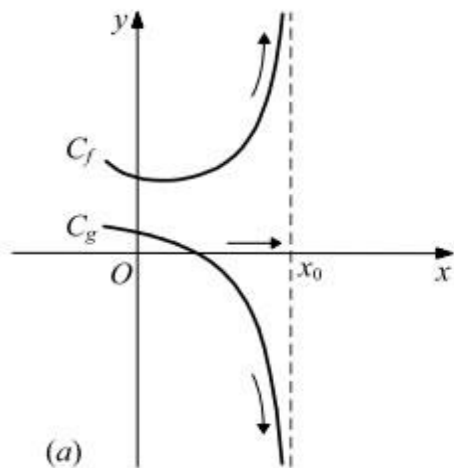


— Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0 .

- Παρατηρούμε ότι:
- καθώς το $x \rightarrow x_0$, οι τιμές $f(x) < -M$, από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ ($M > 0$) → ελαττώνεται απεριόριστα.
- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν $x \rightarrow x_0^-$ και $x \rightarrow x_0^+$.



Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής
Όρια-συνέχεια συναρτήσεων

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες :

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , ενώ
 αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ
 αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.
- Αν $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \text{ στη περιοχή } x_0 \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
- Αν $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \text{ στη περιοχή } x_0 \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

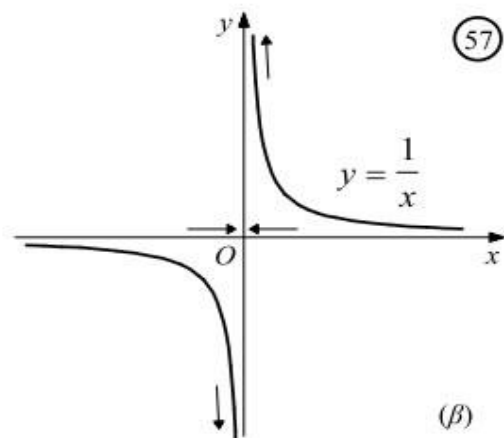
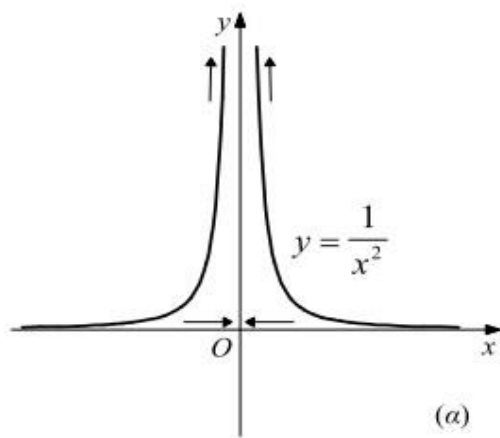
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{και γενικά} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}^* \quad (\text{Σχ. 57α})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{και γενικά} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{και γενικά} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \quad \nu \in \mathbb{N} \quad (\text{Σχ. 57β}).$$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}, \nu \in \mathbb{N}$



(57)

ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

A. ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ και $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
2. $\alpha + (+\infty) = +\infty$ και $\alpha + (-\infty) = -\infty$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\alpha + (-\infty) = -\infty$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

B. ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ και $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
5. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
6. $\alpha \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$ και $\alpha \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ +\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$.

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο πηλίκου) (Ενότητα 1.6)

7. $\frac{\alpha}{\pm\infty} = 0$
8. $\frac{\pm\infty}{\alpha} = \pm\infty$, με $\alpha \neq 0$
9. $\frac{\alpha}{0} = \pm\infty$

Ισχυρισμός-Αντιπαράδειγμα

Για κάθε συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0.$$

Απάντηση: Ψευδής

Αντιπαράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και η συνάρτηση

$$g(x) = -\frac{1}{x^4}, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^4}\right) = -\infty. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 1}{x^4}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4}\right) = -1 \cdot (+\infty) = -\infty$$

ΜΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \rightarrow$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΗΣ ΜΟΡΦΕΣ

Απροσδιόριστη μορφή λέμε την πράξη μεταξύ ορίων(αν υπάρχουν) που δεν δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα εκ των προτέρων αλλά εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε

Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

A. ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

1. $(+\infty) + (-\infty) =;$

B. ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

2. $0 \cdot (\pm\infty) =;$

3. $1^\infty =;$ και $(\pm\infty)^0 =;$ και $0^0 =;$

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο πηλίκου)

4. $\frac{0}{0} =;$

5. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} =;$

- Ανάλογα με τη μορφή της απροσδιοριστίας εφαρμόζουμε κατάλληλη μέθοδο για την άρση της και υπολογίζουμε το όριο της συνάρτησης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΟΡΙΟΥ

1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

1^ο Βήμα: Βρίσκω το πρόσημο της $f(x)$ έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$

2^ο Βήμα: Βρίσκω το πρόσημο της $g(x)$ που είναι $0 \rightarrow$ του παρονομαστή

1.α. Αν η $g(x)$ έχει σταθερό πρόσημο τότε έχοντας υπόψιν την ιδιότητα: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty$ Οπότε

γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \alpha \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, σύμφωνα με τις επιτρεπτές πράξεις του $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{|x-1|}$.

Λύση

$A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 4) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 2 \quad (1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0 \text{ αλλά είναι: } |x-1| > 0 \text{ για } x \neq 1 \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty \quad (2)$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 4) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} \stackrel{(1),(2)}{=} 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

1.β. Αν η $g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 κάνω πλευρικά όρια σύμφωνα με την περίπτωση 1.α. Δηλαδή:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \alpha \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \alpha \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \end{cases}$$

Διαφορετικά μεταξύ τους οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$ στο $x_0 = 2$ και στη συνέχεια να εξετασθεί, αν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο 2.

Λύση

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής
Όρια-συνέχεια συναρτήσεων

— Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ και $x-2 > 0$ για $x > 2$, είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$. Επειδή επίσης $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x + 1) = 3$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} (x^2 - x + 1) \right] = +\infty.$$

— Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ και $x-2 < 0$ για $x < 2$, είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. Επειδή επίσης $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x + 1) = 3$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{x-2} (x^2 - x + 1) \right] = -\infty.$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο 2.

2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΥ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{l}{0}$ με

$l \neq 0 \rightarrow$ παράμετρος $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \rightarrow$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

ΟΡΙΟ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: $\frac{\ell}{0}$ ($= \infty$ με $\ell \neq 0$)

Έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ με $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ Κάνουμε διερεύνηση για την παράμετρο.

• Αν $\ell > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } g(x) > 0 \\ -\infty, & \text{αν } g(x) < 0 \end{cases}$

• Αν $\ell < 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } g(x) > 0 \\ +\infty, & \text{αν } g(x) < 0 \end{cases}$

• Αν $\ell = 0$ τότε βρίσκουμε τη τιμή της παραμέτρου ℓ και την αντικαθιστούμε στο αρχικό όριο και γίνεται το οποίο και υπολογίζουμε κατά τα γνωστά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εξεταστεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \frac{x + \lambda}{|x - 1|}$.

Λύση

$$A = \mathbf{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + \lambda) = 1 + \lambda,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + \lambda) = 1 + \lambda,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = 0 \text{ αλλά είναι: } |x - 1| > 0 \text{ για } x \neq 1$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x + \lambda) = (+\infty)(1 + \lambda) \quad (1)$$

$$(i). \text{ Αν } \lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -1 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$(ii). \text{ Αν } \lambda + 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -1 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

(iii). Αν $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ τότε $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}=\begin{cases} 1, & x>1 \\ -1, & x<1 \end{cases}$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)=1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=-1$ άρα για $\lambda=-1$ δεν συγκλίνει.

3. ΟΡΙΟ $f(x)$ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ $|f(x)| \leq \theta$ ή $|f(x)| \leq |g(x)|$

→Κάνουμε χρήση των : $\left. \begin{array}{l} \text{αν } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R} \rightarrow \text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ}$

- **ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ:** $|ημx| \leq 1, |συνx| \leq 1, |x| \leq \theta \text{ με } \theta > 0 \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta,$
 $|ημx| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \text{ \& } |x+\psi| \leq |x|+|\psi| \text{ και άλλων ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών όπως στη παρ. 1.5.}$

4. ΟΡΙΟ $f(x)$ ΜΕ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΓΝΩΣΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ $f(x)$

→ Βήμα 1: Θέτουμε τη παράσταση χωρίς το όριο= $g(x)$ →βοηθητική συνάρτηση.

Βήμα 2: Λύνουμε ως προς $f(x)$

Βήμα 3: Βρίσκουμε το όριο της $f(x)$ βάζοντας $\ellimit$ και στα δυο μέλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 1$.

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

- Θέτω $g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, με $x \neq 0$ (1) και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ (2).
- Η (1) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$.

5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ ΟΡΙΟ ΤΗΣ f ΜΟΡΦΗΣ $\frac{a}{0}$ (ή $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \rightarrow \text{πραγματικός}$)

5.1. ►

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΟΡΙΟ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{a}{0}$ ΚΑΙ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \rightarrow \text{πραγματικός}$

Βήμα 1: Κάνουμε χιαστί

Βήμα 2: Βάζουμε $\ellimit$ και στα δυο μέλη και βρίσκουμε τη τιμή της παραμέτρου

Βήμα 3: Την αντικαθιστούμε στο αρχικό όριο και υπολογίζουμε και το όριο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ (1)

και ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ και το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

- Η (1) $f(x) \cdot (x^2 - 1) = (\lambda-1)x^2 + x - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} [(\lambda-1)x^2 + x - 2]$
 $\Rightarrow \ell \cdot 0 = \lambda - 2 \Rightarrow \lambda = 2$.

• Για $\lambda=2$ η (1) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$.

5.2. ► ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ 2(ΔΥΟ) ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ ΟΡΙΟ ΤΗΣ f ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$

Βήμα 1: Κάνουμε χιαστί

Βήμα 2: Βάζουμε $\lim$ και στα δυο μέλη και βρίσκουμε τη σχέση 2ης παραμέτρου ως προς την άλλη .

Βήμα 3: Την αντικαθιστούμε στο αρχικό όριο που γίνεται της μορφής $\frac{0}{0}$ και υπολογίζουμε τη 1η παράμετρο.

Βήμα 4: Αντικαθιστούμε τη τιμή της 1ης παραμέτρου στο **Βήμα 2** και βρίσκουμε και τη 2η παράμετρο.

Βήμα 3: Την αντικαθιστούμε στο αρχικό όριο και υπολογίζουμε και το όριο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2 + x - \mu}{x^2 - 1}$ (1)

και ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

• Η (1) $\Rightarrow f(x) \cdot (x^2 - 1) = (\lambda - 1)x^2 + x - \mu \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot (x^2 - 1)] = \lim_{x \rightarrow 1} [(\lambda - 1)x^2 + x - \mu]$
 $\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 0 = \lambda - \mu \Rightarrow \mu = \lambda$ (2) .

• Για $\lambda=\mu$ η (1) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\lambda-1)x^2 + x - \lambda}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^2 - x^2 + x - \lambda}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1}) \cdot [\lambda(x+1) - x]}{(\cancel{x-1}) \cdot (x+1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2\lambda - 1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda = 2$. Από (1) $\Rightarrow \mu = \lambda = 2$

Ασκήσεις

1.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

85. Να βρείτε τυα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x + 1}{x^4 + x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^3}$ και γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{x^2 - x - 2}$.

2.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΥ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{l}{0}$ με $l \neq 0 \rightarrow$ παράμετρος .

86. Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (\lambda + 1)x - \mu + 2}{x^2 - 1}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + (\lambda + \mu)x^2 - 2\lambda + \mu - 1}{x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3} - \mu}{x^2 - 9}$

3. ΟΡΙΟ $f(x)$ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ $|f(x)| \leq \theta$ ή $|f(x)| \leq |g(x)| \rightarrow$ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

87. Θεωρούμε τη συνεχή και «1-1» συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

i) $e^{x+1}-1 \leq (x+1) \cdot f(x) \leq e^x(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$, τότε: Να βρεθούν οι αριθμοί $f(2), f(-1), f^{-1}(0), f^{-1}(1)$.

88. Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(x^2 - 2x + 1) f(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \neq 1$,
 (1). Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ ΟΡΙΟ ΤΗΣ f ΜΟΡΦΗΣ $\frac{a}{0}$

89. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta x - 2}{x^2 - 1}, & \text{αν } x < -1 \\ \frac{\alpha x^2 - \gamma x + 5}{x + 1}, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$, να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

και να είναι πραγματικός αριθμός.

90. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1+ax)}{x^2}$, και πεδίο ορισμού $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

α) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \beta$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$. β) Να βρεθεί το β .

91. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{x + 1} = 4$.

92. Αν $f(x) = \frac{\alpha|x+2| + \beta|x-4| - 2}{x^2 - 5x + 6}$, να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$.

5. ΟΡΙΟ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

93. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 - \eta \mu x}{x^2 + x} = 3$, να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5 - 3f(x)| - 1}{x^2 - x}$.

94. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^v - \alpha f(x) + \beta}{x - 1} = 3$, $v \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ & $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 1$.

95. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 2)] = -\infty$, να υπολογιστούν τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, B) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right]$ και Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ με $g(x) \succ f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.