

1.4 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

A. ΟΡΙΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ο συμβολισμός $x \rightarrow x_0$ ΔΙΑΒΑΖΕΤΑΙ: Ο x τείνει στο x_0 ή έχει όριο το $x_0 \in \mathbb{R}$.

Και εννοούμε ότι η απόσταση του x από τον x_0 γίνεται απειροελάχιστη, δηλαδή ο x προσεγγίζει τον x_0 .

Όταν $x \rightarrow x_0$ όταν ικανοποιείται η σχέση: $|x - x_0| < \varepsilon$, όπου ε θετικός αριθμός οσοδήποτε μικρός, δηλαδή η απόσταση $d(x, x_0) \approx 0$.

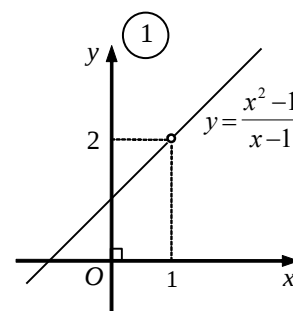
- $x \rightarrow +\infty$, όταν οι τιμές της μεταβλητής x είναι μεγαλύτερες από κάθε θετικό αριθμό M . Δηλαδή $x > M$.
- $x \rightarrow -\infty$, όταν οι τιμές της μεταβλητής x είναι μικρότερες από κάθε αρνητικό αριθμό $-M$ οσοδήποτε μικρός.

B. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x = 1$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.

ΓΡΑΦΙΚΑ:

Αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq 1$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$, οπότε



→ όταν το x παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 ($x \rightarrow 1$), τότε το

$f(x) = x + 1$ παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 ($x + 1 \rightarrow 2$).

→ Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και

→ γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ:

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0,5	1,50	1,5	2,5
0,9	1,9	1,1	2,1
0,99	1,99	1,01	2,01
0999	1,999	1,001	2,001
↓	↓	↓	
1^- (από αριστερά)	2^- (από αριστερά)	1^+ (από δεξιά)	2^+ (από δεξιά)

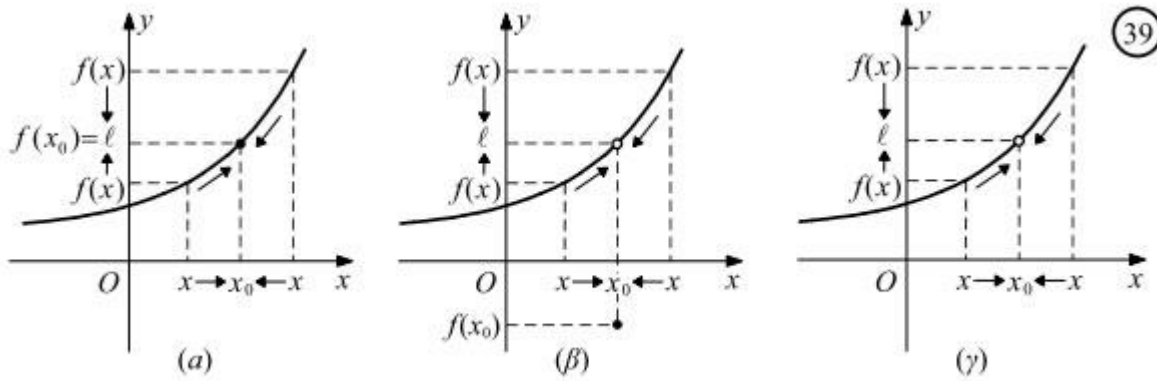
ΤΕΛΙΚΑ: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ΓΕΝΙΚΑ

➤ **Όριο $\ell \in \mathbb{R}$** μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, λέμε τον πραγματικό αριθμό ℓ που προσεγγίζουν όσο θέλουμε οι τιμές της $f(x)$, καθώς ο x πλησιάζει με οποιοδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 .

➤ **ΓΡΑΦΟΥΜΕ:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

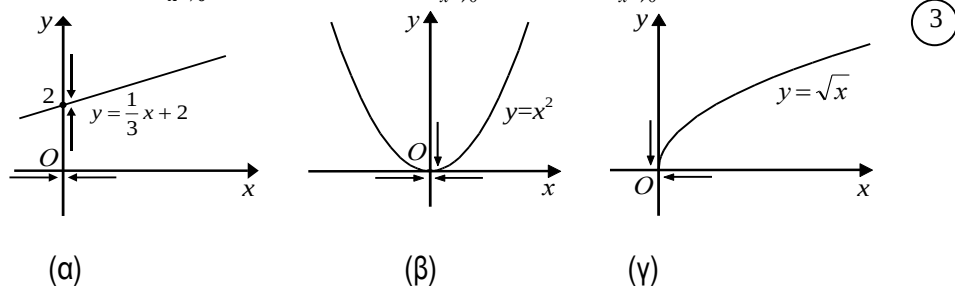
➤ **ΔΙΑΒΑΖΟΥΜΕ:** Το όριο της $f(x)$ όταν ο x τείνει στο x_0 είναι ℓ .



✚ Με την εισαγωγή της έννοιας του ορίου δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε μια συνάρτηση σε σημεία που δεν ανήκουν απαραίτητα στο πεδίο ορισμού, αφού μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της γύρω από τις τιμές του x_0 . π.χ. μπορούμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

✚ Παρουσιάσαμε χωρίς μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 , που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν όμως σημεία του πεδίου ορισμού της πολύ κοντά στο x_0 .

✚ Τίποτα βέβαια δεν αποκλείει την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης και σε ένα σημείο x_0 που να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$, που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι όταν $x \rightarrow 0$, το $f(x) \rightarrow 2$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$. Ομοίως, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$.

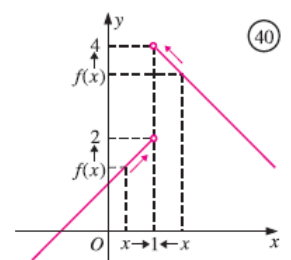


ΣΧΟΛΙΑ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0 ", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής: $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β) .
2. Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ' αυτό.
3. Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριο της στο x_0 (Σχ. 2α, 2β) ή διαφορετική από αυτό.
4. **Οριακά σημεία:** Είναι οι τιμές τις οποίες τείνει ο x .
5. **Το όριο μιάς συνάρτησης f μπορεί να είναι:** $l \in \mathbb{R}$ ή $+\infty$ ή $-\infty$

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Έστω, τώρα, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ -x+5, & x > 1 \end{cases}$, της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής Όρια-συνέχεια συναρτήσεων

Παρατηρούμε ότι:

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά ($x < 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ_1 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$

Διαβάζουμε: "το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1 ".

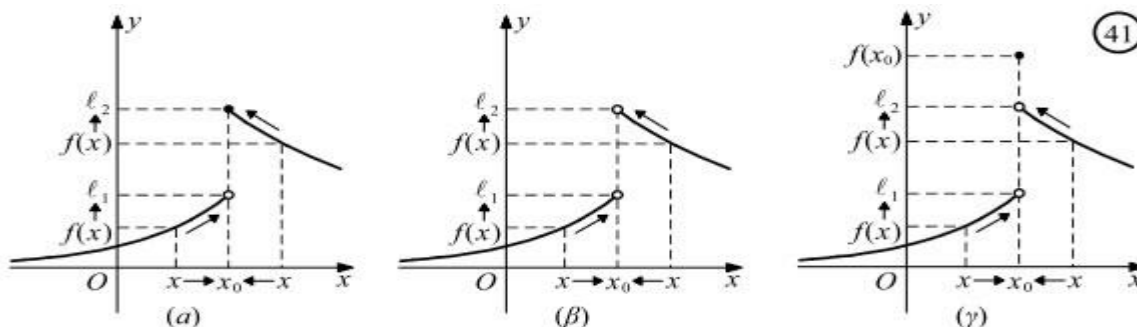
— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά ($x > 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ_2 , καθώς το x προσεγγίζει τον x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$

Διαβάζουμε: "το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2 ".

Στο παραπάνω παράδειγμα παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ και λέμε ότι η συνάρτηση **δεν έχει όριο στο $x_0 = 1$** (δεν συγκλίνει).



Πλευρικά όρια της f στο x_0 λέμε τους αριθμούς $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$.

Συγκεκριμένα : $\begin{cases} \ell_1 \rightarrow \text{αριστερό όριο της } f \text{ στο } x_0 \\ \ell_2 \rightarrow \text{δεξιά όριο της } f \text{ στο } x_0 \end{cases}$

☺ **ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ**

1. Πρίν τον υπολογισμό ορίου πρέπει να βρίσκουμε το πεδίο υπολογισμού της συνάρτησης.

2. **ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΟΤΑΝ :**

(α) Η f καθορίζεται με διαφορετικούς τύπους δεξιά και αριστερά του x_0 .

(β) Σε άλλες περιπτώσεις όπως π.χ. όταν έχει απόλυτες τιμές, και μηδενίζεται η ποσότητα που είναι μέσα στο απόλυτο

3. $x \rightarrow x_0^+ \Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \end{cases}$: δηλαδή x τείνει στο x_0 από δεξιά.

4. $x \rightarrow x_0^- \Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$: δηλαδή x τείνει στο x_0 από αριστερά.

5. Το σύμβολο $x \rightarrow x_0$ καθορίζει στο διάστημα $U(x_0, \delta)$ και το πρόσημο του x . **ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ :**

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής
Όρια-συνέχεια συναρτήσεων

- $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0$
 - $x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0$
 - $x \rightarrow 0 \Rightarrow x$ θετικός ή αρνητικός.
 - $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0$
 - $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0$
6. Επίσης ισχύουν οι ισοδυναμίες: $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow -x \rightarrow -x_0 \Leftrightarrow x - x_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_0 - x \rightarrow 0$.
7. Για να έχει νόημα η σύγκλιση μιας συνάρτησης όταν: $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$ ή $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ πρέπει:
- (α) Αν $x \rightarrow x_0$, το πεδίο ορισμού της f να περιέχει διάστημα της μορφής: $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή $U(x_0, \delta)$.
- (β) Αν $x \rightarrow x_0^-$, το πεδίο ορισμού της f να περιέχει διάστημα της μορφής: (α, x_0) .
- (γ) Αν $x \rightarrow x_0^+$, το πεδίο ορισμού της f να περιέχει διάστημα της μορφής: (x_0, β) .
8. Δεν πρέπει να μπερδεύουμε την τιμή της συνάρτησης f στο x δηλαδή το $f(x)$ με το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΝ: Να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και να μην υπάρχει το $f(x_0)$ ή να υπάρχουν και τα δυο και να είναι: ίσα ή άνισα μεταξύ τους.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

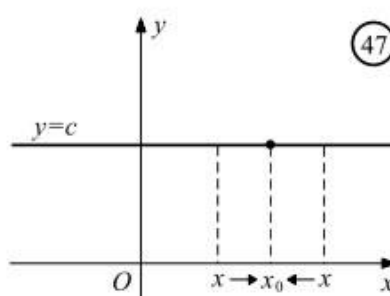
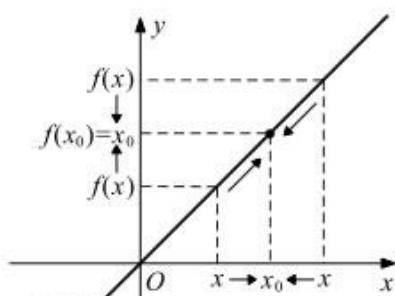
Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$, με $\ell \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$, με $h, \ell \in \mathbb{R}$

ΟΡΙΟ ΤΑΥΤΟΤΙΚΗΣ -ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x}$. Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση και να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και το $f(1)$.

61. Για μια συνάρτηση f ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lambda(3 - 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει όριο καθώς $x \rightarrow 2$.

62. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x < 3 \\ \sqrt{x - 3}, & x \geq 3 \end{cases}$. Να γίνει γραφική παράσταση και να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

A. ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 [όχι το αντίστροφο εκτός και λέει ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$].
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 [όχι το αντίστροφο εκτός και λέει ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$].

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

- Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ [ισχύει και το αντίστροφο]

B. ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

- Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $k \in \mathbf{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 .

$$7. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v, v \in \mathbf{N}^*.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ!

1. . Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $1 \in \mathbf{R}$ και για κάθε $x \in U(x_0, \alpha)$ ισχύει $f(x) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$
2. Πρέπει να τονιστεί ότι το το αντίστροφο των ιδιοτήτων 1,2,3,4 και 5 δεν ισχύει πάντοτε.
 Ειδικά για την ιδιότητα 5 ισχύει μόνο στην περίπτωση που είναι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
3. Πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα να υπάρχουν τα όρια καθεμιάς από τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε και κάνουμε πράξεις.

4. ΠΡΟΣΟΧΗ!!!! ➡ μπορεί να υπάρχει π.χ. το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ χωρίς να υπάρχει κάποιο ή κάποια από τα επιμέρους όρια: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Συνεπώς πρώτα βρίσκουμε τη συνάρτηση $[f(x) \cdot g(x)]$ ή $\frac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$ και μετά τα όρια.

Γ. ΟΡΙΟ ΠΟΛΥΩΜΥΜΙΚΗΣ-ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γ.1. ΟΡΙΟ ΠΟΛΥΩΜΥΜΙΚΗΣ

Πρόταση 1

Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \alpha_{v-2} x^{v-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \rightarrow$ σελ. 49.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} \text{Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων έχουμε: } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \alpha_{v-2} x^{v-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-2} x^{v-2}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_v \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x^v) + \alpha_{v-1} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1}) + \alpha_{v-2} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-2}) + \dots + \alpha_1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 6x^2 + 7x - 2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = -4.$$

Γ.2. ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ:

Πρόταση 2

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Έστω

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, Q(x) = \beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \text{ και } x_0 \in \mathbb{R}$$

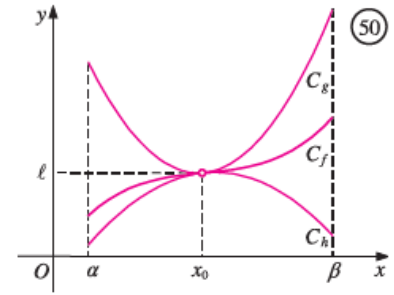
,τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ εφόσον $Q(x_0) \neq 0$. $\rightarrow$ σελ. 49 [απευθείας αντικατάσταση].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. τότε,

Δ. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Υποθέτουμε ότι "κοντά στο x_0 " μια συνάρτηση f "εγκλωβίζεται" (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g . Αν, καθώς το x τείνει στο x_0 , οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ , τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ . Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως κριτήριο παρεμβολής.



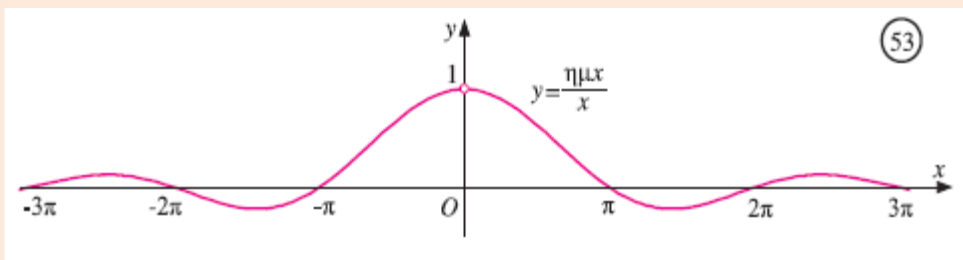
ΘΕΩΡΗΜΑ 4ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

—Να θυμόμαστε ότι:

1. $|\eta\mu x| \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$)
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
3.
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 \end{cases}$$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$
5. Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων.



ΣΤ. ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης fog στο σημείο x_0 , τότε

εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

—Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$$

Απροσδιόριστη μορφή λέμε την πράξη μεταξύ ορίων που δεν δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα εκ των προτέρων.

Τέτοιες μορφές ορίων συμβολικά είναι :

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, +\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty), 1^\infty, (\pm\infty)^0, 0^0$$

- Ανάλογα με τη μορφή της απροσδιοριστίας εφαρμόζουμε κατάλληλη μέθοδο για την άρση της και υπολογίζουμε το όριο της συνάρτησης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΟΡΙΟΥ

1. ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, με $x_0 \in A$ ή D_f

ΜΕΘΟΔΟΣ → αντικαθιστούμε άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ κάνοντας χρήση κατάλληλων θεωρημάτων και ιδιοτήτων έχοντας υπόψιν και τα βασικά όρια.

ΕΙΔΙΚΑ στην ιδιότητα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, πρέπει πρώτα να ελέγχουμε ότι δεν μηδενίζεται ο παρανομαστής και μετά εφαρμόζουμε την ιδιότητα.

2. Αν f ΡΗΤΗ $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ με, τότε έχουμε. ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0} \rightarrow$

Βήμα 1 : Παραγοντοποιούμε - απλοποιούμε

Βήμα 2 : αντικαθιστούμε.

ή $\rightarrow$ De l hospital [Κεφάλαιο 2]

2.1. Αν f ΡΗΤΗ $\rightarrow f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. πρώτα να

ελέγχουμε ότι δεν μηδενίζεται ο παρανομαστής και μετά εφαρμόζουμε την ιδιότητα.

Παραδειγμα

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής
Όρια-συνέχεια συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση f με : $f(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{3x^2 + 5x - 2}$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Λύση

$A_f = \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{1}{3} \right\}$. Επειδή προκύπτει απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, θα πρέπει να παραγοντοποιήσουμε και στη συνέχεια να απλοποιήσουμε ώστε να άρουμε την απροσδιοριστία.

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{3x^2 + 5x - 2} = \frac{2(x+2)(x-\frac{3}{2})}{3(x+2)(x-\frac{1}{3})} = \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \quad [\text{χρήση τύπου : } ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)]$$

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{2\left(-2-\frac{3}{2}\right)}{3\left(-2-\frac{1}{3}\right)} = 1 \quad \text{ΑΠΑ} \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1.$$

2.2. Αν η f περιέχει ΡΙΖΙΚΑ 2^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ και έχουμε ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΑ $\frac{0}{0} \rightarrow$ Πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή ή του παρονομαστή ή και των δυο κάνοντας χρήση της ταυτότητας : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 4x + 3}$

ΛΥΣΗ :

$A_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$. Παρατηρούμε ότι το όριο αριθμητή και παρονομαστή είναι μηδέν $\left(\frac{0}{0} \right)$ Άρα :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2})^2 - 4}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

2.3. Αν η f περιέχει ΡΙΖΙΚΑ 3^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ και έχουμε ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΑ $\frac{0}{0} \rightarrow$

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ και $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, λύνοντας

$$\text{ως προς : } a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \quad \& \quad a+b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$ της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

Λύση

→Θέτω $2 = \sqrt[3]{8}$ και είναι: $\alpha = \sqrt[3]{x}$ & $\beta = \sqrt[3]{8}$, άρα από την $\alpha - \beta = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$ έχουμε αντίστοιχα :

$$\sqrt[3]{x} - 2 = \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{8})^3}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{8} + (\sqrt[3]{8})^2}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{8})^3}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{8} + (\sqrt[3]{8})^2}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(x+1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)}{(x-8)} = (8-1)(\sqrt[3]{8^2} + 2\sqrt[3]{8} + 4) = 84.$$

2.4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ $v > 3$ ης ΤΑΞΗΣ. → Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα :

$\alpha^v - \beta^v = (\alpha - \beta)(\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \alpha^{v-3}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{v-2} + \beta^{v-1})$ [ΔΙΩΝΥΜΟ NEWTON] - Απλοποιώ και συνεχίζω κατά τα ννωστά.

2.5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΤΑΞΕΩΝ αλλά

(α) ΜΕ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΥΠΟΡΡΙΖΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ. → Εργαζόμαστε με βοηθητικό άγνωστο και το Ε.Κ.Π. των τάξεων αυτών έχοντας υπόψιν ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(x_0)}$, $n \geq 2$ και στη συνέχεια παραγοντοποιούμε ,κ.λ.π.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{4\sqrt{x} - 1}$.

Λύση

$A_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Ε.Κ.Π. = 12 → Θέτω $\sqrt[12]{x} = u \Rightarrow \sqrt[3]{x} = u^4$ & $\sqrt{x} = u^3$ [ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ] Όταν x

$$\rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[12]{x} \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow 1. \text{ Άρα: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{4\sqrt{x} - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4 - 1}{u^3 - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u^3 + u^2 + u + 1)}{(u-1)(u^2 + u + 1)} = \frac{4}{3}$$

(β) ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΥΠΟΡΡΙΖΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ. → Εργαζόμαστε με προσθαφαίρεση κατάλληλης τιμής.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt[3]{x + 25}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

Λύση :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt[3]{x + 25}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3) - (\sqrt[3]{x + 25} - 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x + 25} - 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{9}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{9})(\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{9})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{9})} = \\ &= \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}. \text{ Άρα: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2)}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x+25}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt[3]{x+25}-\sqrt[3]{27})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{[(\sqrt[3]{x+25})^3 - (\sqrt[3]{27})^3](\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt[3]{(x+25)^2} + \sqrt[3]{x+25} - 3 + 3^2)} = \frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt[3]{(x+25)^2} + 3\sqrt[3]{x+25} + 9)},$$

Αρα: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt[3]{(x+25)^2} + 3\sqrt[3]{x+25} + 9} = \frac{2\sqrt{2}}{27} \quad (3)$

Λόγω των σχέσεων (2) και (3) η (1) γίνεται: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{27} = \frac{34\sqrt{2}}{27}.$

2.6. ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ: θέτουμε συνήθως $x-x_0=h$ οπότε $h \rightarrow 0$ κ.λ.π.

→ Χρησιμοποιείται αν δεν εφαρμόζονται οι προηγούμενοι τρόποι.

2.7. ΑΝ f ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ.

(α) Πρέπει να γνωρίζουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, επίσης: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x} = 1$ και γενικά

$$\lim_{\phi(x) \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \phi(x)}{\phi(x)} = 1.$$

(β) Χρησιμοποιούμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες της Β' ΛΥΚΕΙΟΥ όπως:

(i) τύπους αποτετραγωνισμού

(ii) » τόξου 2α

και γενικά όλους τους τύπους της τριγωνομετρίας επιτυγχάνοντας έτσι άρση απροσδιοριστίας, φέρνοντας

το όριο στη μορφή $\lim_{\phi(x) \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \phi(x)}{\phi(x)}$

(γ) Ξέρουμε από εφαρμογή ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 3x}{x^2}.$

ΛΥΣΗ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\eta\mu \frac{2x}{2} \cdot \eta\mu \frac{8x}{2}}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t}{t} \cdot 4 = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = -8$$

[θέσαμε $t=4x \rightarrow 0$]

3. ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

—Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} (f(3x - 1)) = 7$ (1).

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.

Λύση

- Θέτω $u = 3x - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} u = \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$. Άρα (1) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (f(3x - 1)) = 7 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 5} f(u) = 7$

4. ΔΙΠΛΗ ΑΝΙΣΟΤΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ή ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ: $|f(x)| \leq \theta$ ή $|f(x)| \leq |g(x)|$

→Κάνουμε χρήση των :

$$\left. \begin{array}{l} \text{αν } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}. \rightarrow \text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ}$$

ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ: $|\eta \mu x| \leq 1, |\sigma \nu x| \leq 1, |x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta,$

$|\eta \mu x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \quad \& \quad |x + \psi| \leq |x| + |\psi|$ και άλλων ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{αν } |f(x)| \leq |g(x)| \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ [Μόνο με όριο 0].}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$$

Παράδειγμα

Αν για τις συναρτήσεις f, φ ισχύει $|f(x) - \alpha| \leq \varphi(x), x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$.

Λύση: Είναι $|f(x) - \alpha| \leq \varphi(x) \Leftrightarrow -\varphi(x) \leq f(x) - \alpha \leq \varphi(x) \Leftrightarrow -\varphi(x) + \alpha \leq f(x) \leq \varphi(x) + \alpha$ (1).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi(x) + \alpha] = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0 + \alpha = \alpha.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [-\varphi(x) + \alpha] = -\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = -0 + \alpha = \alpha. \text{ Από κριτήριο παρεμβολής και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha.$$

5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ Ή ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ:

5.1. ► ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

→ Παίρνουμε Πλευρικά όρια

5.2. ► ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟ

Αν η οριακή τιμή μηδενίζει την ποσότητα του απολύτου δηλ. εμφανίζεται η παράσταση $|x - x_0|$
 → **Παίρνουμε Πλευρικά όρια**, αφού πρώτα τη μετατρέψουμε σε πολλαπλού τύπου με τη βοήθεια ορισμού του απολύτου, χωρίς να ξεχνάμε ότι:

$$x \rightarrow x_0^- \Rightarrow x - x_0 < 0 \Rightarrow |x - x_0| = -(x - x_0)$$

$$x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow |x - x_0| = x - x_0$$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow |x| = x \text{ και } x \rightarrow 0^- \Rightarrow |x| = -x.$$

Αν η οριακή τιμή ΔΕΝ μηδενίζει την ποσότητα του απολύτου → Υπολογίζουμε μέσα στο απόλυτο το όριο κανονικά με την ιδιότητα.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$.

Λύση

$A_f = \mathbb{R} - \{2\}$. Παρατηρούμε ότι έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Είναι: $x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$	+	0	- 0	+

- όταν $x < 2$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)} = x - 4$
- όταν $2 \leq x < 4$ είναι $f(x) = \frac{-x^2 + 6x - 8}{x - 2} = -\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)} = 4 - x$
- όταν $x \geq 4$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)} = x - 4$

ΣΥΝΕΠΩΣ: $f(x) = \begin{cases} x - 4, & x < 2 \text{ ή } x \geq 4 \\ 4 - x, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$

Και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - 4 = -2$ (για $x < 2$), ενώ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 - 2 = 2$ (για $x > 2$).

Άρα δεν συγκλίνει η $f(x)$ στο $x_0 = 2$.

5.3. ► ΜΟΝΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

5.4. ► ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ: → Εργαζόμαστε ανάλογα με τον τύπο της συνάρτησης με τις μεθόδους που προαναφέραμε και κάνουμε ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$ και

$xf(x) - \eta\mu x \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1). Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$ (2). Για το όριο της f θα κάνω Πλευρικά όρια αφού θέλω να διαιρέσω και δεν ξέρω το πρόσημο του x .

► Για $x < 0$ η (1) $\Rightarrow f(x) \geq \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow \underline{\ell \geq 1}$ (3)

► Για $x > 0$ η (1) $\Rightarrow f(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \underline{\ell \leq 1}$ (4). Από (3) και (4) $\Rightarrow \ell = 1$

6. ΟΡΙΟ $f(x)$ ΜΕ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΓΝΩΣΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ $f(x)$

1^ο Βήμα: Θέτουμε τη παράσταση χωρίς το όριο $= g(x)$.

2^ο Βήμα: Λύνουμε ως προς $f(x)$

3^ο Βήμα: Βρίσκουμε το όριο της $f(x)$ βάζοντας $\lim$ και στα δυο μέλη.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - x^2 - 3x) = 3$.

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Λύση

- Θέτω $g(x) = f(x) - x^2 + 3x \Rightarrow f(x) = g(x) + x^2 - 3x$ (1) με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$ (2).
- $H(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) + x^2 - 3x] = 3 + 2^2 - 3 \cdot 2 = 1$.

7. ΟΡΙΟ ΤΗΣ f ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.

Στην κατηγορία αυτή η συναρτησιακή σχέση που μας δίνεται ισχύει για κάθε τιμή των γραμμάτων της όπως :
 $f(x+\psi) = \psi f(x) + x f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$. (1) ή $f(x \cdot \psi) = f(x) + f(\psi) + 1$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ (2).

Μέθοδος:

1. ΟΤΑΝ ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ : $f(0)$, $f(1)$ κ.λ.π. θέτω συνήθως $\alpha = \beta = 0$ ή $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ κ.λ.π.
2. **ΟΤΑΝ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ** $\rightarrow$ θέτω $\psi = -x$ οπότε βγάζω : $f(-x) = f(x) \rightarrow$ άρτια
 ή $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ περιττή

3. **ΟΤΑΝ ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΟΡΙΟ** $\rightarrow$ θέτω για την (1) $x - x_0 = h \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 0 \\ \& \\ x = x_0 + h \end{cases}$ ή για την (2) $\frac{x}{x_0} = h \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 1 \\ \& \\ x = x_0 h \end{cases}$

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) - f(\beta)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (1). Δείξτε ότι

- i) $f(0) = 0$.
- ii) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ (2) να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f(2)}{x - 2}$

Λύση:

(i). Για $\alpha = \beta = 0$ η (1) γίνεται : $f(0+0) = f(0) - f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

(ii). Θέτω $x - 2 = t \Rightarrow \begin{cases} x = h + 2 \\ \& \\ h \rightarrow 0 \end{cases}$ ΑΠΑ : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f(2)}{x - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + 2) + f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(2) + f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. f ΡΗΤΗ με $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$

→ **ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$** : Παραγοντοποιούμε - απλοποιούμε- αντικαθιστούμε

63. Να βρεθούν, αν

υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 5x + 4}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 1}$
 γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 4}$ ε) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x^2 - 4}$ και στ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x - 3}$,
 με $9\alpha + 3\beta + \gamma = 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\Rightarrow$ Παραγοντοποιούμε - απλοποιούμε- αντικαθιστούμε ή Κ.Π.

64. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x}{x}$, β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x - 2\eta\mu x}{x^2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \varepsilon\phi x}{x^2}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^5 \sin \left(\frac{1}{x^{100}} \right) \right)$

65. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \eta\mu x} - 1}{x}$, β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\eta\mu x}{x^2 - 2x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1}$.

3. ΟΡΙΑ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

66. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{\eta\mu \beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi \alpha x}{\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu nx}{x}$ δ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \varepsilon\phi \frac{\pi x}{2\alpha}$ και (ε) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - 2\sin x}$

67. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\eta\mu(x+2)}{4x+8}$, β) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 \alpha}{x^2 - \alpha^2}$, $\alpha \neq 0$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - 3}{\eta\mu(\pi x)}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\eta\mu 5x - \eta\mu 3x)}{1 - \sin x}$.

68. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2 + x] = 2$ (1) και $f(x) = f(2-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΥΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ Ή ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

69. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+1} - 2}{x}, & -1 < x < 0 \\ 6x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής
Όρια-συνέχεια συναρτήσεων

70. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3| + x^2 - 9}{x-3}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{|x^2 - x| + |x-4| - 3x}{\sqrt{x-4}} \quad \text{και} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2| - |2x-1|}{x^2 - 1}$$

5. ΟΡΙΟ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

71. Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 2 \right) g(x) \right] = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(x + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 9} \right) f(x) \right] = 1$,
 να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

72. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 3x} = 4$ & $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) (\sqrt{1+x} - 1) = 10$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$.

73. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν: i) $(f \circ g)(x) = x^4 + x^2 + 5$ με $g(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - h(x)] = 2$.

A. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$

B. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

6. ΟΡΙΟ ΜΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ : $|f(x)| \leq \theta$ ή $|f(x)| \leq |g(x)| \rightarrow$ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

74. Να βρεθούν τα όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $|f(x)| \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$, για κάθε $x \neq 0$.

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $\frac{|x+1|}{x^2 + x + 1} \leq f(x) \leq \left| \frac{\eta\mu x}{x} (x^4 + x^2 + 1) \right|$, για κάθε $x \neq 0$.

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $|xf(x) - 2\eta\mu x| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $|x^2 f(x) - \sin 2x + 1| < x^4 + |x^3|$, για κάθε $x \neq 0$.

75. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x + 2$ για κάθε $x > 0$, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 5} - 3}{x^2 - 4} \quad \text{και} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) - 3| - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

7. ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ- ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

76. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ & $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf^2(x) - 16x}{xf(x) - 2\mu f(x) - 4x + 8\mu} = 4$, να βρεθεί ο αριθμός $\mu \in \mathbb{R}$.

77. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, & x < 1 \\ \alpha x + \beta, & x \geq 1 \end{cases}$. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς

α και β ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και να ισχύει $f(2) = 1$.

8. ΟΡΙΟ ΤΗΣ f ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

⇒ Στην κατηγορία αυτή η συναρτησιακή σχέση που μας δίνεται είναι :

$$f(x+y) = \dots, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad (1) \quad \text{ή} \quad f(x \cdot y) = \dots, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad (2).$$

$$\text{ΓΙΑ ΟΡΙΟ} \rightarrow \text{θέτω για την (1) } x-x_0=h \text{ ή για την (2) } \frac{x}{x_0}=h \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 0 \\ \& \\ x = x_0 + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 1 \\ \& \\ x = x_0 h \end{cases}$$

78. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι είναι

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta), \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \text{ Αν είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

79. (α) Να αποδείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) = l, \quad x_0 \neq 0$

(β) Αν για κάθε $x \neq 0$ ισχύει : $f(x\psi)=f(x)+f(\psi)+(x-1)(\psi-1)$ (1) και (2), να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

80. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε : $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \sin \beta + f(\beta) \sin \alpha$, για

$$\text{κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (1) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha}.$$

81. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι είναι $f(xy) = f(x)f(y) - 2xy$

$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \quad (1) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad (2).$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

B. Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(1), f(2)$.

$$\Gamma. \text{ Αν } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x^2)}{x^2}, & x > 0 \\ x^5 \ln \frac{2015}{x^{2015}} - a, & x < 0 \end{cases}, \text{ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό } a \text{ ώστε να υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

9. ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΜΕ ΜΟΝΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

82. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ και

$$f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1). \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

83. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ και

$$xf(x) - \ln x \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1). \text{ Να βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

84. A. Αν η f είναι περιττή και $\lim_{x \rightarrow 3} [-2f(x) + x - 1] = 4$, να δείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$.

B. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και $\lim_{x \rightarrow 1} [-3f(x) + x - 2] = 5$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.