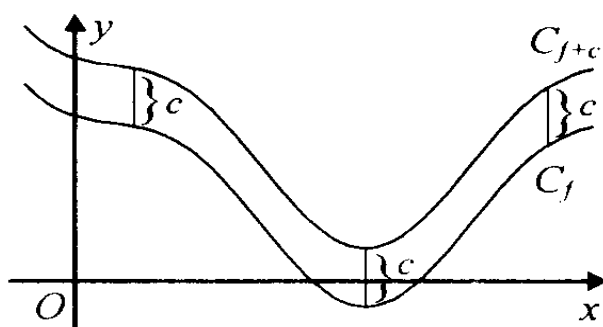


ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦ. 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ -ΟΡΙΑ- ΣΥΝΕΧΕΙΑ



ΟΡΙΣΜΟΣ:

Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ονομάζουμε μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Γράφουμε: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ή $x \rightarrow f(x)$

- Το γράμμα $x \rightarrow$ λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, (που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A).
- Το γράμμα $y \rightarrow$ λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή** (που παριστάνει την τιμή της f στο x).

Για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$, ισχύουν τα εξής:

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ:

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ A ή D_f : είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει εκείνες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x ώστε να ορίζεται (υπάρχει) η $f(x)$ Δηλαδή $D_f = \{x \in \mathbb{R} / y = f(x) \in \mathbb{R}\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Σύνολο τιμών της f λέγεται το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.

A. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

α/α	ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	ΤΥΠΟΣ	ΠΕΔ. ΟΡΙΣΜΟΥ
1.	Πολυωνυμική	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$	$A = \mathbb{R}$
2.	Ρητή	$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} =$	$A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$ παρονομαστής $\neq 0$
3.	Άρρητη	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}, n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq 2$.	$A = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$
4.	Έκθετική		$A = \{x \in \mathbb{R} / g(x) > 0 \text{ και } h(x) \in \mathbb{R}\}$
5.	Λογαριθμική	$f(x) = \log(g(x))$ ή $f(x) = \ln(g(x))$	$A = \{x \in \mathbb{R} / g(x) > 0\}$
6.	Τριγωνομετρική	$f(x) = \begin{cases} \eta \mu g(x) \\ \sigma \upsilon \nu g(x) \\ \epsilon \phi g(x) \\ \sigma \phi g(x) \end{cases}$	$A = \mathbb{R}$ $A = \mathbb{R}$ $A = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ $A = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
7.	Πολ/λού τύπου	$f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in A_1 \\ f_2(x), x \in A_2 \\ \dots \\ f_v(x), x \in A_v \end{cases}$	$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_v$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν γνωρίζουμε το διάγραμμα της $f(x)$, τότε το A βρίσκεται με τη προβολή του διαγράμματος στον άξονα $x'x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ_1

(Άσκηση 1 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α' ΟΜΑΔΑΣ)

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$
- ii. $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$
- iii. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- iv. $f(x) = \ln(1-e^x)$
- v. $f(x) = (2-x)^{\sqrt{x-1}}$
- vi. $f(x) = \ln(\pi^2 - x^2) - \varepsilon/x + x^{2016}$

Λύση :

i. Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1,2\}$

ii. Πρέπει : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,2]$. Άρα $D_f = [1,2]$

iii. Πρέπει : $x \neq 0$ (1) και $1-x^2 \geq 0$ (2)

Έχω $1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f = [-1,0) \cup (0,1]$.

iv. Πρέπει : $1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα $D_f = (-\infty, 0)$

v. Πρέπει : $\begin{cases} 2-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1,2)$ Άρα $D_f = (1,2)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ_2

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ β) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Λύση

α) Πρέπει $\{x > 0 \text{ και } 1-x^2 > 0\} \Leftrightarrow \{x > 0 \text{ και } |x| < 1\} \Leftrightarrow \{x > 0 \text{ και } -1 < x < 1\} \Leftrightarrow x \in (0, 1)$, άρα $A = (0, 1)$.

β) Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ (1). $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1$, $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$.

Άρα η (1) είναι θετική (ομόσημη του α), εκτός των ριζών.

Συνεπώς $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3\} = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ_3

Να βρεθούν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x-1} + \ln\sqrt{x^2+1}$ β) $f(x) = \left(\frac{x^2-5x+6}{x-1} \right)^{x+2}$.

Λύση

α) Από την $\sqrt{x-1}$ πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ (1).

Από την $\ln\sqrt{x^2+1}$ πρέπει $\sqrt{x^2+1} > 0$ η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Συναληθεύοντας τις (1), (2), (3) παίρνουμε $A = [1, +\infty)$.

• β) Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ (1) και $\left(\frac{x^2-5x+6}{x-1} \right) > 0$ (2), οπότε έχουμε:

• $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x_1=2$ ή $x_2=3$, $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-1$	-	+	+	+	+
x^2-5x+6	+	+	-	+	+
$\frac{x^2-5x+6}{x-1}$	-	+	-	+	+

άρα $A = (1, 2) \cup (3, +\infty)$.

B. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ $f(A)$

1ος τρόπος

ΒΗΜΑ 1 $\Rightarrow$ Βρίσκουμε το Π.Ο. Α της f.

ΒΗΜΑ 2 $\Rightarrow$ Λύνουμε τον τύπο $y=f(x)$ ως προς $x=f(y)$ και βάζουμε όπου χρειάζεται τους περιορισμούς.

ΒΗΜΑ 3 $\Rightarrow$ Έχουμε τους παραπάνω περιορισμούς και απαιτούμε $x \in A \Rightarrow f(y) \in A$ οπότε βρίσκουμε τους περιορισμούς του y, δηλαδή το σύνολο τιμών $f(A)$.

2ος τρόπος

$\Leftarrow$ Με όρια και παραγώγους στο κεφάλαιο 2.

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν ο πραγματικός αριθμός $\alpha \in f(A)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο A.

2. Αν $f(A) = (-\infty, 0)$ τότε $f(x) < 0$.

3. Αν $f(A) = (0, +\infty)$ τότε $f(x) > 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^x)$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

B. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Λύση

A. Πρέπει $1 - e^x > 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x < e^0 \xrightarrow{e^x \text{ γν. αύξουσα}} x < 0$, άρα $A = (-\infty, 0)$.

B. Για να είναι ο αριθμός 0 στο σύνολο τιμών της f πρέπει η εξίσωση

$$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(1 - e^x) = \ln 1 \Rightarrow 1 - e^x = 1 \Rightarrow e^x = 0, \text{ αδύνατη γιατί } e^x > 0, \text{ άρα αριθμός } 0 \text{ δεν είναι στο } \Sigma. \text{T.}$$

Γ. Είναι $y=f(x) \Rightarrow y = \ln(1 - e^x) \Rightarrow e^y = 1 - e^x \Rightarrow e^x = 1 - e^y \Rightarrow x = \ln(1 - e^y)$ (1).

Όμως $1 - e^y > 0 \Rightarrow e^y < 1 \Rightarrow e^y < e^0 \xrightarrow{e^y \text{ γν. αύξουσα}} y < 0$. Άρα $f(A) = (-\infty, 0)$.

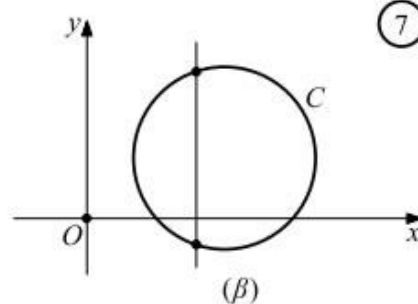
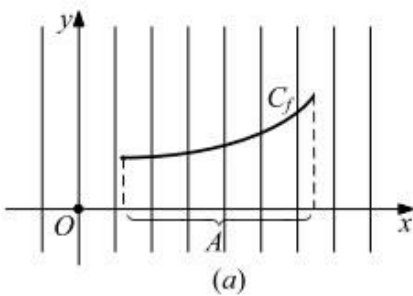
Γ. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

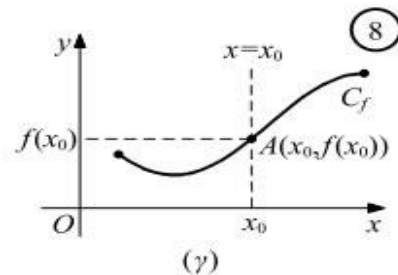
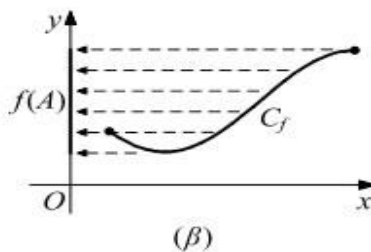
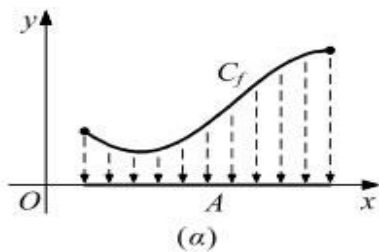
Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

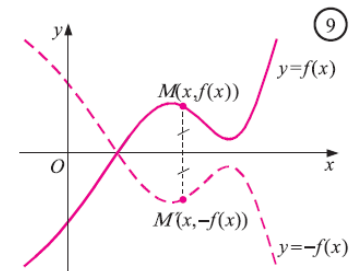
1. Πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f και μετά απλοποιούμε τον τύπο της.
2. Όταν έχουμε μια συνάρτηση, πρώτα βρίσκουμε το Π.Ο. της και μετά ότι μας ζητάνε.
3. Η εξίσωση $f(x)=0$ για κάθε $x \in A$ έχει μια μόνο λύση $\psi \in B$.
4. Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in B$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).
5. Το διάγραμμα της f τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$ σε ένα το πολύ σημείο. (Σχ. 7α).
Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).



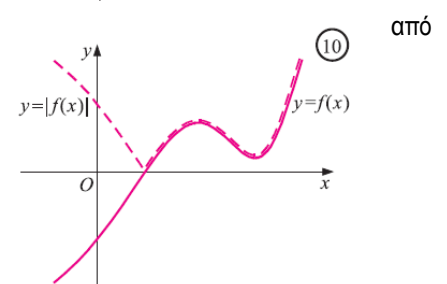
6. Μια συνάρτηση καθορίζεται με επάρκεια και πληρότητα από τη γραφική της παράσταση, αφού εκεί φαίνεται κάθε ιδιότητά της.
Ειδικότερα: Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , τότε:
α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).



7. Η γραφική παράσταση C_{-f} της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης C_f της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M \in (x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).

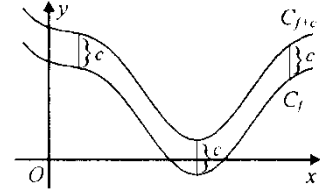


8. Η γραφική παράσταση $C_{|f|}$ της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



(σχ.11)

9. Η γραφική της $g(x)=f(x)+c$ έχει κατακόρυφη μετατόπιση ως προς τη γραφική της f κατά c μονάδες (Σχ. 11).
10. Η γραφική της $g(x)=f(x-c)$ έχει οριζόντια μετατόπιση ως προς τη γραφική της f κατά c μονάδες δεξιά.
11. Η γραφική της $g(x)=f(x+c)$ έχει οριζόντια μετατόπιση ως προς τη γραφική της f κατά c μονάδες αριστερά.



12. Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g στα διαστήματα του x όπου $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$.
13. Η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g στα διαστήματα του x όπου $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0$
14. ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ

- ΜΕ ψ : Θέτουμε $\chi=0$ στον τύπο της συνάρτησης $\psi=f(x)$ και βρίσκουμε την τιμή y_0 . Άρα το σημείο είναι $(0, y_0)$
- ΜΕ $x\chi'$: Στο τύπο $\psi=f(x)$ μηδενίζουμε τον ψ και βρίσκουμε τις τιμές x_0 . Οπότε τα σημεία τομής είναι $(x_0, 0)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :
 (α) $f(x)=3x-6$ και (β) $g(x)=x^2+4$.

Λύση

- (α)
- Με τον $\chi'\chi$: Θέτουμε $\psi=0$ οπότε $0=3\chi-6 \Leftrightarrow 3\chi=6 \Leftrightarrow \chi=2$. Άρα η ευθεία $\psi=3\chi-6$ τέμνει τον $\chi'\chi$ στο $(2,0)$.
 - Με τον $\psi'\psi$: Θέτουμε $\chi=0$, οπότε $\psi=3\cdot 0-6 \Leftrightarrow \psi=-6$. Δηλαδή τον τέμνει στο σημείο $(0,-6)$.
- (β)
- Με τον $\chi'\chi$: Για $\psi=0$ έχουμε $0=\chi^2+4 \Leftrightarrow \chi^2=-4$. Αδύνατη. Δηλαδή δεν τέμνει τον $\chi'\chi$.
 - Με τον $\psi'\psi$: Για $\chi=0$ έχουμε $\psi=0^2+4=4$. Άρα τον τέμνει στο σημείο $(0,4)$.

15. ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ: Για να βρούμε συντεταγμένες του σημείου τομής δυο συναρτήσεων, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \rightarrow \text{άρα εξετάζω τη διαφορά τους}$$

ακόμη και αν δεν ξέρω τους τύπους καθεμιάς χωριστά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των συναρτήσεων: $\psi=-2\chi+3$ και $\psi=\frac{\chi+1}{2}$

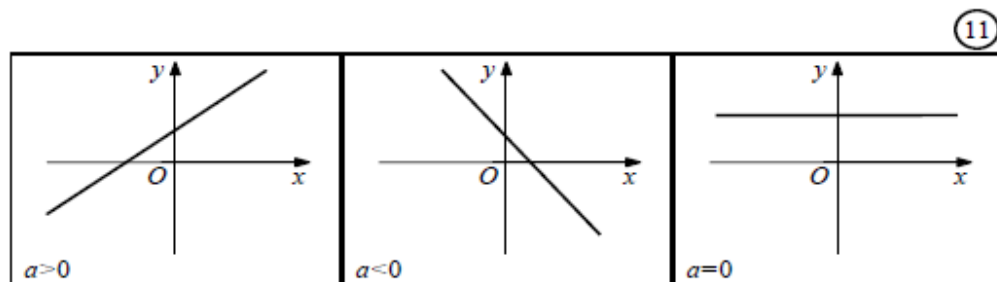
Λύση

$$\text{ΔΗΛ. } \begin{cases} \psi = -2\chi + 3 \\ \psi = \frac{\chi + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow -2\chi + 3 = \frac{\chi + 1}{2} \Leftrightarrow -4\chi + 6 = \chi + 1 \Leftrightarrow -4\chi - \chi = 1 - 6$$

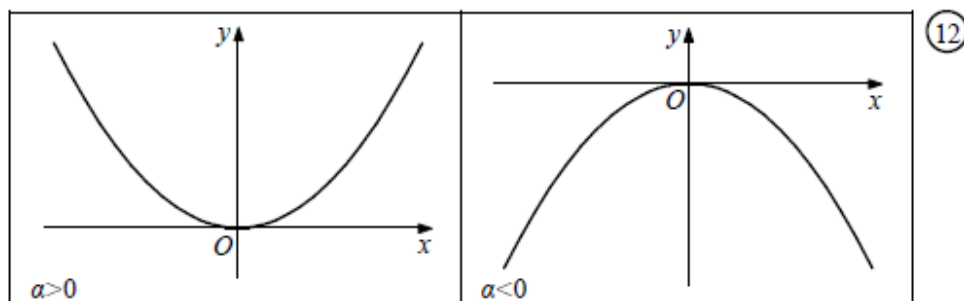
$$\Leftrightarrow -5\chi = -5 \Leftrightarrow \chi = 1 \text{ άρα } \psi = -2 \cdot 1 + 3 \Leftrightarrow \psi = 1. \text{ Συνεπώς το σημείο τομής είναι } (1,1).$$

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

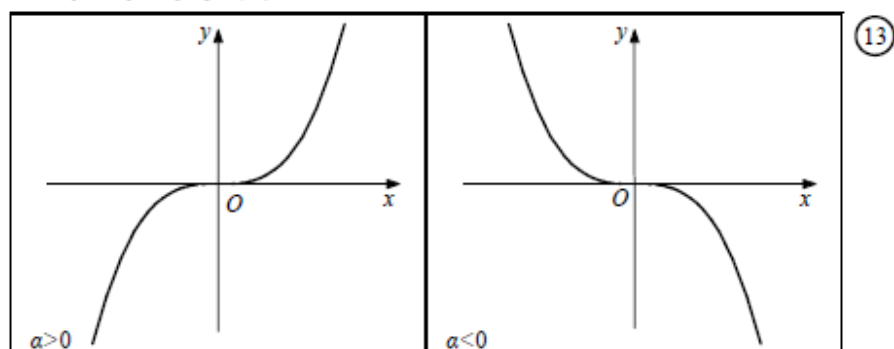
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$



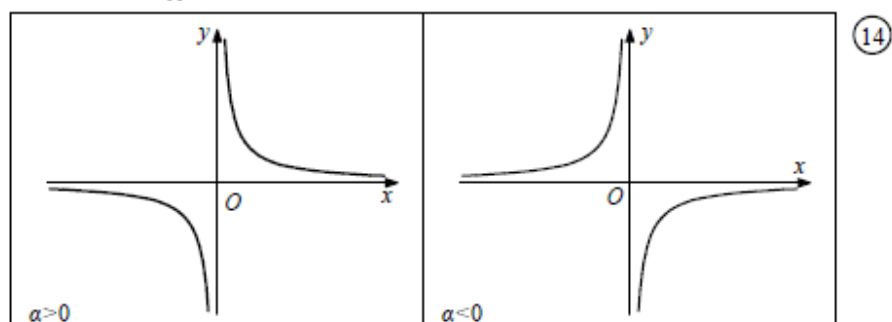
β) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.



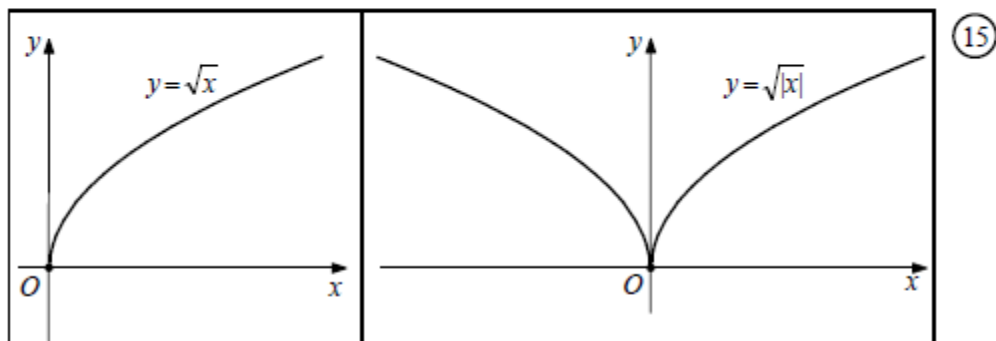
γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$.



δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.

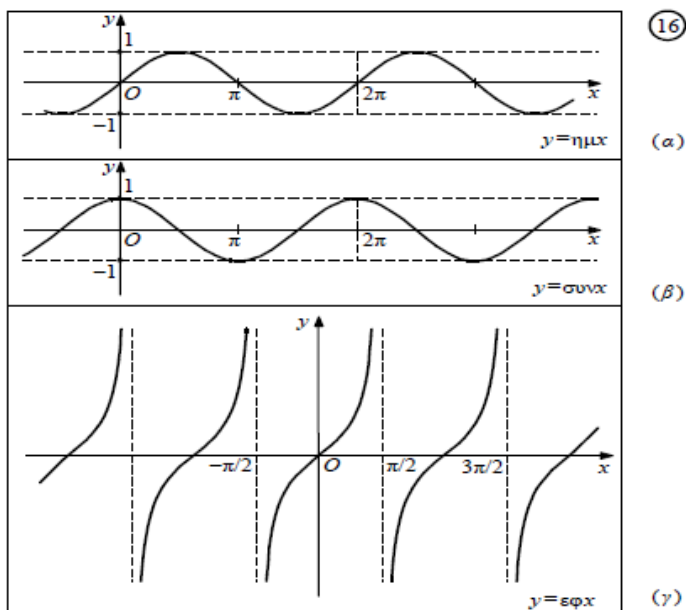


ε) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.



(15)

στ) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \epsilon\phi x$



(16)

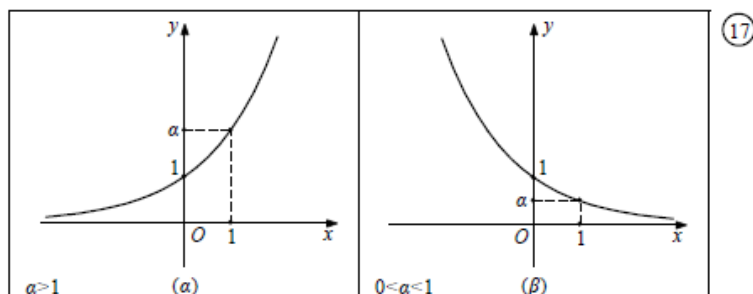
(α)

(β)

(γ)

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

ξ) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.



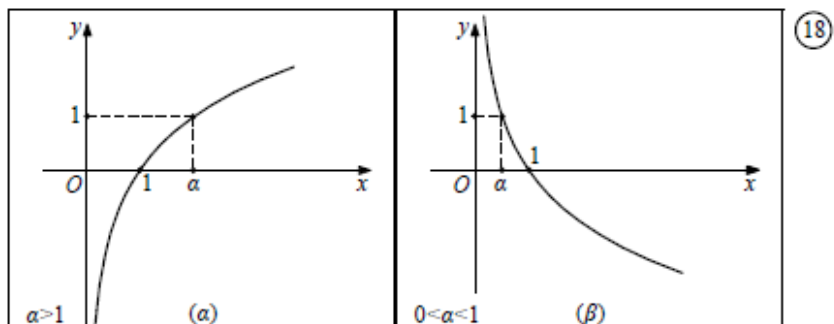
(17)

Ιδιότητες :

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $a > 1$, ΤΟΤΕ: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Αν $0 < a < 1$, ΤΟΤΕ: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$



Ιδιότητες :

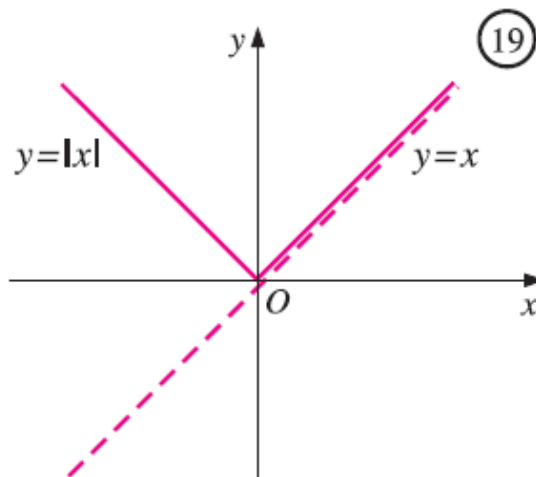
- 1) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
- 2) $\log_a a^x = x$ και $a^{\log_a x} = x$
- 3) $\log_a a = 1$ και $\log_a 1 = 0$
- 4) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- 5) $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- 6) $\log_a x_1^k = k \log_a x_1$
- 7) Αν $a > 1$, ΤΟΤΕ: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ αν $0 < a < 1$, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
- 8) $a^x = e^{x \ln a}$, αφού $a = e^{\ln a}$.

Να παραστήσετε γραφικά κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:

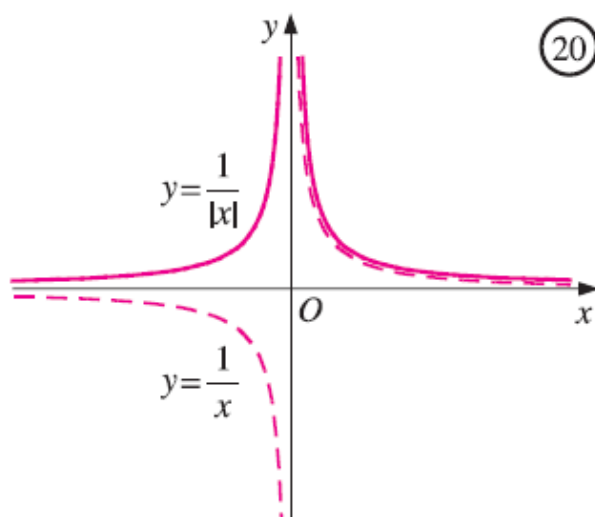
i) $f(x) = |x|$, ii) $g(x) = \frac{1}{|x|}$, iii) $h(x) = \frac{1}{|x-1|}$.

ΛΥΣΗ

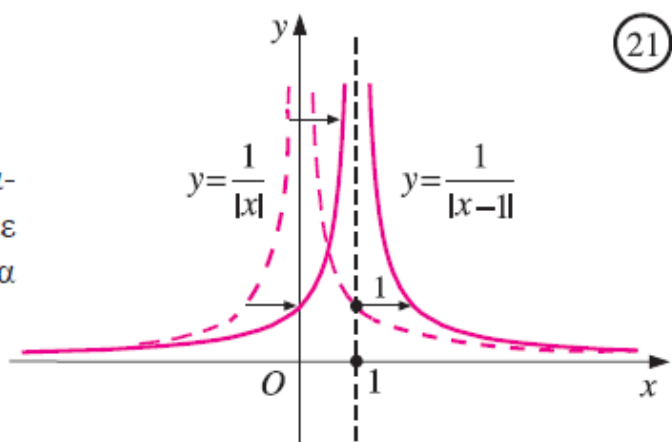
- i) Αρχικά παριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = x$ και έπειτα την $f(x) = |\varphi(x)|$.



- ii) Αρχικά παριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ και έπειτα την $g(x) = |\varphi(x)|$.



- iii) Επειδή $h(x) = g(x-1)$, η γραφική παράσταση της h προκύπτει, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της g κατά μία μονάδα προς τα δεξιά.



Δ.ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν:

- Το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- Τον ίδιο τύπο

$$\text{Δηλαδή: } f=g \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \text{ και} \\ f(x)=g(x), \forall x \in A \end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΑ!

1. Αν $A \subseteq B \rightarrow$ λέμε ότι η f είναι περιορισμός της g ή ότι η g είναι επέκταση της f .
2. Αν $B \subseteq A \rightarrow$ λέμε ότι η g είναι περιορισμός της f ή ότι η f είναι επέκταση της g .
3. Αν $f(x)=g(x)$ τότε λέμε ότι $f=g$ στο ευρύτερο δυνατό υποσύνολο $\Gamma=A \cap B$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να εξεταστεί αν είναι ίσες οι συναρτήσεις: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $g(x)=\frac{(x+1)^2-2(x+1)}{(x+1)^2}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού A της f είναι $\mathbb{R}-\{-1\}$ και είναι ίσο με το πεδίο ορισμού της B της g .

Επίσης: $g(x)=\frac{(x+1)^2-2(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)(x+1-2)}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{x+1}=f(x)$ Άρα: $f=g$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να εξεταστεί αν είναι ίσες οι συναρτήσεις: $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$. Αν όχι να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο είναι ίσες.

Λύση

Για το πεδίο ορισμού A της f έχουμε:

- $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ (1)
- και $\frac{x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1$ (2). Από (1) και (2) $\Leftrightarrow A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

Για το πεδίο ορισμού B της g έχουμε: $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (4) και $x \geq 0$ (5)

Άρα $B=(1, +\infty)$. Είναι $A \neq B$, άρα $f \neq g$. Όμως $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}=g(x)$ και $A \cap B=B=(1, +\infty)$.

Συνεπώς $f=g$ στο ευρύτερο δυνατό υποσύνολο $A \cap B=B=(1, +\infty)$.

Ε. ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Έστω δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα. Για να κάνουμε πράξεις με συναρτήσεις, βρίσκουμε την τομή των πεδίων ορισμού τους $A \cap B$
- **ΣΥΓΓΕΚΡΙΜΕΝΑ:**
 1. ΑΘΡΟΙΣΜΑ: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ με πεδίο ορισμού το $A \cap B$.
 2. ΔΙΑΦΟΡΑ: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ με πεδίο ορισμού το $A \cap B$.
 3. ΓΙΝΟΜΕΝΟ: $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$ με πεδίο ορισμού το $A \cap B$.
 4. ΠΗΛΙΚΟ: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ με πεδίο ορισμού το $A \cap B - \{x \in \mathbb{R} / g(x)=0\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\sqrt{x}$ & $g(x)=\sqrt{1-x}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού A της f είναι το $[0, +\infty)$ και το πεδίο ορισμού

B της g είναι το $(-\infty, 1] \Leftrightarrow A \cap B = [0, +\infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1] \neq \emptyset$

Οπότε:

1. $f+g=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$, με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$.

2. $f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$, με πεδίο ορισμού το $[0,1]$.

3. $f \cdot g = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{x(1-x)}$, με πεδίο ορισμού το $[0,1]$.

4. $\frac{f}{g} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, με πεδίο ορισμού το $[0,1)$ αφού πρέπει $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Z. ΣΥΝΘΕΣΗ

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$. Η τιμή της φ στο x μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

1^η ΦΑΣΗ: Στο $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $y = x-1$ και

2^η ΦΑΣΗ: Στο $y = x-1$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{y} = \sqrt{x-1}$, εφόσον $y = x-1 \geq 0$.

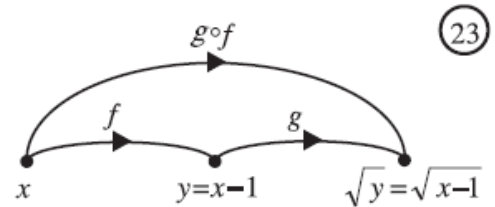
Στη διαδικασία αυτή εμφανίζονται δύο συναρτήσεις:

α) η $f(x) = x-1$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$A = \mathbb{R}$ (α' φάση) και

β) η $g(y) = \sqrt{y}$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B = [0, +\infty)$ (β' φάση).

- Έτσι, η τιμή της φ στο x γράφεται τελικά $\varphi(x) = g(f(x))$. Η συνάρτηση φ λέγεται σύνθεση της f με την g και συμβολίζεται με **gof**.
- Το πεδίο ορισμού της φ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A της f , αλλά περιορίζεται στα $x \in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της g , δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = [1, +\infty)$.

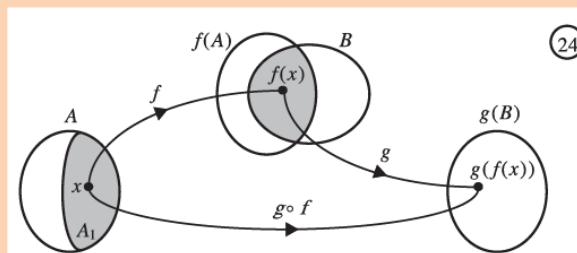


(23)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με **gof**, τη συνάρτηση με τύπο : $(gof)(x) = g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο : $A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\} \neq \emptyset$.

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.



(24)

Z.1. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΒΗΜΑ 1^ο Βρίσκουμε πρώτα τα Π.Ο. των f, g έστω A, B αντίστοιχα.

ΒΗΜΑ 2^ο Εξετάζουμε αν η gof ορίζεται. Βρίσκουμε το A' . Αυτό συμβαίνει όταν και μόνο όταν:

$A_{gof} = \{x \in A \text{ \& } f(x) \in B\} \neq \emptyset$. Έτσι λοιπόν λύνουμε την ανίσωση $f(x) \in B$ και εξετάζουμε ποιές από τις λύσεις x ανήκουν στο A .

–Το πεδίο ορισμού της gof είναι υποσύνολο του A . Αν όμως $f(A) \subseteq B$ τότε $A_{gof} = A$.

ΒΗΜΑ 3^ο Βρίσκουμε τον τύπο της gof . Η εύρεση του τύπου της gof επιτυγχάνεται με αντικατάσταση του x με $f(x)$ στον τύπο της $g(x)$. ΔΗΛΑΔΗ: $(gof)(x) = g(f(x)) = g(f(x))$, $\forall x \in A_{gof}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ!:

- 1.Είναι λάθος να βρίσκουμε κατ'ευθείαν τον τύπο της gof χωρίς προηγούμενα να εξασφαλίσουμε ότι η gof ορίζεται.
2. **Προσεταιριστική ιδιότητα:** Αν για τρεις συναρτήσεις f, g, h ορίζεται η $ho(gof)$ τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$
- 3.**Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα** $fog=gof$
- 4.Είναι δυνατόν κάποια από τις fog ή gof να μην προσδιορίζονται καν .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:f(x)=2x^2-1$ & $g:g(x)=\sqrt{x-3}$

- (i). Βρείτε τη gof αν ορίζεται.
- (ii). Να βρεθεί η fog .

Λύση

(i). Είναι $A=\square$, $B=[3,+\infty)$

$$\text{ΒΗΜΑ } 1^{\circ}: x \in A_{fog} = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \text{ και } f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} / (2x^2 - 1) \in [3, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 1 \geq 3\} \\ = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 2\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \neq \emptyset$$

ΒΗΜΑ 2° : Άρα ορίζεται η gof με τύπο: $(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)-3}=\sqrt{(2x^2-1)-3}=\sqrt{2x^2-4}$

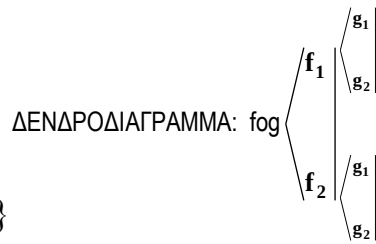
ii) $A_{gof} = \{x \in \square / x \in A \text{ και } f(x) \in B\} = \{x \in [3, +\infty) \text{ & } \sqrt{x-3} \in \mathbb{R}\} = \{x \geq 3 \text{ & } x \geq 3\} = [3, +\infty) \neq \emptyset$

Συνεπώς ορίζεται η $fog:[3, +\infty) \rightarrow \square$ με τύπο: $(fog)(x)=f(g(x))=2g^2(x)-1=2(\sqrt{x-3})^2-1=2|x-3|-1=2x-7$.

*** ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΥΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ**

- Έστω οι συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$ & $g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x \in B_1 \\ g_2(x), & x \in B_2 \end{cases}$, τότε: $(fog)(x)=$

$$\begin{cases} (f_1og_1)(x)=f_1(g_1(x)), x \in A'_1=\{x \in B_1 / g_1(x) \in A_1\} \\ (f_1og_2)(x)=f_1(g_2(x)), x \in A'_2=\{x \in B_2 / g_2(x) \in A_1\} \\ (f_2og_1)(x)=f_2(g_1(x)), x \in A''_1=\{x \in B_1 / g_1(x) \in A_2\} \\ (f_2og_2)(x)=f_2(g_2(x)), x \in A''_2=\{x \in B_2 / g_2(x) \in A_2\} \end{cases}$$



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Είναι δυνατόν κάποιος από τους παραπάνω κλάδους της fog να μην προσδιορίζεται.

Z.2. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f \rightarrow$ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΕΣ fog & g [ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ]

ΒΗΜΑ 1° Αντικαθιστώ την $g(x)$ στη $fog \rightarrow (1)$.

ΒΗΜΑ 2° Θέτω στην (1) όπου $g(x)=\omega$ και λύνω ως προς $x \rightarrow (2)$

ΒΗΜΑ 3° Αντικαθιστώ τις σχέσεις του (2) στην (1) και με πράξεις βρίσκω τη συνάρτηση $f(\omega)$ ή $f(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνονται οι συνάρτηση $fog:(fog)(x)=3x+2\ln x-1$ και η συνάρτηση $g:g(x)=\ln x$, για κάθε $x>0$.
 Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Λύση

ΒΗΜΑ 1° : Αντικαθιστώ την $g(x)$ στη $(fog)(x)=3x+2\ln x-1 \Rightarrow f(\ln x)=3x+2\ln x-1, (1)$

ΒΗΜΑ 2° : Θέτω στην (1) όπου $\ln x=\omega$, $\omega \in \square$ και λύνω ως προς $x=e^{\omega} (2)$.

ΒΗΜΑ 3° : Αντικαθιστώ τις σχέσεις του (2) στην (1) και με πράξεις βρίσκω τη συνάρτηση $f(\omega)=3e^{\omega}+2\omega-1$ ή

$$f(x)=3e^x+2x-1, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

Z.3. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $g \rightarrow$ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΕΣ $f \circ g$ & f [ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ]

ΒΗΜΑ 1^ο Αντικαθιστώ στην f όπου $x = g(x) \rightarrow f(g(x)) = \dots \rightarrow (1)$.

ΒΗΜΑ 2^ο Εξισώνω την $f(g(x))$ της (1) με τη δοσμένη $(f \circ g)(x) = \dots$ και προκύπτει εξίσωση $\rightarrow (2)$, με άγνωστη τη $g(x)$.

ΒΗΜΑ 3^ο Λύνω την εξίσωση (2) και βρίσκω τη $g(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνονται οι συνάρτηση $f \circ g : (f \circ g)(x) = 3x - 1$ και η συνάρτηση $f : f(x) = \ln x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση g .

Λύση

ΒΗΜΑ 1^ο Αντικαθιστώ στην f όπου $x = g(x) \rightarrow f(g(x)) = \ln(g(x)) - 1 \rightarrow (1)$.

ΒΗΜΑ 2^ο Εξισώνω την $(f \circ g)(x) = 3x - 1$ με τη $f(g(x)) = \ln(g(x)) - 1$ και έχω:

$$\ln g(x) - 1 = 3x - 1 \Rightarrow \ln(g(x)) = 3x \xrightarrow{\text{από ορισμό λογαρίθμου}} (g(x)) = e^{3x}.$$

Η. ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ – ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η.1. ΑΡΤΙΑ:

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι άρτια, εργαζόμαστε ως εξής:

i). Βρίσκουμε το A_f αν δεν δίνεται και δείχνουμε ότι για κάθε $x \in A_f$, $-x \in A_f$, (1). Δηλαδή ότι το

A_f είναι συμμετρικό σύνολο ως προς το μηδέν. (Φανερό είναι ότι στην περίπτωση που $A = \mathbb{R}$ αυτό συμβαίνει πάντοτε).

ii). Βάζουμε όπου $x \in A$, το $-x$ στον τύπο της f και δείχνουμε ότι για κάθε $x \in A_f$, ισχύει: $f(-x) = f(x)$ (2).

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Αν μια από τις δυο συνθήκες δεν ισχύει τότε η f δεν είναι άρτια.

ΓΡΑΦΙΚΑ $\rightarrow$ Η γραφική παράσταση μιας άρτιας είναι συμμετρική του y' .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : f(x) = x \cdot \frac{\alpha^x + 1}{\alpha^x - 1}$ με $0 < \alpha \neq 1$ είναι άρτια.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = \{x \in \mathbb{R} / \alpha^x - 1 \neq 0\}$ ή $\alpha^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^x \neq 1 \neq \alpha^0 \neq x \neq 0$.

Άρα $A_f = \mathbb{R}^*$, συμμετρικό σύνολο ως προς το μηδέν.

Για να είναι η f άρτια, είναι αρκετό πλέον να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, ισχύει $f(-x) = f(x)$. Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x) \frac{\alpha^{-x} + 1}{\alpha^{-x} - 1} = (x) \frac{\frac{1}{\alpha^x} + 1}{\frac{1}{\alpha^x} - 1} = (-x) \frac{1 + \alpha^x}{1 - \alpha^x} = (-x) \frac{\alpha^x + 1}{1 - \alpha^x} = (-x) \left(-\frac{\alpha^x + 1}{\alpha^x - 1} \right) = x \frac{\alpha^x + 1}{\alpha^x - 1} = f(x).$$

Και επομένως η f είναι άρτια.

Η.2. ΠΕΡΙΤΤΗ:

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι περιττή εργαζόμαστε ως εξής:

i). Βρίσκουμε το A αν δεν δίνεται και δείχνουμε ότι για κάθε $x \in A$ & $-x \in A$ (1). Δηλαδή το A είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. [$f(0) = 0$???]

ii). Βάζουμε όπου $x \in A_f$, το $-x$ στον τύπο της f και δείχνουμε ότι για κάθε $x \in A_f$, ισχύει: $f(-x) = -f(x)$ (2).

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Αν μια απ' τις δύο συνθήκες δεν ισχύει τότε η f δεν είναι περιττή.

ΓΡΑΦΙΚΑ $\rightarrow$ Η γραφική παράσταση μιας περιττής είναι συμμετρική ως προς την αρχή αξόνων $O(0,0)$.

Δείξτε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ είναι περιττή.

Λύση

(i). Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1-x}{1+x} > 0 \quad (1) \quad \& \quad 1+x \neq 0 \quad (2) \right\}$

$$H (1) \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$H (2) \Leftrightarrow x \neq -1$. Άρα $A = (-1, 1)$ το οποίο είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν.

(ii). Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχω:

$$f(-x) = \ln \frac{1-(-x)}{1+(-x)} \Rightarrow f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \ln 1 - \ln \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(-x) = 0 - \ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

Άρα η f είναι περιττή.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Χρήση της ιδιότητας των λογαρίθμων: $\ln \frac{\partial_1}{\partial_2} = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$, με $\partial_1, \partial_2 > 0$.

Θ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Στην κατηγορία αυτή η συναρτησιακή σχέση που μας δίνεται ισχύει για κάθε τιμή των γραμμάτων της όπως :

$f(x+\psi) = \psi f(x) + x f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$. (1) ή $f(x \cdot \psi) = f(x) + f(\psi) + 1$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ (2).

Μέθοδος:

1. **ΟΤΑΝ ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ:** $f(0)$, $f(1)$ κ.λ.π. $\rightarrow$ θέτω συνήθως $x = \psi = 0$ ή $x=0$ και $\psi=0$ κ.λ.π.

2. **ΟΤΑΝ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ** $\rightarrow$ θέτω $\psi = -x$ οπότε βγάλω: $f(-x) = f(x) \rightarrow$ άρτια
 ή $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ περιττή.

3. **ΟΤΑΝ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ο ΤΥΠΟΣ ΤΗΣ f** και έχω μορφή $\rightarrow \alpha f(g(x)) + \beta f(h(x)) = t(x)$ (1).

$\rightarrow$ Θέτω όπου $g(x) \rightarrow$ το $h(x)$ και έχω σχέση (2). Λύνω σύστημα με την αρχική (1) και βρίσκω την $f(x)$

4. **ΟΤΑΝ ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ f** και έχω μορφή $\rightarrow \alpha f(g(x)) + \beta f(h(x)) = t(x)$ (1).

$\rightarrow$ Λύνω την $g(x) = h(x)$ και οι ρίζες της είναι και ρίζες της $f(x) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ_1

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1). Δείξτε ότι

i) $f(0)=0$. ii) η συνάρτηση f είναι άρτια.

Λύση

(i). Για $x=y=0$ η (1) γίνεται: $f(0+0) = f(0) - f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

(ii) Για $x=0$ η (1) γίνεται: $f(x-x) = f(x) - f(-x) \Rightarrow f(0) = f(x) - f(-x) \xrightarrow{f(0)=0} f(-x) = f(x) \rightarrow$ άρτια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ_2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ (1). Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Λύση

Θέτουμε στην (1) όπου $x \rightarrow \frac{1}{x}$ και έχουμε: $f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = \frac{1}{x}$ (2). Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2):

, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ -3f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ -9f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 8f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 1}{8x}$$

-ΑΣΚΗΣΕΙΣ-

1.2 Έννοια Συνάρτησης

1. ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ - ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ - ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $f(x) = a$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f_1(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{\sqrt{|x| - x}} \quad \text{ii) } f_2(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} \quad \text{iii) } f_3(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - x + 1}}$$

2. Όμοια των συναρτήσεων:

$$\text{(α) } f(x) = \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{x-5} \quad \text{(β) } h(x) = \sqrt{\ln\left(\ln\frac{5x+3}{5-2x}\right)} \quad \text{(γ) } \varphi(x) = x-3 \sqrt{-x^2 + 9x - 7} \quad \text{(δ) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 4|x| - 5}}.$$

3. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$\text{i) } f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) \quad \text{ii) } g(x) = \ln \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}. \quad \text{iii). } f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{iv). } f(x) = (1 - x^2)^{\sqrt{x}}$$

$$\text{v). } f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} \quad \text{vi) } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{vii). } f(x) = \sqrt{\ln \frac{4x - x^2}{3}} \quad \text{viii). } f(x) = \sqrt{\ln(3 - |2x + 1|)}$$

$$\text{ix) } f(x) = \sqrt{5^{2x} - 5^{x+1} + 4} \quad \text{x). } f(x) = \sqrt{|x^2 + 8x - 9| - 24} \quad \text{και} \quad \text{xi). } g(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 + x + 1}).$$

$$4. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \alpha \ln x + \beta, & \text{αν } x > 0 \\ \alpha e^x - \beta, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}.$$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

B. Αν $f(0) = -1$ και $f(1) = 3$, να βρείτε τις τιμές α και β και τις ρίζες της f.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + e^x$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

B. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a^2 - 1$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln(x - 3)$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

B. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - \alpha = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση, για κάθε $\alpha > 0$.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^5(x) + f(x) - e^x + 1 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τις ρίζες και πρόσημο της f στο $\mathbb{R}$.

B. Αν γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2025 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

8. A. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 + \sqrt{x - 1}$.

B. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$.

9. Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των

δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι $E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in (0, 8)$.

2. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ - ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ - ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ

10. Να σχεδιάσετε τις γραφικές των συναρτήσεων: α) $f(x) = \sqrt{-x}$ β) $f(x) = \sqrt{|x|}$ και γ) $f(x) = \sqrt{|x-1|} + 2$

11. Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g όταν:

A. $f(x) - g(x) = x^2 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$. και B. $f(x) = g(x) + \ln(x-1)$, με $x > 0$.

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) - 2f^2(x) + 5f(x) = -e^{2x} - e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: X \in \mathbb{R} \rightarrow X \in \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $g(x) = \frac{2f^2(x) - 3f(x) + 1}{x^2 - 3x + 4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να

δείξετε ότι η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

3. ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

14. Έστω οι συναρτήσεις f, g που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$4x^2 + 3f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x) = 4xf(x) + f^2(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } f = g.$$

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2\lambda^3 - x}{x + \lambda^2 - 2\lambda}$ & $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2\lambda + \lambda^2x}{(x-1)^2}$.

Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f=g$.

4. ΣΥΝΘΕΣΗ - ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

16.Α] Έστω $(g \circ f)(x) = 12$ και $g(x) = e^{2x} - e^x$, $h(x) = \ln(x^3 + 3x)$.

A.1. Να βρεθεί η f .

A.2. Να βρεθούν τα x ώστε η γραφική της f να είναι πάνω από τη γραφική της h .

Β] Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $g(x) = e^x$ και $f(x) = \ln x$. Να λυθεί η εξίσωση: $x(g \circ f)(x) = (f \circ g)(2x^2 + x - 2)$.

17. Αν $f(f(x)) = x^2 + 2x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τον $f(2)$.

18. Να βρείτε δυο συναρτήσεις f & g τέτοιες ώστε: $(f \circ g)(x) = | \eta \mu x |$ και $(g \circ f)(x) = (\eta \mu \sqrt{x})^2$.

19. Αν $f(x) = 2x - 1$ και $f(e^{g(x)}) = 2x^2 + 3$, να βρεθεί η $g(x)$.

20. Να βρείτε τη συνάρτηση f όταν:

A. $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + 4$.

B. $(f \circ g)(x) = \frac{1-x}{1+x}$, για κάθε $x > -1$ και $g(x) = \ln(x+1)$.

21. Δίνονται η συνάρτηση και η σχέση $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + \lambda x + 4}$ και η σχέση $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 + 7x^2 + 14x + 20}, & x \leq \mu^2 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}, & x > 4\mu - 4 \end{cases}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ ώστε ο τύπος της g να είναι τύπος συνάρτησης.

Για $\mu = 2 = \lambda$

γ) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

i) $f + g$, ii) $\frac{f}{h}$ και iii) $h \circ f$, όπου h η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.

5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x \cdot \psi) = f(x) + f(\psi)$ για κάθε $x, \psi \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε

ότι: i) $f(1) = 0$ ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, $x \in (0, +\infty)$ iii) $f\left(\frac{x}{\omega}\right) = f(x) - f(\omega)$, με $x, \omega \in (0, +\infty)$.

23. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(x-y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1). Δείξτε ότι

i) $f(0) = 0$. ii) η συνάρτηση f είναι άρτια. και iii) $f(x+y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ- ΑΚΡΟΤΑΤΑ- ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

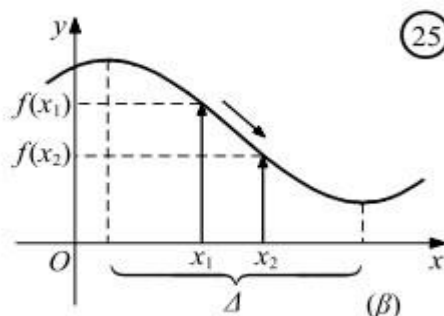
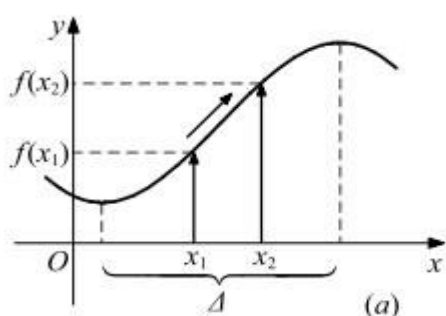
1. Μονοτονία συνάρτησης

- Οι έννοιες "γνησίως αύξουσα συνάρτηση", "γνησίως φθίνουσα συνάρτηση" είναι γνωστές από προηγούμενη τάξη. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι :

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f λέγεται ⁽¹⁾ :

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)



Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).

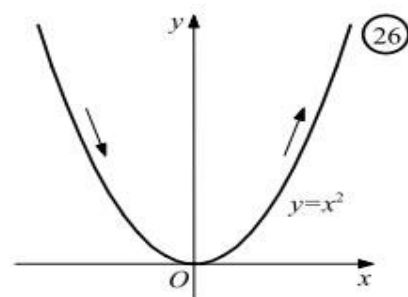
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$:

— είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, αφού για $0 \leq x_1 < x_2$

έχουμε $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$

— είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού για $x_1 < x_2 \leq 0$

έχουμε $0 \leq -x_2 < -x_1$, οπότε $0 < x_2^2 < x_1^2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ:

1. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

2. Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

(1) Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς :

- αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$
- φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$

2. Ακρότατα συνάρτησης

Οι έννοιες "μέγιστο", "ελάχιστο", συνάρτησης είναι και αυτές γνωστές από προηγούμενες τάξεις. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι :

ΟΡΙΣΜΟΣ

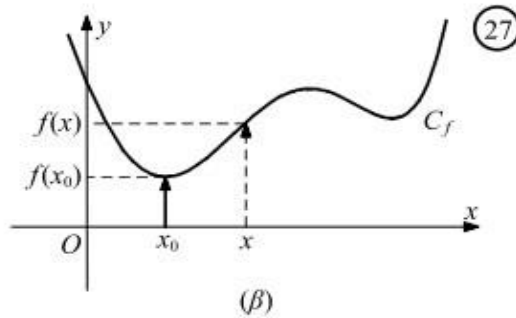
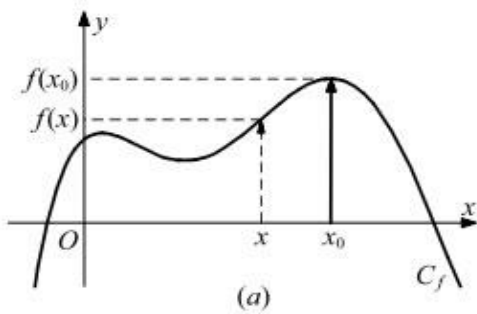
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. 27α)
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. 27β).

Κεφ.1 - Συναρτήσεις

Παράδειγματα

- Η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 1$ (Σχ. 28α) παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$, αφού $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $f(x) = |x-1|$ (Σ



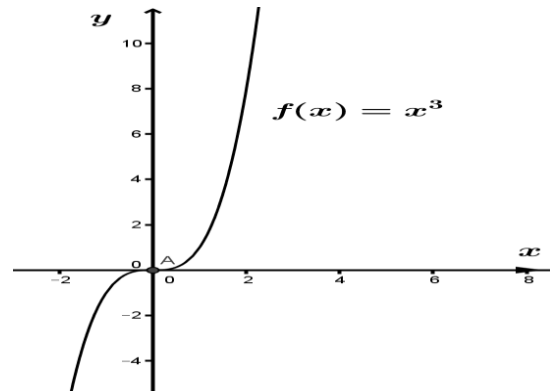
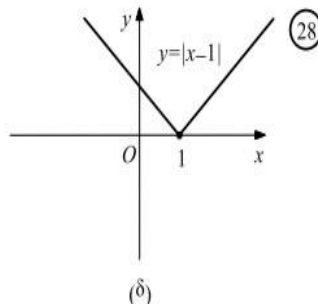
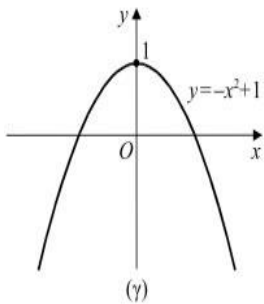
χ. 28β) παρουσιάζει

ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 0$, αφού $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

— Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ (Σχ. 29β) δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, αφού είναι γνησίως αύξουσα.

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f .



ΕΥΡΕΣΗ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f .

► Στα άκρα του A_f αν είναι κλειστό ή στα σημεία αλλαγής μονοτονίας. ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ:

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $f(A)$ οπότε :

- Αν $f(A) = [\alpha, \beta]$ τότε $f_{\min} = \alpha$ και $f_{\max} = \beta$.
- Αν $f(A) = (\alpha, \beta]$ τότε $f_{\max} = \beta$, ενώ δεν παρουσιάζει ελάχιστο.
- Αν $f(A) = [\alpha, \beta)$ τότε $f_{\min} = \alpha$, ενώ δεν παρουσιάζει μέγιστο.
- Αν $f(A) = (\alpha, \beta)$ και η f γνησίως μονότονη τότε η f δεν έχει ακρότατα στο A .

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η Αν $A = [\alpha, \beta]$ εξετάζουμε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο A . Ειδικότερα :

- Αν $f \uparrow$ στο A τότε $f_{\min} = f(\alpha)$ και $f_{\max} = f(\beta)$
- Αν $f \downarrow$ στο A τότε $f_{\min} = f(\beta)$ και $f_{\max} = f(\alpha)$

ΜΕΘΟΔΟΣ 3η : Με τη χρήση του ορισμού.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4η : ➔ Με παραγώγους στο Κεφ. 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Να βρεθούν:

i) Το πεδίο ορισμού A . ii) Το είδος της μονοτονίας και iii) Τα ακρότατα της f .

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $A = \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$.

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}}{x_1 - x_2} = \dots = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1 - x_2)(\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2})} = -\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2}} (2).$$

Έτσι έχουμε:

i) Αν $x_1, x_2 \in (-1, 0)$ τότε: η f  στο $[-1, 0]$.

ii) Αν $x_1, x_2 \in [0, 1]$ τότε: η f  στο $[0, 1]$.

iii) Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο $f_{\max}(0)=1$

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	0

3. ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ :

Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow B$ είναι ένα προς ένα (1-1) όταν: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αποδεικνύεται ότι: Αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$, τότε η f είναι «1-1».

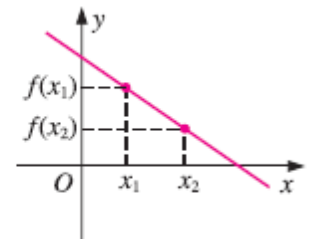
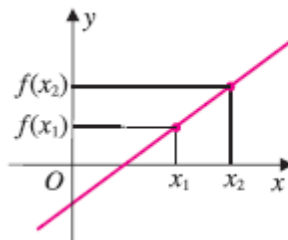
(χωρίς απόδειξη ...και τον τρόπο αυτό τον προτιμάμε)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

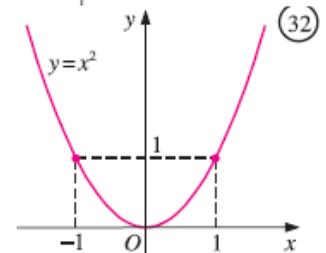
1. Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$, με $a \neq 0$ είναι συνάρτηση 1-1

,αφού, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$



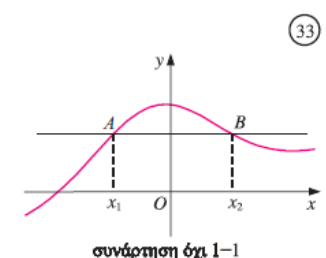
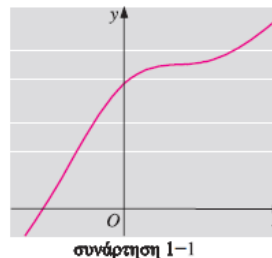
2. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ (Σχ. 32) δεν είναι συνάρτηση 1-1, αφού $f(-1) = f(1) = 1$ αν και είναι $-1 \neq 1$.



ΣΧΟΛΙΑ

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν:

- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).
- Για κάθε στοιχείο $y \in B$ του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς $x \in A$.



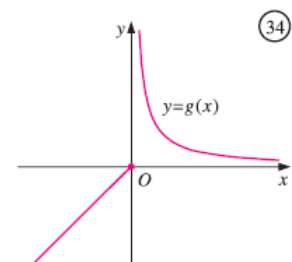
Ισχυρισμός:

«Κάθε συνάρτηση 1-1 δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη»

Απάντηση: Λάθος

Αιτιολόγηση/Αντιπαράδειγμα: Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως

μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ (Σχ. 34)



— Πράγματι η συνάρτηση g είναι «1-1» στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ενώ δεν είναι γνησίως μονότονη αφού είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

4. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ :

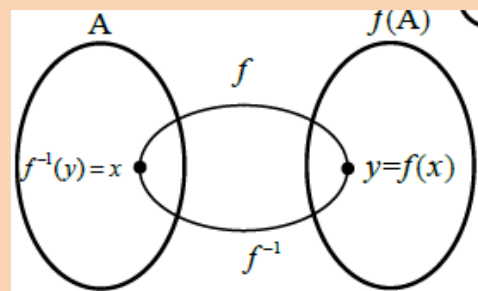
Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών $f(A)$ της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(y) = x$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$, με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Η αντίστροφη f^{-1} έχει:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού D_f της f .



Οπότε έχουμε τη

$$\text{ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ: } f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \quad \text{και} \quad f^{-1}(f(y)) = y, y \in f(A).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση 1-1 αυτή είναι με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

— έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$

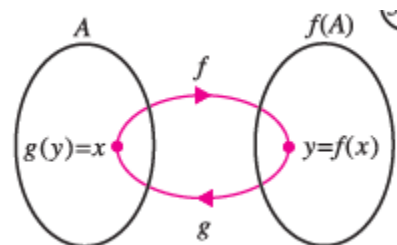
— έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και

— αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0, +\infty)$ στο μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $a^x = y$. Επειδή όμως $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$, θα είναι $f^{-1}(y) = \log_a y$.

Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$.

Συνεπώς $\log_a a^x = x$, $x \in \mathbb{R}$ και $a^{\log_a x} = x$, $x \in (0, +\infty)$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.



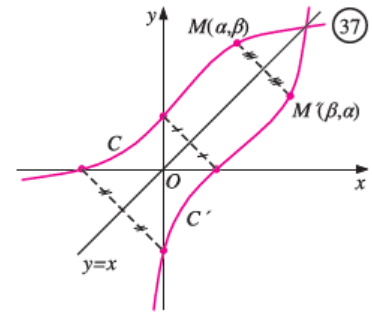
ΠΡΟΤΑΣΗ-ΘΕΩΡΗΜΑ:

Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\chi O \gamma$ και $\chi' O \gamma'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37),

Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε $f(\alpha) = \beta$. Όμως επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ από $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(\beta)$. Δηλαδή το σημείο στο σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\beta, \alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $\angle xOy$ και $\angle x'Oy'$, άρα και οι C_f , $C_{f^{-1}}$.



ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ f^{-1} ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f: A \rightarrow B$

ΒΗΜΑ 1ο: Πρέπει να δείξουμε μια από τις παρακάτω μεθόδους:

- i) f «1-1» ή
- ii) f γνησίως μονότονη ή Η εξίσωση $\psi=f(x)$ για κάθε $\psi \in B$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς $x \in A$.

ΒΗΜΑ 2ο: Λύνουμε την εξίσωση $\psi=f(x)$ ως προς $x \in A$ και στη συνέχεια $x=f^{-1}(\psi)$ αλλάζουμε τις μεταβλητές x και ψ και βρίσκουμε τον τύπο της f^{-1} .

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ –ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1). Αν για μια συνάρτηση f έχουμε :

1α) $f(A) = (-\infty, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$ τότε η $f \rightarrow$ δεν έχει ακρότατα.

1β) $f(A) = (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$ τότε η f έχει :

τοπικό μέγιστο την τιμή α και

τοπικό ελάχιστο την τιμή β .

2). Τα ολικά ακρότατα είναι και τοπικά ακρότατα. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

3). Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε είναι γνησίως μονότονη και σε κάθε υποσύνολο του. Προσοχή: Το αντίστροφο δεν ισχύει.

4). Μια συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της αν έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε όλους τους κλάδους της.

5). **ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε γνησίως μονότονη ή «1-1» συνάρτηση έχει το πολύ μια ρίζα ή $f(x)=0$.**

Γεωμετρική ερμηνεία: Η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο (ή κανένα).

6) **Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι «1-1» . $\rightarrow$ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ .**

7) Αν η συνάρτηση f δεν είναι «1-1» σε ένα υποσύνολο του A τότε δεν είναι «1-1» στο A .

8) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, τότε δεν είναι «1-1» στο A .

9) Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική, τότε δεν είναι «1-1» .

10) Για να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ & $g: B \rightarrow \mathbf{R}$ είναι αντίστροφες ή μια της άλλης εργαζόμαστε ως εξής:

i) Δείχνουμε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ (Δηλαδή ότι $A \circ f^{-1} = B = A$

& $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$).

ii) Δείχνουμε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} και ότι $g^{-1} \circ g = \text{id}_B$ (Δηλαδή ότι $A \circ g^{-1} = B = A$ & $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in B$).

iii) Δείχνουμε ότι $A = g(B)$, $f(A) = B$, $(g \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in A$ και ότι η g είναι «1-1».

iv) Δείχνουμε ότι η $A = g(B)$ & $f(A) = B$, $(f \circ g)(x) = x$, για κάθε $x \in A$ και ότι η f είναι «1-1».

11) Η αντίστροφη σχέση υπάρχει πάντα, ενώ η αντίστροφη συνάρτηση δεν υπάρχει πάντα.

12) Αν οι συναρτήσεις f & g είναι αντίστροφες τότε $A = g(B)$ & $f(A) = B$.

13) Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι και αυτή γνήσια μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου_ Θετικών Σπουδών-Οικονομίας και Πληροφορικής Κεφ.1 - Συναρτήσεις

14) Αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται τότε η f^{-1} είναι «1-1».

15) Αν f^{-1} η αντίστροφη της f , τότε: α) $(f^{-1})^{-1}=f$. β) $f(f^{-1}(x))=x$ ή $f^{-1}(f(x))=x$ και $\psi=f(x)$ τότε $f(\psi)=x$.

16) Τα διαγράμματα δυο αντίστροφων **γν. αυξουσών** συναρτήσεων είναι συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $\psi=x$ (πρώτη διχοτόμος). $\uparrow$ να αποδειχτεί.

17) Για την εύρεση των κοινών σημείων των αντιστρόφων συναρτήσεων f & f^{-1} , στην περίπτωση που το διάγραμμα της f δεν εμφανίζει συμμετρικά σημεία ως προς τον άξονα $\psi=x$, αν υπάρχουν, βρίσκονται λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} \psi = f(x) \\ \psi = f^{-1}(x) \end{cases} \quad \text{ή το σύστημα} \quad \begin{cases} \psi = f(x) \\ \psi = x \end{cases} \quad \text{ή το} \quad \begin{cases} \psi = f(x) \\ f(\psi) = x \end{cases} \quad \text{ή το σύστημα} \quad \begin{cases} \psi = f^{-1}(x) \\ \psi = x \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης: $f(x)=ax+\beta$, $a \neq 0$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει: 1). $f(x)$ να είναι «1-1». Έχω: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow ax_1 \neq ax_2 \Rightarrow ax_1 + \beta \neq ax_2 + \beta \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f(x)$, «1-1» συνάρτηση. Άρα υπάρχει η αντίστροφος συνάρτηση και είναι: $f(x)=ax+\beta \Rightarrow x = \frac{f(x) - \beta}{a}$ $a \neq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - \beta}{a}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ

1.1. ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΜΙΑ ΡΙΖΑ ΤΗΣ $f(x) = 0 \rightarrow$ προφανής ρίζα με δοκιμή

1.2. ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΜΙΑ ΡΙΖΑ ΤΗΣ $f(x) = 0 \rightarrow$ Αρκεί να δείξω ότι $0 \in f(A)$

1.3. ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ ΤΗΣ $f(x) = 0 \rightarrow$ Αρκεί να δείξω ότι i) $0 \in f(A)$ και ii) f γνησίως μονότονη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - 1$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

B. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

Λύση

A. Πρέπει $x > 0$, άρα $A = (0, +\infty)$.

B. Είναι $y=f(x) \Rightarrow y = \ln x - 1 \Rightarrow y + 1 = \ln x \Rightarrow x = e^{y+1}$ (1).

Όμως $x > 0 \Rightarrow e^{y+1} > 0$, ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα $f(A) = (-\infty, +\infty)$.

Γ. Για να έχει η εξίσωση $f(x) = 0$ μοναδική λύση πρέπει:

- ο αριθμός 0 στο σύνολο τιμών της, που ισχύει αφού $0 \in (-\infty, +\infty)$ και
- η f είναι γνησίως αύξουσα (???να δειχτεί) μόνο σε όλο το $A = (0, +\infty)$, άρα γνησίως μονότονη και έτσι έχει μοναδική ρίζα η $f(x) = 0$.

2.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Μέθοδος:

Σε τέτοιου είδους ασκήσεις στηρίζομαστε στο εξής: Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη τότε «1 - 1».

Δηλαδή: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x + x^3$.

(α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

(β) Να λυθεί η εξίσωση: $e^{\lambda^2-1} - e^{3\lambda^2-9} = -(\lambda^2-1)^3 + (3\lambda^2-9)^3$ (1)

Λύση

α) Επειδή $e^x > 0$ και $3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in A_f = \mathbb{R}$.

Με $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1). Με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ (2).

→ Προσθέτω κατά μέλη (1), (2) $\Rightarrow e^{x_1} + x_1^3 < e^{x_2} + x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$ η f είναι γν. αύξουσα.

β) Η (1) γίνεται $e^{\lambda^2-1} + (\lambda^2-1)^3 = e^{3\lambda^2-9} + (3\lambda^2-9)^3$ η οποία με $x = \lambda^2-1$ και

$3\lambda^2-9$ γίνεται $f(\lambda^2-1) = f(3\lambda^2-9) \Leftrightarrow \lambda^2-1 = 3\lambda^2-9 \Leftrightarrow 2\lambda^2=8 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

* Η ισοδυναμία ισχύει γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1».

3. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ: →Μορφή: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \dots$

Μέθοδος: Σε τέτοιες ασκήσεις συνήθως ζητείται η μελέτη ως προς τη μονοτονία μιας συνάρτησης και σε δεύτερο ερώτημα ζητείται η απόδειξη μιας ανισότητας που προκύπτει σαν εφαρμογή- χρήση του ορισμού της μονοτονίας.

► Όμοια για $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \dots$

Σημείωση: Αν δεν δίνεται συνάρτηση και ζητείται να αποδειχθεί μόνο μια μόνιμη ανισότητα, κάνουμε εμείς κατάλληλη συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

A. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

B. Να λυθεί η ανίσωση: $(3^{x-1} + 4^{x-1}) \cdot 5^{2x-1} < (3^{2x-1} + 4^{2x-1}) \cdot 5^{x-1}$ (1)

Λύση

A. Οι $\left(\frac{3}{4}\right)^x$ και $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ είναι εκθετικές με βάσεις < 1 (γν. φθίνουσα) άρα με

$x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}$ και $x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}$. Προσθέτω κατά μέλη και έχω:

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Η (1) γίνεται: $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow f(x-1) < f(2x-1) \Leftrightarrow$

*αφού f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ είναι $x-1 > 2x-1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 0}$

4. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΟ:

4.1. →Μορφή: $f(x) \geq k \rightarrow$ βγάζουμε το k ολικό ελάχιστο της f και κάνουμε χρήση του ορισμού του ο.ε.

4.2. →Μορφή: $f(x) \leq k \rightarrow$ βγάζουμε το k ολικό μέγιστο της f και κάνουμε χρήση του ορισμού του ο.μ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

A. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^2$ στο διάστημα $(0, e]$

B. Να δείξετε ότι $\ln x + x^2 - 1 \leq e^2$, για κάθε $x \in (0, e]$

Λύση

A. Το πεδίο ορισμού είναι $A_f = (0, e]$ στο οποίο έχουμε:

$\ln x \uparrow$

• Με $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ (1)

- $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$ (2). Προσθέτω κατά μέλη τις (1),(2) Με
 $x_1 < x_2 \xrightarrow{\ell n \uparrow} \ell n x_1 + x_1^2 < \ell n x_2 + x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα, η f γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$.
- Στο $x_0 = e$ έχει ολικό μέγιστο $f(e) = 1 + e^2$
- B. $f(e) = 1 + e^2$ ολικό μέγιστο άρα $f(x) \leq f(e) \Rightarrow \ell n x + x^2 \leq 1 + e^2 \Rightarrow \ell n x + x^2 - 1 \leq e^2$, για κάθε $x \in (0, e]$.

- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ -

1. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ -ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$, με $x \in (-1, +\infty)$.
- A. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.
 - B. . Να αποδείξετε ότι η γραφική της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
 - Γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) = 1$.
 - Δ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x+3}{x^2+1}$.
25. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f(x))^3 + 2f(x) = x^3 + 5x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 - B. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3 - 1) > f(x - 1)$.
26. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = e^x + x - 1$
- A. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία στο $\mathbb{R}$.
 - B. Να δείξετε ότι έχει μία μόνο ρίζα και ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $g(x) > 0$ $x \in (0, +\infty)$.
27. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λύσετε τις ανισώσεις:
- A. $f(5x+1) > f(5x)$, αν $g(3) = 0$
 - B. $f(x^2 + 3x + 2) > f(x(x+3)+1) - 1$, αν $f(2) = f(1) - 1$
 - Γ. $f(x^3 + 1) + f(x^2) < f(x^2 + 1) + f(x^3)$

2. ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ «1-1» -ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ -ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ-ΑΝΙΣΩΣΗΣ

28. Δίνονται οι συναρτήσεις g: $[1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
- και h: $[1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
- A. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.
- Για τα παρακάτω ερώτημα να θεωρήσετε ότι $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ και $r(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$
- B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1} = f$, όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f.
 - Γ. Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.
29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$, με $x \in \mathbb{R}$.
- i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.
 - ii) Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η ισότητα: $e^{-(\lambda^2-4)} - e^{-(\lambda-2)} = -\lambda^2 + 4 - (\lambda - 2)$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^5 + x - 1$. Ναδειχθεί ότι:
- i) Η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - ii) Η f είναι «1-1».
 - iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$. (Ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$).
 - iv) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(-1) = x$.
 - v) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x+9) > x$.
31. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^5 + x - 2$.
- i) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2) = x$.
 - ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(5x+6) < 1$.
32. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 - 1$.
- i) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_φ και $C_{\varphi^{-1}}$.
 - ii) Να λυθεί η ανίσωση $\varphi^{-1}(x) > -3$.
 - iii) Να λυθεί η εξίσωση $\varphi^{-1}(x) = 0$.
33. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η α διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(1,2)$, να λυθεί η εξίσωση $f(f(e^x-2)-2)=2$ και η ανίσωση $f^{-1}(\ln x + 1) > -1$.
34. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f^3(x) + f(x) - e^x - x + 1 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- A. Να βρείτε τη μονοτονία της f .
 - B. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
 - Γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f^3(x) + f(x)) = 0$.
35. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^2 - 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $(0, +\infty)$.
 - B. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.
 - Γ. Να λύσετε την ανίσωση $\ln 2x - (x+1)^2 > \ln(x+1) - 4x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.
36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$ & $g: B \rightarrow A$. Δείξτε ότι:
- i) Αν $(g \circ f)(x) = x$ τότε η f είναι «1-1»
 - ii) Αν $(g \circ f)(x) = x$ τότε: $g = f^{-1}$.
 - iii) Αν $(g \circ f)(x) = x$ και g «1-1», τότε: $f = g^{-1}$.
37. Θεωρούμε τις «1-1» συναρτήσεις f και g ορισμένες στα A και B αντίστοιχα και για τις οποίες υπάρχει η $g \circ f$. A) Να δείξετε ότι η $g \circ f$ είναι «1-1» και B) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.
- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A .
 - ii) Να εξεταστεί αν είναι άρτια ή περιττή.
 - iii) Να βρεθεί αν υπάρχει η αντίστροφη f^{-1} .
39. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow [0, +\infty)$, με $f(x) = \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right)$.
- i) Ναδειχθεί ότι: $A = [0,1)$
 - ii) Ναδειχθεί ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και να βρεθεί.
40. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ & $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x+1$.
- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
 - ii) Ναδειχθεί ότι η f είναι περιττή.

iii) Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

iv) Να βρεθεί η συνάρτηση $g \circ f^{-1}$

41. Δίνεται η «επί» συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} (x-2) + \beta, & \text{για κάθε } x \in [2, +\infty) \\ \lambda(x-2) + \beta, & \text{για κάθε } x \in (-\infty, 2) \end{cases}$.

Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε να υπάρχει η αντίστροφη της και να βρεθεί.

42. Έστω οι γνήσιες φθίνουσες συναρτήσεις $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ & $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbf{R}$ να

ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$. Δείξτε ότι:

i) Η σύνθεση $f \circ g$ και το γινόμενο $f \cdot g$ είναι γνησίως μονότονες συναρτήσεις.

ii) Η εξίσωση $f(g(x)) = f(x) \cdot g(x)$ έχει το πολύ μια πραγματική λύση.

43. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ και $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 8x + 7) = f(x - 1)$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbf{R}$.

α] Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1» β] Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, $x \in \mathbf{R}$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Να δειχτεί ότι: i) η f αντιστρέφεται ii) $f^{-1}(x) = -f(x)$ iii) η f είναι περιττή iv) $f(0) = 0$.

46. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ με $x \in [1, +\infty)$. Να δείξετε ότι είναι 1-1.

β) Να βρεθεί ο $f^{-1}(\frac{4}{5})$.

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών των f και f^{-1}

47. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $(f(x))^3 + 3f(x) + 2002 - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β. Να βρεθεί η αντίστροφη της

48. α. Δίνεται η '1-1' συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Να δειχτεί ότι η $g(x) = f(\ln x + 2) + 1$ είναι '1-1' και να βρεθεί η g^{-1} .

β. Αν η c διέρχεται από το $A(2, 1)$, να λυθεί $g^{-1}(x) = 1$.

49. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε: $e^{f(x)} + f(x) - x = 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $f(A) = \mathbf{R}$.

A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να βρείτε την f^{-1} .

Γ. Να βρείτε το $f(0)$.

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-2} < 3 - x^2$.

E. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

50. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε: $e^{f(x)} + f(x) = x + 2$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f\left(\frac{e}{x}\right)$

Γ. Να βρείτε την f^{-1}

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $(x^3 - 8)(e^x - 3) < f(-1)$.

51. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = kx + \ln(e^x + 1) - 1$, για κάθε $k > 0$ και $g(x) = f(x) - x$.

A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Αν $f^{-1}(\ln 6 - 1) = \ln 2$, να βρεθεί ο αριθμός k .

Γ. Για $k = -1$, να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} .

Δ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική της g^{-1} βρίσκεται κάτω από τον x' άξονα.

E. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) - f(x) = 0$.

52. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι η $f \circ g$ είναι «1-1».

A. Να δείξετε ότι η g είναι «1-1».

B. Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x) + x^3 + x) = g(f(x) - \ln x + 2)$

Γ. Αν το σύνολο τιμών της g είναι το $(0, +\infty)$ να δείχτεί ότι η εξίσωση $ae^{g(x)} = 1$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $a \in (0, 1)$.

53. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε: $f(e^x - 1) = x - e^{-x} + 1$, για κάθε $x > -1$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση g με $A_g = \mathbb{R}$ και $g(A) = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$(g^2(x) - g(x) + 1) \cdot \ln g(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να δείξετε ότι η $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + 1$, $x > -1$.

B. Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)} - 1 > 0$.

Γ. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} .

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x)) = 1$.

54. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και για την συνάρτηση f ισχύει: $(f \circ f)(x) = x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».

B. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Γ. Αν ισχύει: $f(g(e^x) - 2x + 3) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την συνάρτηση g .

55. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $e^{f(x)} - e^{1+\ln x} = 1 + \ln x - f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να

δείξετε ότι $f(x) = 1 + \ln x$, $x > 0$.

Γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x + 2) = 0$.

56. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x - 2 + \ln x$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

B. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = 0$.

57. A. Δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f .

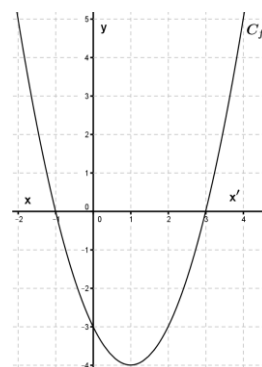
A.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f και το σύνολο τιμών $f(A)$.

A.2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

A.3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

B. Να κάνετε το ίδιο για τη συνάρτηση $-f$.

Γ. Όμοια και για την συνάρτηση $|f|$.



58. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,4)$ $B(6,-2)$.

1. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να δείξετε ότι και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(-3 + f^{-1}(|x| - 5)) < 4$.

4. Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(f(x^2 + 2) + 6) = 3$.

59. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x+1) + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x+1) - f(4) = f(5) - f(2x)$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει: $f(a) + f(3a+1) > f(2a) + f(4a+1)$.