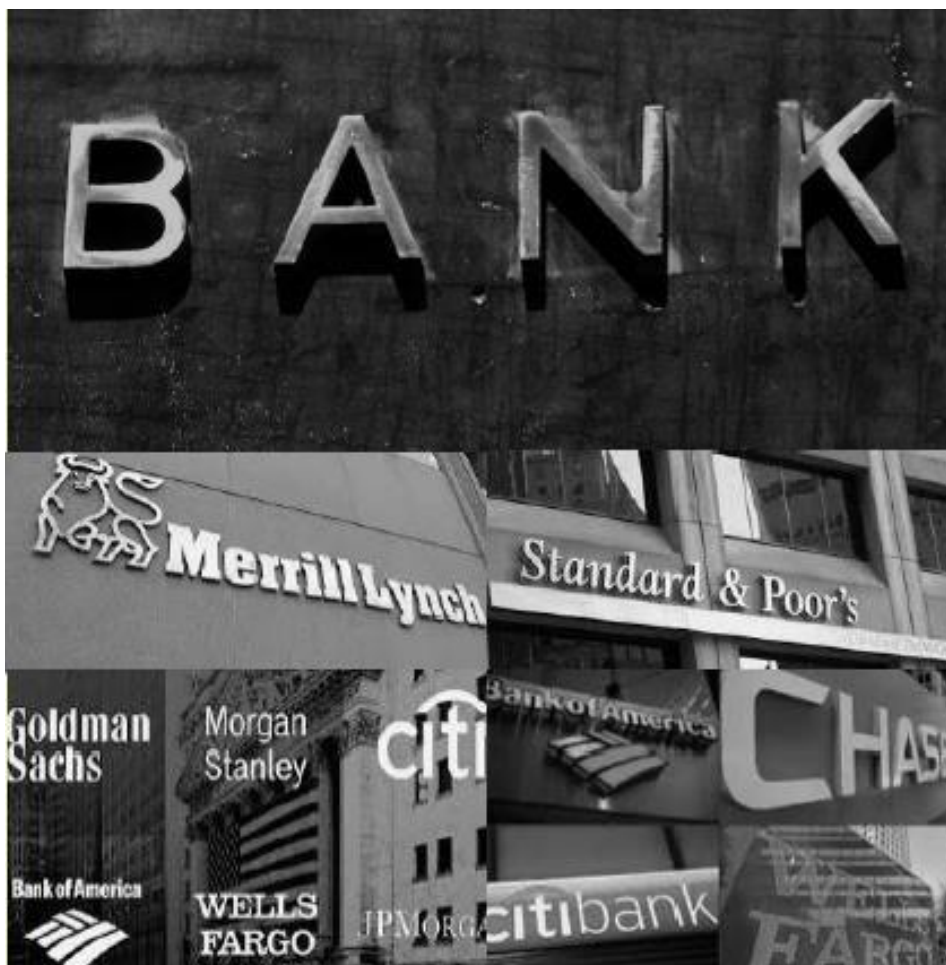


01-09-2024

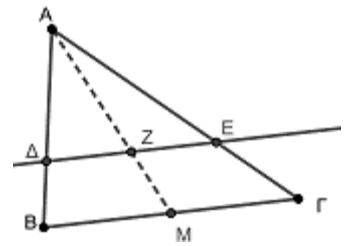


Χρήστος Ι. Κωστόπουλος

μαθηματικός

ΚΕΦ. 7**7.7 ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ**

ΑΣΚΗΣΗ1/ΘΕΜΑ2-14534. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$ και $AG=9$ και AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Z εσωτερικό της AM ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Z φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{AG} = 2$

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων AD και GE .

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ2/ΘΕΜΑ 2-14579. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και AG αντίστοιχα, ώστε η DE να είναι παράλληλη στην AG . Επίσης $AB = 3AD$.

α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{BD}{AD}$ και $\frac{BE}{EG}$. (Μονάδες 15)

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AG = 3,9$ και $GE = 1,3$ να αποδείξετε ότι η ZE είναι παράλληλη της AB . (Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ3/ΘΕΜΑ 2-15830. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το AD είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά $B\Gamma$ σε ένα άλλο σημείο της M τέμνει την AG στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{AE}{EG}$

(Μονάδες 10)

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MD}{MT}$

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ4/ΘΕΜΑ 2-15831. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, το M είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο του MB . Από το M φέρνουμε παράλληλη στην AD , που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 5/ΘΕΜΑ 2-21987. Οι ευθείες $\Gamma\Theta$ και $Z\eta$ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 στα σημεία Θ , A , B και H , Δ , E αντίστοιχα και την ευθεία ε_4 στα σημεία Γ και Z όπως στο παρακάτω σχήμα. Επίσης δίνονται τα μήκη $\Theta A = 2$, $AB = 1$, $B\Gamma = H\Delta = 4$ και $EZ = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $DE = 2$.

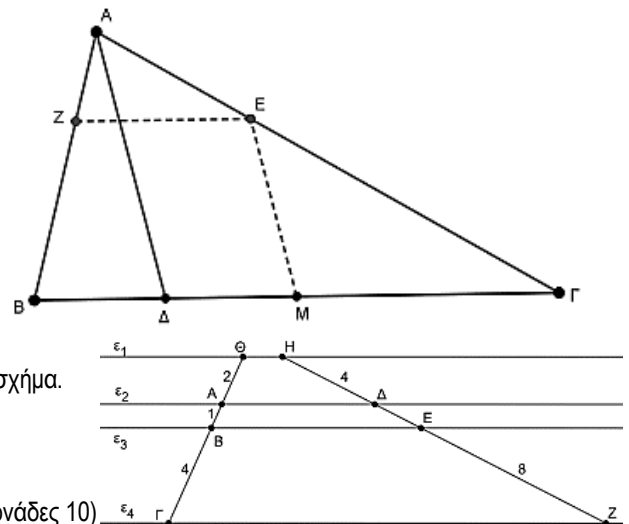
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_4 είναι παράλληλη στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3

(Μονάδες 05)

γ) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘZ το οποίο τέμνει την ευθεία ε_2 στο K και την ευθεία ε_3 στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο

$\frac{\Lambda Z}{K\Lambda}$. (Μονάδες 10)

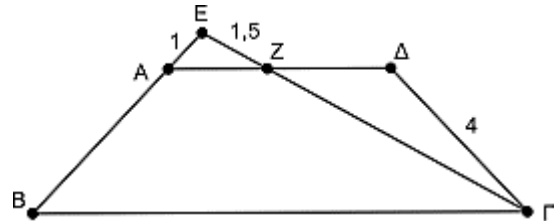


ΑΣΚΗΣΗ 6/ ΘΕΜΑ 2-22132. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB = ΓΔ = 4$ και με βάσεις ΑΔ και ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $EA = 1$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ζ και $EZ = 1,5$.

α) Να αποδείξετε ότι $ZΓ = 1,5AB$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΖΓ. (Μονάδες 05)

γ) Αν επιπλέον $ΒΓ = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΖ του τριγώνου ΕΑΖ. (Μονάδες 10)



ΚΕΦ. 8- ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 7/ ΘΕΜΑ 2-14535. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $AB = 9$, $ΑΓ = 15$ και $\hat{A} = 48^\circ$, $ZΔ = 12$, $ZE = 20$ και $\hat{Z} = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

ΑΣΚΗΣΗ 8/ ΘΕΜΑ 2-14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ ($AB = ΑΓ$) και ΕΔΖ ($ΕΔ = ΕΖ$) γνωρίζουμε ότι:

$\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{Z} = 66^\circ$ και $AB = 3ΕΔ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων. (Μονάδες 12)

ΑΣΚΗΣΗ 9/ ΘΕΜΑ 2-14537. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{B} = 53^\circ$, $\hat{E} = 79^\circ$, $\hat{Z} = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων. (Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ 10/ ΘΕΜΑ 2-14538. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε $ΑΓ = 2ΓΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων; (Μονάδες 12)

ΑΣΚΗΣΗ 11/ ΘΕΜΑ 2-14546. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε $AB = 2ΔΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων; (Μονάδες 12)

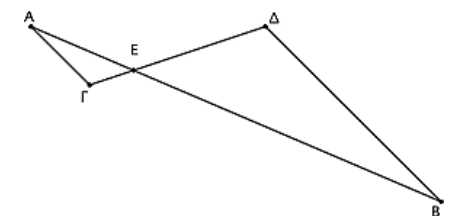
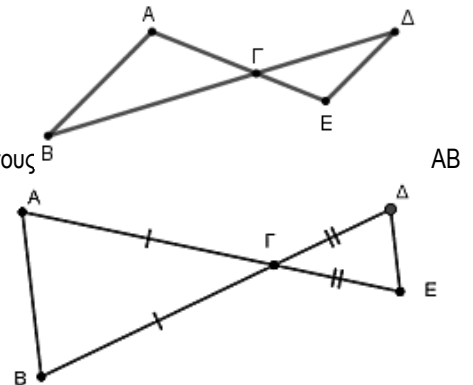
ΑΣΚΗΣΗ 12/ ΘΕΜΑ 2-16100. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι $AE = 5$, $ΑΓ = 4$, $ΕΓ = 2$, $ΔΕ = 6$, $BE = 15$ και $BD = 12$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{BD}{AG}$, $\frac{AE}{EG}$, $\frac{BE}{AE}$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

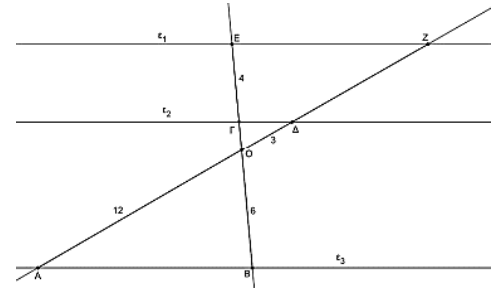
$\hat{A} = \dots$, $\hat{Γ} = \dots$ και $\hat{AΕΓ} = \dots$ (Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 13/ ΘΕΜΑ 2-16086. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\hat{Z} = 48^\circ$ είναι παράλληλες. Δίνονται ότι $GE = 4$, $OD = 3$,

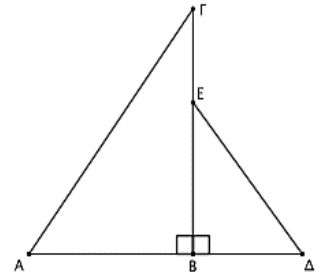
$OA = 12$, $OB = 6$.

- α) Να υπολογίσετε τα τμήματα OG και DZ . (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEZ και OBA είναι όμοια. (Μονάδες 09)
 γ) Αν $OG = 1.5$ και $DZ = 8$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$. (Μονάδες 06)



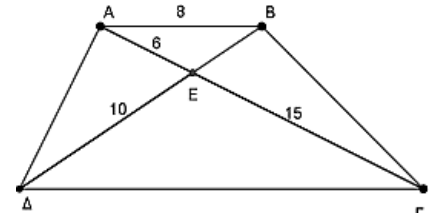
ΑΣΚΗΣΗ 14/ ΘΕΜΑ 2-16099. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $AG = 36$, $BD = 16$ και $ED = 24$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και ΔBE είναι όμοια. (Μονάδες 15)
 β) Να υπολογίσετε την πλευρά AB . (Μονάδες 10)



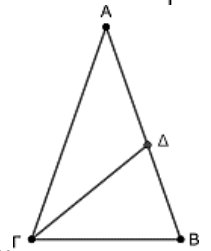
ΑΣΚΗΣΗ 15/ ΘΕΜΑ 2-16113. Δίνεται το τραπέζιο $ABGD$ με $AB \parallel DG$, E σημείο τομής των διαγωνίων, $AE = 6$, $AB = 8$, $GE = 15$ και $DE = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και GED είναι όμοια. (Μονάδες 09)
 β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 09)
 γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και GD . (Μονάδες 07)



ΑΣΚΗΣΗ 16/ ΘΕΜΑ 2-16126. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές με $AB = AG = 36$ και $BG = 24$. Το σημείο της Δ πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $BD = 16$.

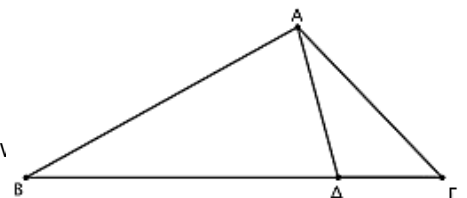
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και ΓBD είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$. (Μονάδες 13)
 β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος GD . (Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ 17/ ΘΕΜΑ 2-16755. Θεωρούμε τρίγωνο ABG με $BG = 2AG$ και σημείο Δ στην πλευρά BG τέτοιο ώστε $AG = 2GD$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

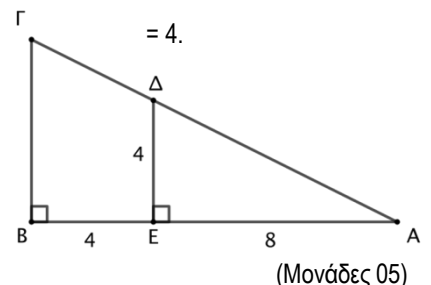
- α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{BG}{AG}$ και $\frac{AG}{GD}$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και ΔAG είναι όμοια. (Μονάδες 9)
 γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ABG και ΔAG και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$\hat{BAG} = \dots\dots\dots$, $\hat{B} = \dots\dots\dots$
 (Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 18/ ΘΕΜΑ 2-21350. Στο σχήμα δίνονται ότι $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, $AE = 8$, $EB = 4$ και DE

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AED και ABG είναι όμοια. (Μονάδες 10)
 β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων AED και ABG . (Μονάδες 10)
 γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς BG . (Μονάδες 05)



ΑΣΚΗΣΗ 19/ ΘΕΜΑ 2-21986. Στις πλευρές AB και AG τριγώνου ABΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΒΓ και $AD = 1$, όπως στο σχήμα.

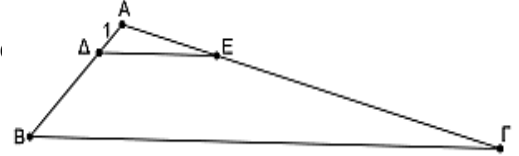
α) Να αποδείξετε ότι $AE \cdot BD = GE$.

β) Αν επιπλέον $BD = AE$ και $GE = 9$:

i) Να αποδείξετε ότι $BD = 3$ και $AB = 4$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 10)



(Μονάδες 10)

(Μονάδες 05)

ΑΣΚΗΣΗ 20/ΘΕΜΑ 4-14499. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{B\Delta}{\dots}$

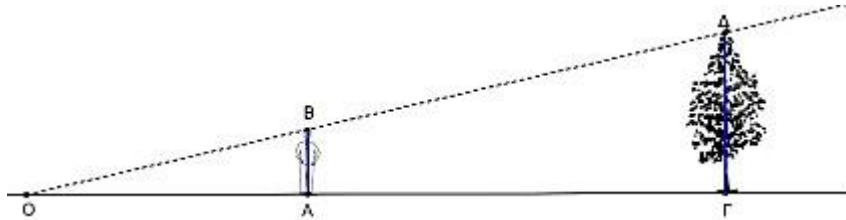
ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{GE}{\dots} = \frac{\dots}{GA}$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ 21/ ΘΕΜΑ 4-22102. Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστούν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.



α) i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 12)

ii) Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

(Μονάδες 8)
ημέρας;

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

(Μονάδες 5)

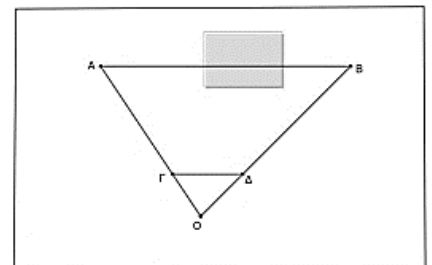
ΑΣΚΗΣΗ 22/ ΘΕΜΑ 4-22565. Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν $OA = 20m$ και $OB = 30m$. Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $OG = 2m$ και $OD = 3m$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ, (Μονάδες 8)

ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ. Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



9.2. Πυθαγόρειο Θεώρημα**ΑΣΚΗΣΗ 23/ ΘΕΜΑ 2/16805.**

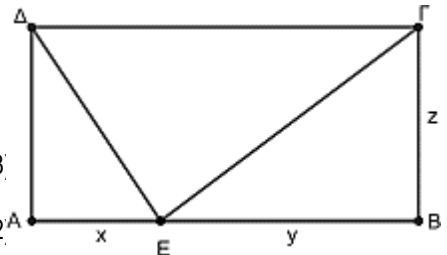
Η περίμετρος του ορθογώνιου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 8, y = 16$ και $z = 12$.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

(Μονάδες 13)

(Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ 24/ ΘΕΜΑ 2/16757.**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ και $AG = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $AD = 4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

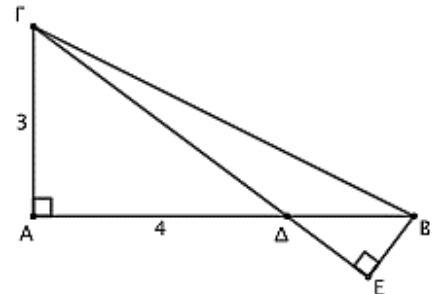
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ 25/ ΘΕΜΑ- 2/17342.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $BG = 7$, $\angle G = 45^\circ$ και ύψος $AD = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $GD = 4$.

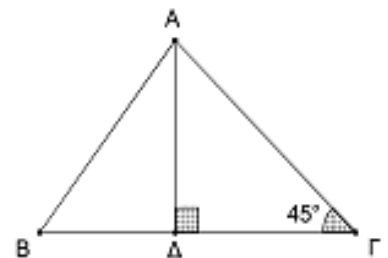
(Μονάδες 5)

ii. $AG = 4\sqrt{2}$

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ 26/ ΘΕΜΑ- 2/21067.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AG = 12$ και $AB = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $BG = 13$.

(Μονάδες 08)

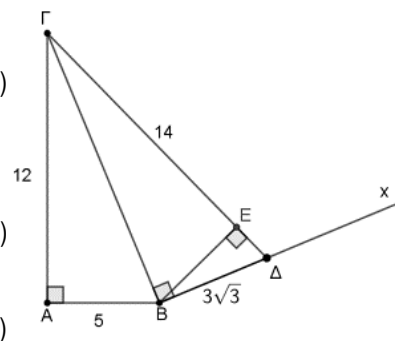
β) Φέρουμε ημιευθεία Βχ κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε $DG = 14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $BD = 3\sqrt{3}$.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ.

(Μονάδες 09)

**ΑΣΚΗΣΗ 27/ ΘΕΜΑ- 2/ 22130.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\hat{A} = 90^\circ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $BG = \alpha$, $AG = \beta$ και $AB = \gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 2R$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$.

(Μονάδες 13)

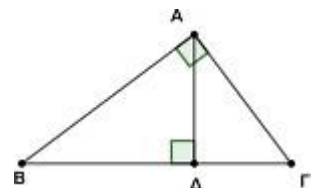
ΑΣΚΗΣΗ 28/ ΘΕΜΑ- 2/ 22514. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\hat{A} = 90^\circ$ με $BG = 5$ και $AB = 4$. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 9)

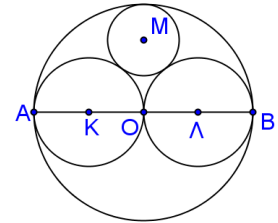
β) την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος ΑΔ.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 29 / ΘΕΜΑ- 4/ 14500. Δύο ίσοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Στον διπλανό πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες. (Μονάδες 06)

Στήλη Α	Στήλη Β
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση. (Μονάδες 06)

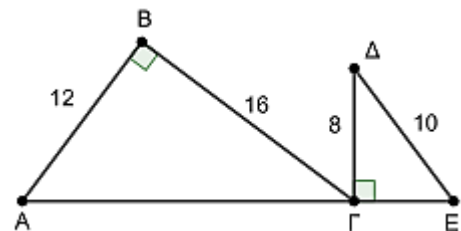
γ) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ. (Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ 30 / ΘΕΜΑ- 4/16133. Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα και έχουν μήκη αντίστοιχα και, οι γωνίες και είναι ορθές και τα σημεία και ανήκουν στην ίδια ευθεία.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια.

(Μονάδες 7)



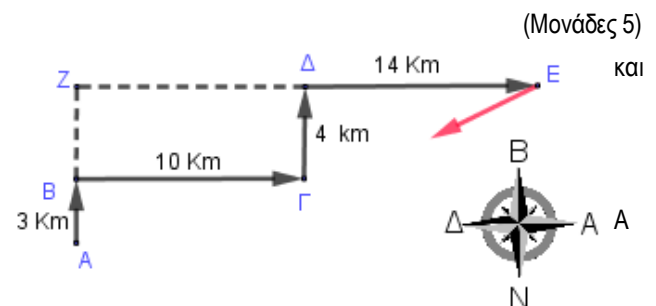
γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ είναι το Ζ και ΣΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΖΑΕ από την κορυφή του. Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$,

ii. $\frac{BG}{AG}$

(Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ 31 / ΘΕΜΑ- 4/14533. Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Β κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

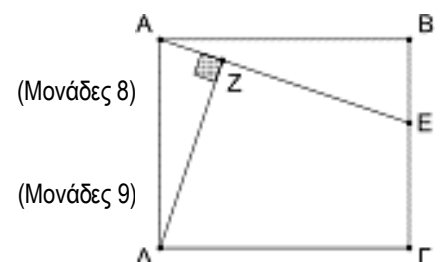
β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

ΑΣΚΗΣΗ 32 / ΘΕΜΑ- 4/17348. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το σημείο Ε της πλευράς ΒΓ, ώστε $BE = 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

γ) Αν $DZ = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ.



(Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 33 / ΘΕΜΑ- 4/21149. Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε

$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

Την ακτίνα R .

Το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

(Μονάδες 16)

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$ τέτοιό ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔA εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΗ 47/ΘΕΜΑ Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $AB=5$, $A\Gamma=12$ και $B\Gamma=13$.

α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ. Να υπολογίσετε το ύψος u_a του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 47/ΘΕΜΑ

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (του παρακάτω σχήματος) με κάθετες πλευρές $AB=40$, $A\Gamma=30$ και ότι AD είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου. Να βρείτε :

A. τη πλευρά $B\Gamma$

B. το μήκος του ύψους AD

Γ. το μήκος της προβολής της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην υποτείνουσα $B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 48/ΘΕΜΑ

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος AD και το Δ βρίσκεται μεταξύ των B και Γ . Αν ισχύει $AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 49/ΘΕΜΑ

Οι προβολές των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου πάνω στην υποτείνουσα είναι 3 και 12 cm. Να βρεθούν :

A. το ύψος από την ορθή γωνία

B. οι κάθετες πλευρές του τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ 50/ΘΕΜΑ

Οι προβολές των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου πάνω στην υποτείνουσα είναι 3 cm και 12 cm. Να βρεθούν:

1. το ύψος από την ορθή γωνία

2. κάθετες πλευρές του τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ 51/ΘΕΜΑ

Δίνεται ένα ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB=4$, $AD=3$, και $B\Gamma=5$.

α. Να υπολογιστεί η προβολή της $B\Gamma$ πάνω στην $\Delta\Gamma$

β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$

γ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 52/ΘΕΜΑ

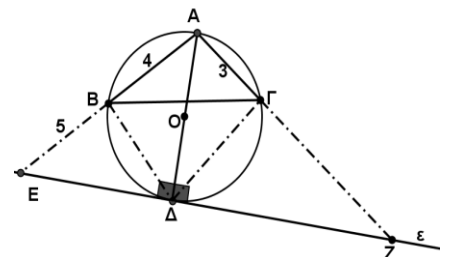
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με AD διάμετρο.

Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις προεκτάσεις των AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα και επιπλέον $AB=4$, $BE=5$ και $A\Gamma=3$, να βρεθούν:

A. Το μήκος του τμήματος AD

B. Το μήκος του τμήματος ΓZ

Γ. Το μήκος του τμήματος ΔZ



ΑΣΚΗΣΗ 53/ΘΕΜΑ

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Η προέκταση της διχοτόμου AD του τριγώνου, τέμνει τον κύκλο στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $EA\Gamma$ είναι όμοια. β) $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE}$ γ) $AD^2 = AB \cdot A\Gamma - AD \cdot$

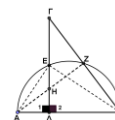
ΑΣΚΗΣΗ 54/ΘΕΜΑ

Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου $AB=13$. Από σημείο Δ της διαμέτρου τέτοιο ώστε $\Delta A=4$ υψώνουμε $\Delta\Gamma \perp AB$. Έστω E, Z τα σημεία τομής του κύκλου με τις $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα. Αν H το σημείο τομής της AZ με την $\Gamma\Delta$ και $\Gamma B=15$, να υπολογιστούν:

A. το μήκος της $\Gamma\Delta$

B. το μήκος της ΔH , αφού πρώτα δείξετε ότι τα τρίγωνα ΔAH και $\Delta B\Gamma$ είναι όμοια

Γ. το μήκος της $E\Delta$

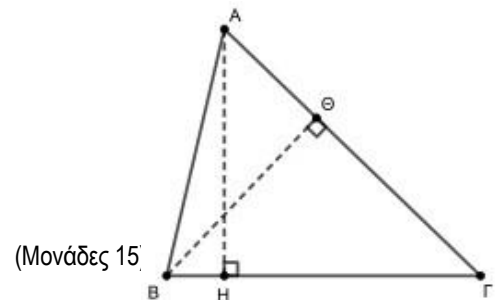


ΑΣΚΗΣΗ 55/ΘΕΜΑ

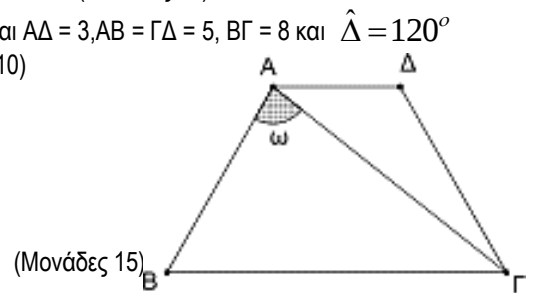
Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με AD το ύψος ισχύει: $AD^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$, να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

9.4. Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος**ΑΣΚΗΣΗ 56/ΘΕΜΑ 2/ 14549.** Τα μήκη των πλευρών α , β , γ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι : $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)**ΑΣΚΗΣΗ 57/ΘΕΜΑ 2/ 16080.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$, $B\Gamma = \sqrt{41}$ και $A\Gamma = 8$.α) Να σχεδιάσετε την προβολή $A\Delta$, της AB στην $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)β) Αν $A\Delta = 3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$. (Μονάδες 12)**ΑΣΚΗΣΗ 58/ΘΕΜΑ 2/ 16101.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $A\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 11$.α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην AB και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 15)**ΑΣΚΗΣΗ 59/ΘΕΜΑ 2/16804.** Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα όψη του AH και $B\Theta$.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή την πλευράς $B\Gamma$ στην πλευρά $A\Gamma$ είναι το τμήμαii. Η προβολή τη πλευράς AB στην πλευρά $B\Gamma$ είναι το τμήμαiii. Το τμήμα $H\Gamma$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευράiv. Το τμήμα $A\Theta$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευράv. $A\Gamma^2 = AB^2 + \dots - 2B\Gamma \square \dots$ vi. $\dots B\Gamma^2 = \dots + A\Gamma^2 - 2 \dots \square A\Theta$ β) Αν $AB = 4$, $B\Gamma = 5$ και $A\Gamma = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Theta$. (Μονάδες 15)

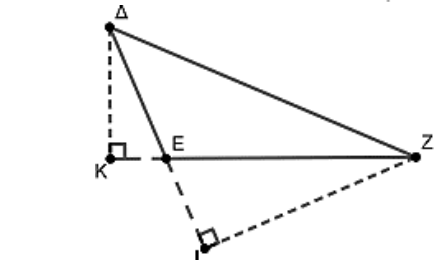
(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ 60/ΘΕΜΑ 2 /17343. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι $A\Delta = 3$, $AB = \Gamma\Delta = 5$, $B\Gamma = 8$ και $\hat{A} = 120^\circ$ α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 7$. (Μονάδες 10)β) Να αποδείξετε ότι $\sin \omega = \frac{1}{7}$, όπου $\hat{\omega} = B\hat{A}\Gamma$.[Δίνεται ότι $\sin 120^\circ \sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$].

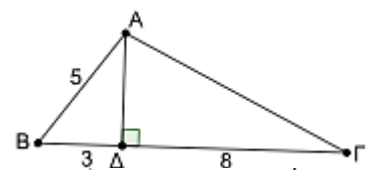
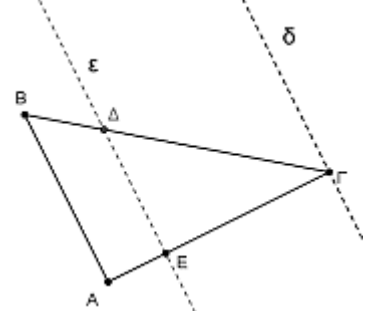
(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 61/ΘΕΜΑ 2/ 17354. Στα παρακάτω τρίγωνο ΔEZ φέρουμε τα όψη του ΔK και ZI .

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔE στην πλευρά EZ είναι το τμήμαii. Η προβολή της πλευράς ΔZ στην πλευρά EZ είναι το τμήμαiii. Το τμήμα ΔI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευράiv. Το τμήμα EI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευράv. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2EZ \square \dots$ vi. $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \dots \square \Delta I$ (Μονάδες 15)β) Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔI .**ΑΣΚΗΣΗ 62/ΘΕΜΑ 2/21302.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$ και $A\Delta$ το ύψος του από την κορυφή A . Αν $B\Delta = 3$ και $\Gamma\Delta = 8$ να αποδείξετε ότι:α) $A\Delta = 4$. (Μονάδες 07)β) $A\Gamma = \sqrt{80}$. (Μονάδες 08)γ) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ 63/ΘΕΜΑ 2/22248.** Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 9$, $\Gamma A = 12$ και $\Gamma B = 15$ και ευθείες ϵ , δ παράλληλες στην AB , όπως αυτές του σχήματος.α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτεινούσά του. (Μονάδες 8)β) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τις πλευρές ΓA , ΓB σε σημεία E και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $EA = 4$ και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ , τότε να υπολογίσετε:i. το τμήμα ΔB , (Μονάδες 8)ii. τις πλευρές του τριγώνου $\Delta E\Gamma$. (Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ 64/ΘΕΜΑ 2/22512. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με BΓ = 4, AΓ = 2 και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά AB.

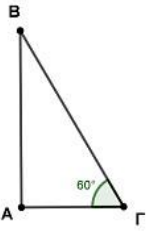
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 65/ΘΕΜΑ 4/ 21185. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 66/ΘΕΜΑ 4 / 22400. Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ABΓ. Δίνεται ότι AB=9, AΓ = 12, AΔ = 4 και AE=3.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ABΓ είναι BΓ = 15 (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

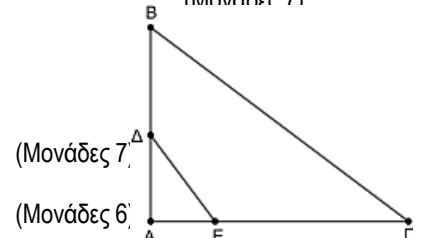
i) Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

ii) ΔΕ = 5.

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ABΓ είναι BΓ = 10, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο ABΓ δεν είναι ορθογώνιο.

$$ii) \Delta E = \frac{10}{3}$$

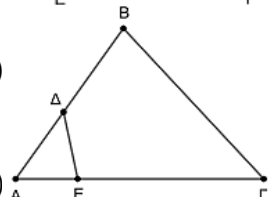


(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)



Σχήμα 2

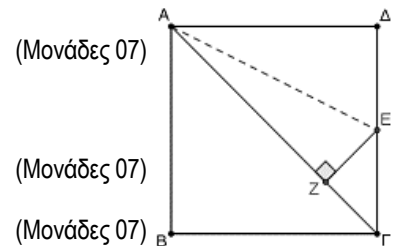
ΑΣΚΗΣΗ 54/ ΘΕΜΑ 3 3/ 21102. Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$i) A\Gamma = \alpha\sqrt{2}$$

$$ii) A\epsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.



(Μονάδες 07)

(Μονάδες 07)

(Μονάδες 07)

ΑΣΚΗΣΗ 67/ΘΕΜΑ 3. Στη βάση BΓ ισοσκελούς τριγώνου ABΓ με AB = AΓ = 11 παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε να είναι BΔ = 3 και ΔΓ = 7.

A. Να αποδείξετε ότι η προβολή της ΑΔ πάνω στη BΓ είναι ΗΔ = 2.

B. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 10.

Γ. Προεκτείνουμε την πλευρά BΓ κατά τμήμα ΓΕ = BΓ. Να αποδείξετε ότι: $AE^2 = AG^2 + 2B\Gamma^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 68/ΘΕΜΑ 3. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Η προέκταση της διχοτόμου ΑΔ του τριγώνου, τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABΔ και EAΓ είναι όμοια.

$$\beta) \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE}$$

$$\gamma) A\Delta^2 = AB \cdot A\Gamma - A\Delta \cdot$$

ΑΣΚΗΣΗ 69/ΘΕΜΑ 3. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ABΓ είναι AB=7, BΓ=5 $\sqrt{2}$ και ΓΑ=13.

A. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες.

B. Να δείξετε ότι το μήκος της προβολής της πλευράς BΓ πάνω στην AB είναι 5.

Γ. Να υπολογίσετε τη γωνία B.

ΑΣΚΗΣΗ 70/ΘΕΜΑ 3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές α=14, β=6 και γ=10

A. Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες

B. Να υπολογίσετε τη γωνία A

Γ. Να υπολογίσετε τη προβολή της πλευράς AB πάνω στην BΓ

ΑΣΚΗΣΗ 71/ΘΕΜΑ 3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 60^\circ$, γ = 2 και β = 3.

A. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = \sqrt{7}$

B. Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ABΓ.

ΚΕΦ.10: ΕΜΒΑΔΑ**10.1-10.2-10.3 Εμβαδό βασικών σχημάτων**

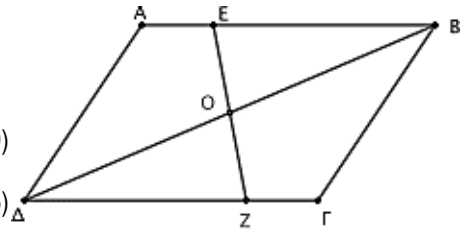
ΑΣΚΗΣΗ 72/ΘΕΜΑ 2/16102. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\Delta OZ) = (BOE)$.

β) $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$.

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 15)

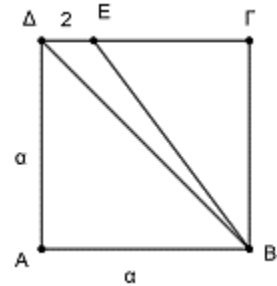


ΑΣΚΗΣΗ 73/ΘΕΜΑ 2/16817. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε

$\Delta E = 2$. Αν γνωρίζουμε ότι: $(B\Gamma\Delta) = \frac{(A\Gamma\Delta)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 12)



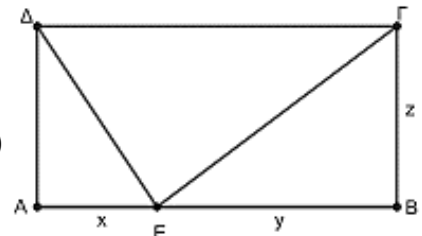
ΑΣΚΗΣΗ 74/ΘΕΜΑ 2/18550. Η περίμετρος του ορθογώνιου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 4, 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$.

β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογώνιου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

(Μονάδες 13)



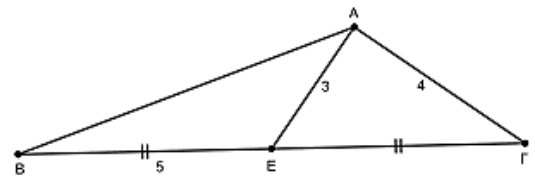
ΑΣΚΗΣΗ 75/ΘΕΜΑ 2/18559. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4. Αν $BE = 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί $(ABE) = (AGE)$.

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ 76/ΘΕΜΑ 18560. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $B\Gamma = 13$ και $\Gamma\Delta = 14$. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 06)

γ) του τραπέζιου ΑΕΓΔ. (Μονάδες 06)

ΑΣΚΗΣΗ 77/ΘΕΜΑ 2/ 21101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $B\Gamma = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{2}$, $A\Gamma = 1$.

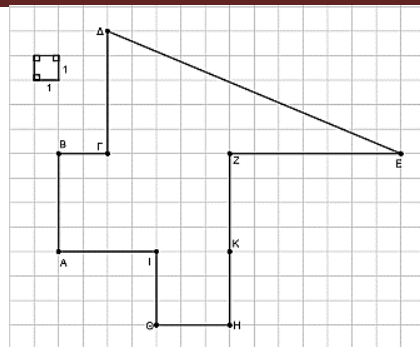
α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

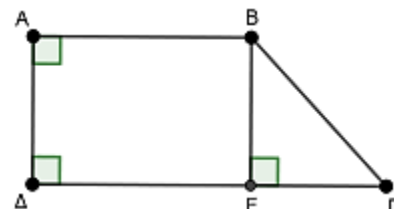
ΑΣΚΗΣΗ 78/ΘΕΜΑ2/ 18558. Στο διπλανό σχήμα:

- α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ.

**ΑΣΚΗΣΗ 79/ΘΕΜΑ2/21823.** Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, με $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $AD = 4$, $AB = 5$, $\Delta \Gamma = 8$.

Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.

- α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ. (Μονάδες 8)
 β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου. (Μονάδες 9)
 γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(B\Delta \Gamma)}{(A\beta \Gamma \Delta)}$. (Μονάδες 8)

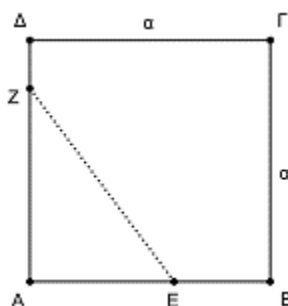
**ΑΣΚΗΣΗ 80/ΘΕΜΑ 2/16821.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε

σημείο Ε έτσι ώστε $AE = \frac{3}{5} AB$ και στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Ζ έτσι ώστε $AZ = \frac{4}{5} AD$.

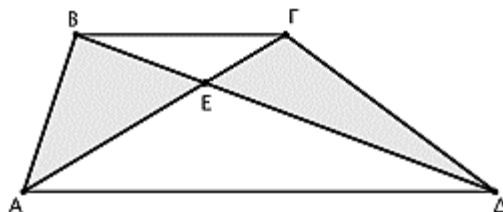
- α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά, του τριγώνου ΑΕΖ και του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 12)

- β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)

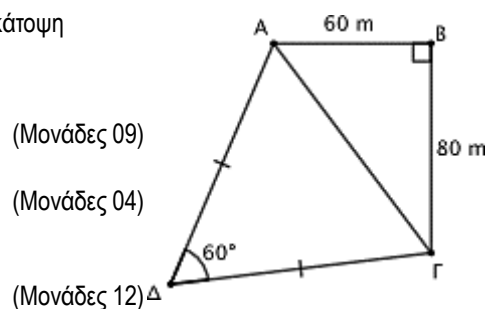
**ΑΣΚΗΣΗ 81/ΘΕΜΑ 2/22032.** Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ ($B\Gamma \parallel AD$) και έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 13)
 β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ΑΒΕ και ΔΓΕ. (Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ 82/ΘΕΜΑ 2/22035.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη

ενός κτήματος με $AB = 60$ m, $B\Gamma = 80$ m, $\Delta \approx 60^\circ$ και $AD = \Gamma \Delta$.

- α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ. (Μονάδες 09)
 β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 04)
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος; (Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ 83/ΘΕΜΑ 2/22231. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος το AH είναι ύψος και το Δ σημείο του AH . Δίνονται $AB = 20$, $BH = 12$, $\Gamma H = 5$, και ότι το εμβαδόν του $AB\Delta$ είναι $(AB\Delta) = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι $AH = 16$.

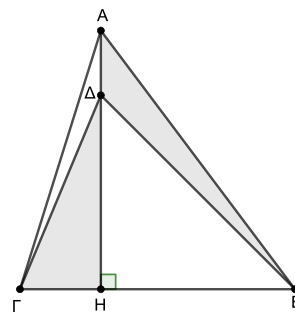
(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $AD = 4$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta H$.

(Μονάδες 6)



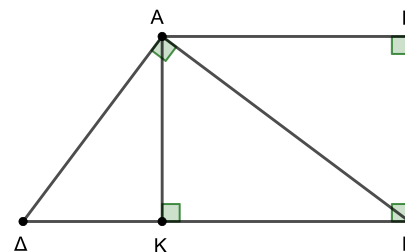
ΑΣΚΗΣΗ 84/ΘΕΜΑ 2/22338. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ και στο οποίο η πλευρά AD και η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετες. Έστω K η προβολή της κορυφής A στην πλευρά $\Gamma\Delta$, $K\Delta = 9$ και $K\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι $AK = 12$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ 85/ΘΕΜΑ 2/22339. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Έστω επίσης $AB = 15$ και $\Delta B = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$B\Gamma = 25,$$

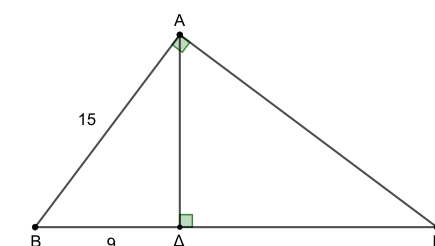
(Μονάδες 9)

$$A\Gamma = 20.$$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ 86/ΘΕΜΑ 2/22513. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 13$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90^\circ$.

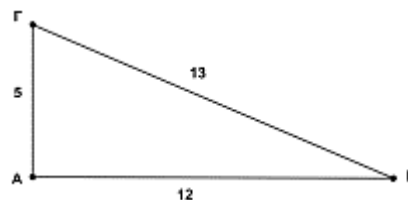
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος u_A .

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ 87/ΘΕΜΑ 4/16807. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB = 24$, $B\Gamma = 12$ και σημείο E στην ευθεία AB .

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ όταν :

i) Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB .

ii) Το σημείο E ταυτιστεί με την κορυφή A του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

β) Αφήνουμε το σημείο E να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος AB προς το B , απομακρυνόμενο από το σημείο B .

i) Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

ii) Για το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)

ΑΣΚΗΣΗ 88/ΘΕΜΑ 4/16135. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 10$ και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην $B\Gamma$.

α) Αν $\Delta B = 2$ να υπολογίσετε:

i) το ύψος AD του τριγώνου $AB\Gamma$,

(Μονάδες 7)

ii) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = 5AD$.

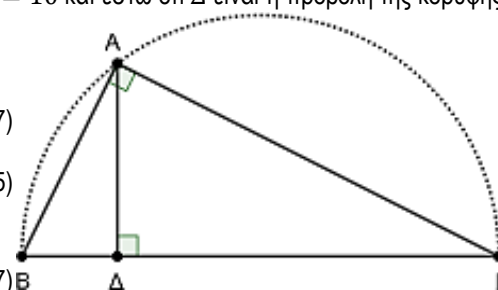
(Μονάδες 7)

ii) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του A πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



ΑΣΚΗΣΗ 89/ΘΕΜΑ 4/17349. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς AD , ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία BE και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο BEZ . Οι $\Gamma\Delta$ και EZ τέμνονται στο σημείο H και $\Delta H = \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

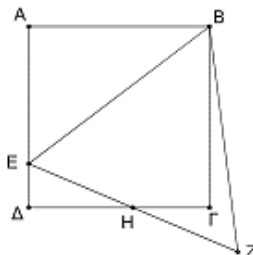
β) Να αποδείξετε το H είναι το μέσο της EZ .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ 90/ΘΕΜΑ 4/18173. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο στην AD .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(B\Gamma K) = \frac{1}{2} (ABK\Delta)$

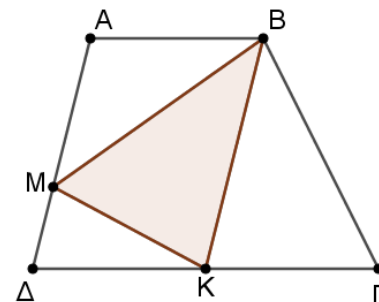
(Μονάδες 09)

ii. $(BMK) = (B\Gamma K)$

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της AD , τότε ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma\Delta)$ και (MBK) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



ΑΣΚΗΣΗ 91/ΘΕΜΑ 4/18553. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i) Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii) Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i) Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii) Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

iii) Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 92/ΘΕΜΑ 4/18557. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E \parallel AD$ και $\Delta Z \parallel \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραπεζίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$.

(Μονάδες 9)

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;

(Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 93/ΘΕΜΑ 4/18562. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a .

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ ισούται με $a\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.

(Μονάδες 05)

β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο $B\Delta ZH$ έτσι ώστε το σημείο A να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι το κέντρο του τετραγώνου $B\Delta ZH$. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $B\Delta ZH$ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιεγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔH του τετραγώνου $B\Delta ZH$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το $\Delta H\Theta K$. Με πλευρά τη διαγώνιο HK του $\Delta H\Theta K$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του καείναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, πόσες φορές ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

ΑΣΚΗΣΗ 94/ΘΕΜΑ 18564. Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλοϊσμούς να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας. (Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτεύει με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει

καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου. (Μονάδες 08)

γ) Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάξει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΑΣΚΗΣΗ 95/ΘΕΜΑ 18565. Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K . Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $r=2$. Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K, r) στο σημείο Δ .

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB .

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABKO$.

(Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του $ABKE$ να ισούται με $4\tau.μ.$;

(Μονάδες 08)

ΑΣΚΗΣΗ 96/ΘΕΜΑ 4/18566. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με πλευρά την υποτείνουσα $B\Gamma$ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Z φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο H .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $B\Gamma HZ$ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 97/ΘΕΜΑ 4/21124.

α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 40$, $\beta = 25$, $\gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη u_α , u_β , u_γ . Να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 6)

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 300$ και τα ύψη του είναι $u_\alpha = 15$ και $u_\beta = u_\gamma = 24$.

(Μονάδες 7)

iii) Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη u_α , u_β , u_γ είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγώνιου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

4/21183. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔEZH έχει πλευρά 1.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\hat{A}\hat{Z}\hat{\Gamma} = \hat{\omega}$.

(Μονάδες 5)

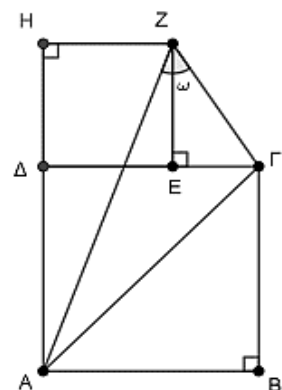
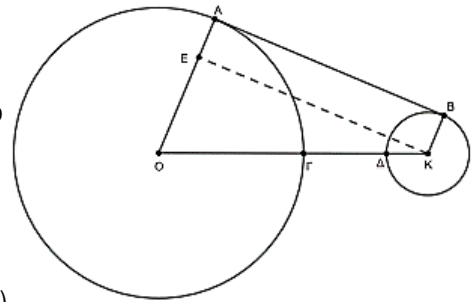
ΑΣΚΗΣΗ 98/ΘΕΜΑ 4/ 21840. Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=5$, $\Gamma\Delta=13$ και εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)=54$. Ο κύκλος με διάμετρο τη $B\Gamma$ τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι $AD = 6$. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος των BE και $B\Gamma$. (Μονάδες 6)

γ) Αν OK είναι η κάθετη από το σημείο O στην $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OK=3$, και να υπολογίσετε το μήκος της OD . (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Delta O$. (Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ 99/ΘΕΜΑ 4/22100. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$ και η διχοτόμος AE της γωνίας του A . Από το B φέρνουμε την κάθετη προς την AE και έστω Z , Δ τα σημεία τομής της κάθετου με τις AE , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\Gamma\Delta = \hat{A} = 20^\circ$ (Μονάδες 10)

ii) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την $B\Gamma$ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά. (Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 100/ΘΕΜΑ 3/17908. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $a=4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma=5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 9)

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A , τότε:

i) να υπολογίσετε το ΔB .

(Μονάδες 9)

ii) να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 101/ΘΕΜΑ 4/22104. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του $B\Gamma$. Έστω M το μέσο M του τμήματος AD .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$ (Μονάδες 8)

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$ (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και $M\Delta\Gamma$ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και $M\Delta\Gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 102/ΘΕΜΑ 4/22396. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Gamma$. Έστω $AD = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $B\Delta = 4$.

ii) $(AB\Gamma) = 10$.

β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B , τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E . Να βρείτε:

i) Το μήκος του ΔE .

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 103/ΘΕΜΑ 4/22509. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2a$ και $AD = a$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της AD σημείο N με $\Delta N = 2x$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των a , x τα $M\Gamma^2$, $N\Gamma^2$ και MN^2 .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των a , x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN .

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M , πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισεμβαδικά.

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 104/ΘΕΜΑ 4/22510. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O . Θεωρούμε τις διαμέτρους AD , BE και ΓZ . Να αποδείξετε ότι:

α) $(AOB) = (BO\Delta)$ και $(AO\Gamma) = (\Delta O\Gamma)$

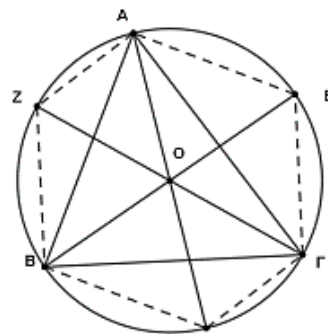
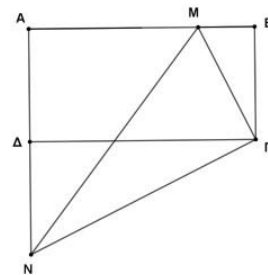
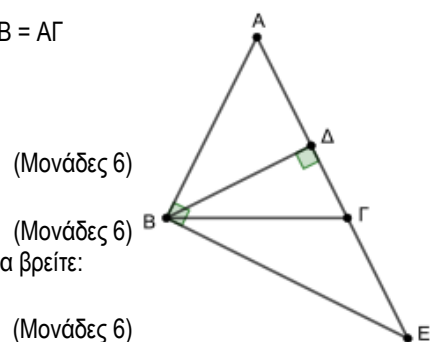
(Μονάδες 8)

β) $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) - (BO\Gamma)$

(Μονάδες 8)

γ) $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$

(Μονάδες 9)



10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

ΑΣΚΗΣΗ 105/ΘΕΜΑ 2/15979. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=AG=5$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = 5\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)
 β) $(AB\Gamma) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 12)

2/17346. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{B} = 60^\circ$

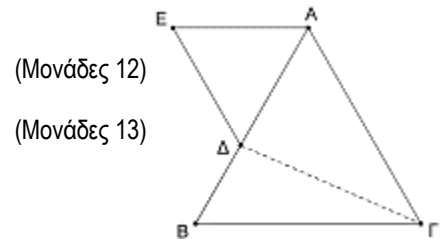
- α) Να αποδείξετε ότι $AG = 2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 106/ΘΕΜΑ 2/17347. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

- α) Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = 15\sqrt{3}$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ.

Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



(Μονάδες 12)

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ 107/ΘΕΜΑ 2/21196. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\beta = 8$ και $\gamma = 6$.

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = 24$.

(Μονάδες 5)

- β) Να υπολογίσετε:

Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 6)

Το ύψος του u_α που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου.

(Μονάδες 7)

Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 108/ΘΕΜΑ 2/21838. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $AB=8$, $AG=12$ και γωνία $\hat{A} = 60^\circ$.

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = 24\sqrt{3}$.

(Μονάδες 13)

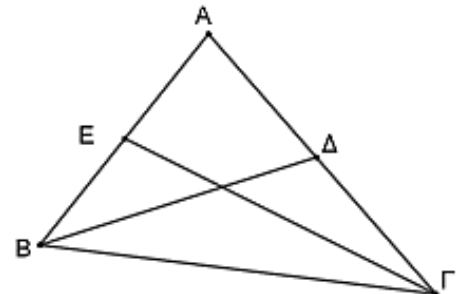
- β) Αν ΒΔ και ΓΕ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΕΓ είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 4)

ii) Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ είναι ισοδύναμα με $(EB\Gamma) = (\Delta\Gamma B) = 12\sqrt{3}$

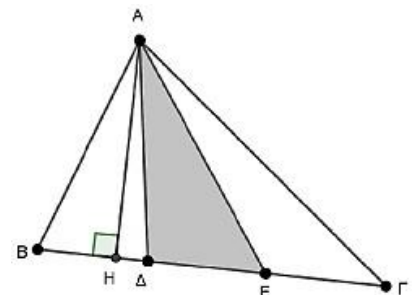
(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 109/ΘΕΜΑ 2/ 22259. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην πλευρά του ΒΓ, τα σημεία Δ, Ε ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Από την κορυφή Α, φέρνουμε το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ.

- α) Να αποδείξετε ότι $(A\Delta E) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 13)

- β) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $(AM E) = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ 110/ΘΕΜΑ 2/ 22511. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 2$, $AG = 3$ και $\hat{A} \approx 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

- α) το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 9)

- β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

- γ) το ύψος u_α .

(Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 111/ΘΕΜΑ 4/22101. Δίνεται τρίγωνο ABΓ του οποίου οι πλευρές AB και AΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

α) Αν η γωνία A έχει μέτρο 60° , τότε να υπολογίσετε:

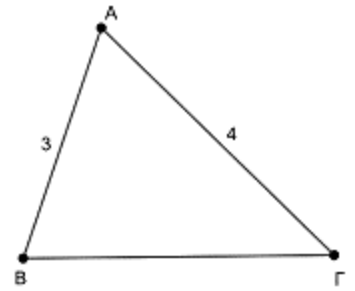
i) Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 08)

ii) Το μήκος της πλευράς BΓ.

(Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας A ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 08)

ΑΣΚΗΣΗ 112/ΘΕΜΑ 4/22369. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με AB = 8, BΓ = 7 και $\hat{A} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι AΓ = 3 ή AΓ = 5.

(Μονάδες 6)

β) Έστω ότι το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο όπως στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι AΓ = 5.

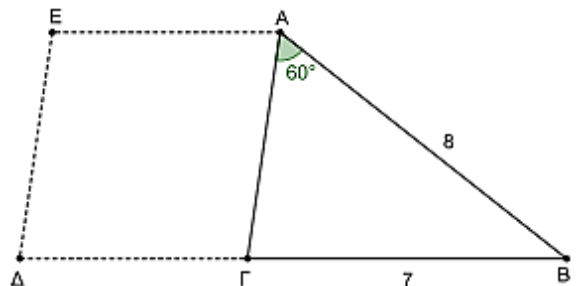
(Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$.

(Μονάδες 6)

iii) Προεκτείνουμε τη BΓ κατά τμήμα ΓΔ = AΓ και σχηματίζουμε τον ρόμβο AΓΔΕ. Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου AΓΔΕ.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ 113/ΘΕΜΑ 4/22568. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα R=10, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο K και ακτίνα r=6. Η εφαπτομένη του κύκλου (K,r) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία A και B. Η προέκταση της KΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα KΓB και KAΔ είναι όμοια.

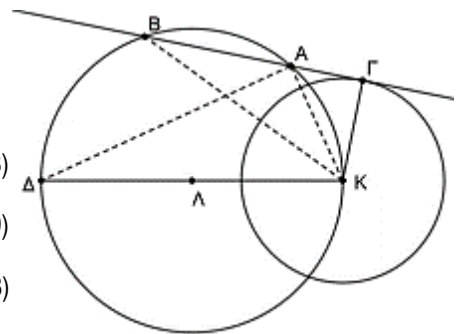
(Μονάδες 8)

ii) $KA \cdot KB = 120$

(Μονάδες 9)

β) Αν είναι KB=15, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AΓK.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 114/ΘΕΜΑ 3/21783. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$ και AB = 2.

α) Να αποδείξετε ότι AΓ = $\sqrt{3}$.

(Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην AB, στο σημείο B, που τέμνει την προέκταση της AΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν K είναι το μέσο της AΔ, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 8)

10.5.Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων-πολυγώνων

ΑΣΚΗΣΗ 115/ΘΕΜΑ 4/22380 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο $ABΓΔ$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $BΓ = 16$, $ΓΔ = 22$ και $ΑΔ = 20$. Έστω K η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία $ΓΔ$ και Λ η προβολή του σημείου B πάνω στη ευθεία $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $KΔ = 12$.

β) το εμβαδόν του τριγώνου $AKΔ$ είναι 96.

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AKΔ$ και $B\Lambda A$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Lambda A$.

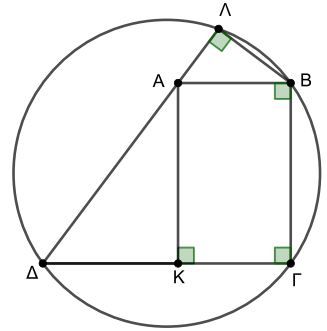
δ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $BΓΔ\Lambda$.

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 116/ΘΕΜΑ 2/15978. Στο τρίγωνο $ABΓ$ του παρακάτω σχήματος, τα Δ , E , Z είναι σημεία των πλευρών AB , $BΓ$, $ΑΓ$ αντίστοιχα,

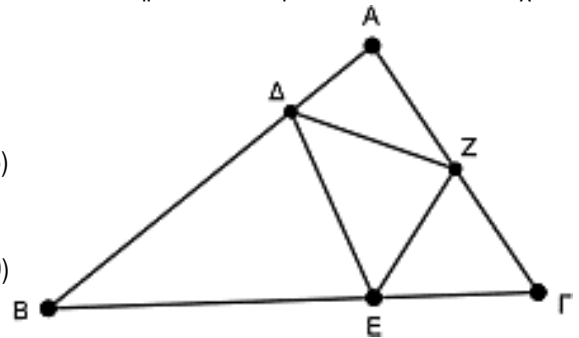
ώστε: $AΔ = \frac{1}{4} AB$, $BE = \frac{2}{3} BΓ$ και $ΓZ = \frac{1}{2} ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AΔZ) = \frac{1}{8}(ABΓ)$, $(BEΔ) = \frac{1}{2}(ABΓ)$, $(ΓEZ) = \frac{1}{6}(ABΓ)$.

(Μονάδες 15)

β) $(ΔEZ) = \frac{5}{24}(ABΓ)$.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ 117/ΘΕΜΑ 2/16127. Ένα τρίγωνο έχει πλευρά $BΓ = 9$ και αντίστοιχο ύψος $AΔ = 8$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$.

(Μονάδες 9)

β) Ένα άλλο τρίγωνο $A'B'Γ'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $ABΓ$ και η ομόλογη πλευρά της $BΓ$ είναι η $B'Γ' = 6$. Να υπολογίσετε:

i) τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων $ABΓ$ και $A'B'Γ'$,

(Μονάδες 7)

ii) το εμβαδόν του τριγώνου $A'B'Γ'$.

(Μονάδες 9)

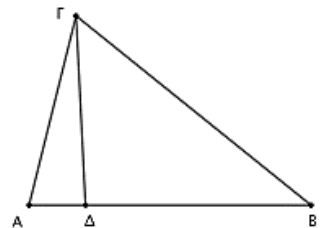
ΑΣΚΗΣΗ 118/ΘΕΜΑ 2/16756. Θεωρούμε τρίγωνο $ABΓ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{(ABΓ)}{(ΔBΓ)} = \frac{AB}{ΔB}$

(Μονάδες 15)

β) Αν $(ABΓ) = 25$ και $AB = 5AΔ$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΔBΓ$.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ 119/ΘΕΜΑ 2/16770. Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της $Oδ$. Πάνω στην $Oδ$ παίρνουμε τυχαία σημεία A και B . Θεωρούμε σημείο E στην πλευρά $O\chi$ τέτοιο ώστε $O\hat{E}B = 70^\circ$ και σημείο Δ στην $O\psi$ τέτοιο ώστε $O\hat{\Delta}A = 70^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEB και $OΔA$ είναι όμοια.

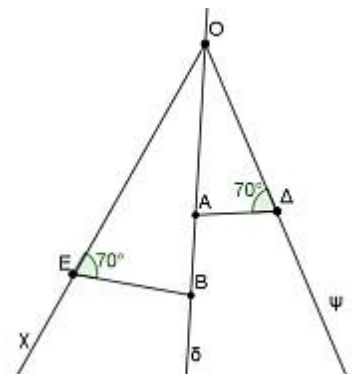
(Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $OΔA$ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OEB .

(Μονάδες 09)



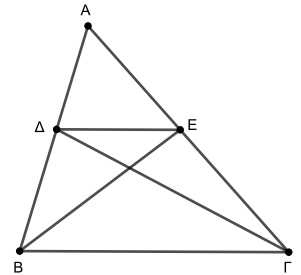
ΑΣΚΗΣΗ 120/ΘΕΜΑ 2/16806. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(ADE)}{(AEB)} = \frac{AD}{AB}$ και $\frac{(ADE)}{(AEG)} = \frac{AE}{EG}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(DEB) = (DE\Gamma)$.

(Μονάδες 13)

(Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ 121/ΘΕΜΑ 18561. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$ και την πλευρά AB κατά τμήμα $BE = AB$.

α) Αν $(AB\Gamma) = 25 \text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(BDE) = 50 \text{ m}^2$.

(Μονάδες 10)

β) Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ED και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην EA που τέμνονται στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AZ\Delta$ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 122/ΘΕΜΑ 20667. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 8$. Στην προέκταση της ΓB προς το B παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 4$ και E είναι το μέσο της $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$.

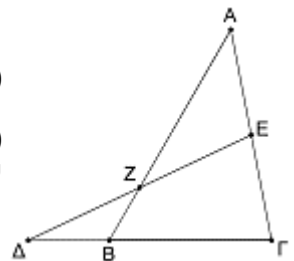
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma DE) = 3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και ΓDE και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, αν το εμβαδόν του τριγώνου ΓDE είναι 12 τ.μ.

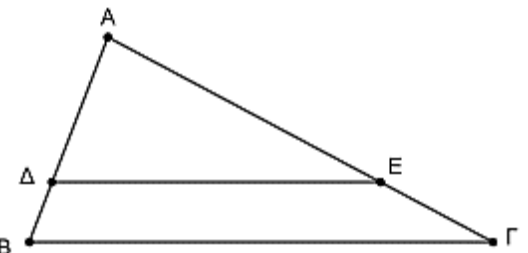
(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 123/ΘΕΜΑ 2/21120. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = \sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς AB ώστε $A\Delta = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα ADE και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,
- το εμβαδόν του τριγώνου ADE είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.



(Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου ADE και του τραπέζιου $BΓED$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 124/ΘΕΜΑ 2/21304. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E , αντίστοιχα, ώστε η DE να είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ και $B\Delta = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $1/3$.

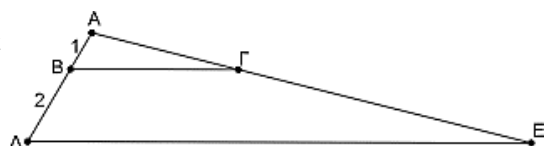
(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ADE .

(Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ADE είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 07)



ΑΣΚΗΣΗ 125/ΘΕΜΑ 2/21636. Δίνεται τρίγωνο ABΓ, με μήκη πλευρών AB=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ABΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 126/ΘΕΜΑ 2/22070. Ένα τρίγωνο ABΓ έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

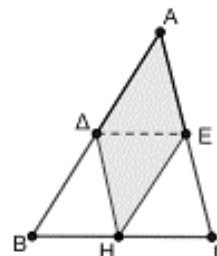
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ABΓ:

Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ABΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ . Να

υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.



(Μονάδες 12)

ΑΣΚΗΣΗ 127/ΘΕΜΑ 4/16582. Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών AB και ΑΓ αντίστοιχα.

α) α) Έστω ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 07)

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ABΓ;

(Μονάδες 06)

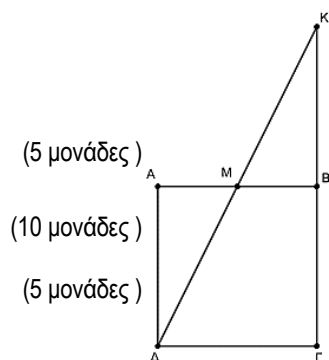
ΑΣΚΗΣΗ 128/ΘΕΜΑ 4/16732. Έστω τετράγωνο ABΓΔ και Μ το μέσο της AB. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια. (5 μονάδες)

β) $(ΜΚΒ) = \frac{1}{4} (ΔΚΓ)$

γ) $(ΜΒΓΔ) = \frac{3}{4} (AB\Gamma\Delta)$.

δ) Αν $(ΜΒΓΔ) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.



ΑΣΚΗΣΗ 129/ΘΕΜΑ 4/17956. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και ΑΓ. Η παράλληλη στην AB τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την AB στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΕΚΔ) = \frac{(ΒΕΔ)}{2}$

(Μονάδες 09)

β) $(ΕΖΔ) = \frac{(ΑΕΔΖ)}{2}$

(Μονάδες 09)

γ) Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ.

(Μονάδες 07)

ΑΣΚΗΣΗ 130/ΘΕΜΑ 4/17907. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $ABH\Delta$, $A\Gamma\Theta\text{I}$, $B\Gamma\rho\Delta$. Έστω E , E_1 , E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων $A\Gamma\Theta\text{I}$, $ABH\Delta$, $B\Gamma\rho\Delta$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A .

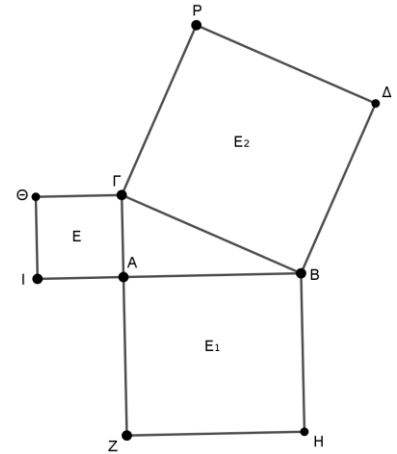
(Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, $A\text{I}\Delta$, $B\text{H}\Delta$, $\Gamma\rho\Theta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) αν η $A\Gamma = 1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $\Delta\text{H}\rho\text{P}\Theta\text{I}$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ 131/ΘΕΜΑ 2/18101. Στο σχήμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ισοσκελή με $A\Gamma = B\Gamma = 3$ και $AB = A\Delta = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες B και BAG είναι ίσες.

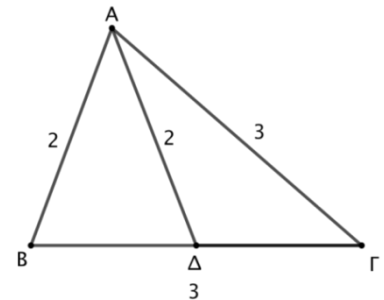
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta A$ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο

(Μονάδες 8)



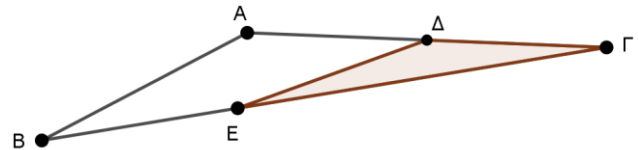
ΑΣΚΗΣΗ 132/ΘΕΜΑ 2/22260. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, με $AB=4$, $A\Gamma=6$ και $\hat{A} = 150^\circ$. Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της $A\Gamma$ και το E είναι σημείο της $B\Gamma$ ώστε $\Gamma E = \frac{2}{3}B\Gamma$, τότε να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

β) το λόγο $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(\Delta B\Gamma)}$. (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 7)

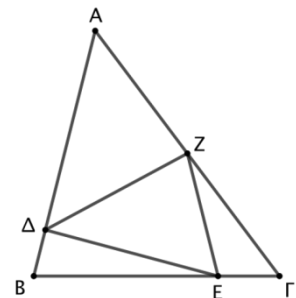


ΑΣΚΗΣΗ 133/ΘΕΜΑ 3/190377. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των πλευρών

AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\Delta B = \frac{1}{5}AB$, $E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma$, $Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta B E)}{(\Delta B \Gamma)}$, $\frac{(\Gamma E Z)}{(\Gamma E \Gamma)}$, $\frac{(\Gamma A \Delta)}{(\Gamma A \Gamma)}$. (Μονάδες 15)

β) Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta E Z$. (Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ 134/ΘΕΜΑ 4/21189. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M , N τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ (Μονάδες 8)

β) $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$ (Μονάδες 12)

γ) $(BMN) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$ (Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 135/ΘΕΜΑ 4/21189. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) = \frac{1}{2} (ΑΒΓΔ)$ (Μονάδες 8)

β) $\frac{(BMN)}{(ABΓ)} = \frac{1}{4}$ (Μονάδες 12)

γ) $(BMN) = \frac{1}{8} (ΑΒΓΔ)$ (Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 136/ΘΕΜΑ 4/18301. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{2} ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{2}{5} ΑΓ$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{λ} ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{λ}{μ} ΑΓ$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε

ότι ο λόγος $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(ΑΔΕ) = (ΑΒΓ)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 137/ΘΕΜΑ 4/18370. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:

α) Αν $ΒΜ = 2ρ$ να αποδείξετε ότι $ΜΓ = 2\sqrt{2}ρ$.

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΜΟ}{ΜΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΑ}$.

(Μονάδες 09)

γ) Αν για το Μ ισχύει ότι $ΒΜ = λ \cdot ρ$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε $(ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ)$.

(Μονάδες 07)

ΑΣΚΗΣΗ 138/ΘΕΜΑ 4/18371. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.

α)

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΕ}{2ΒΓ}$.

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(ΔΕΓ) = (ΑΒΔ)$.

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\hat{Δ} = \hat{Γ}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{ΔΓ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\hat{Δ}, \hat{Γ}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο

λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{ΔΕ}{ΑΒ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ».

Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)

ΑΣΚΗΣΗ 139/ΘΕΜΑ 4/18302. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $AD = 2AB$ και $AE = \frac{1}{2}AG$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 09)

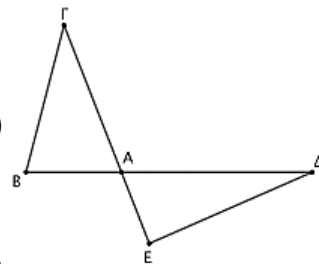
β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $AD = \mu \cdot AB$ και

$AE = \nu \cdot AG$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ να είναι ισοδύναμα;

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι $AG = \frac{3}{2}AB$ και $AD = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του Ε ώστε τα ΑΒ και ΑΔΕ να είναι όμοια.

(Μονάδες 06)



ΑΣΚΗΣΗ 140/ΘΕΜΑ 4/18369. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$, $\hat{A} = 36^\circ$.

α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

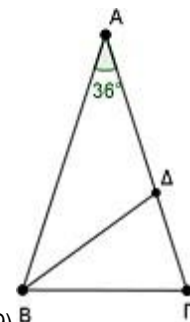
(Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

(Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = 3$.

(Μονάδες 09)



ΑΣΚΗΣΗ 141/ΘΕΜΑ 4/20678. Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ'. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια.

(Μονάδες 6)

γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται

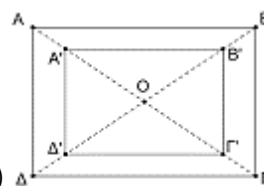
κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\hat{AOB} = 120^\circ$.

Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;

(Μονάδες 6)

Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ 142/ΘΕΜΑ 4/21839. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 6$ cm και $AG = 3$ cm και Α οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΗΖ και φέρνουμε την ΕΖ, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 10)

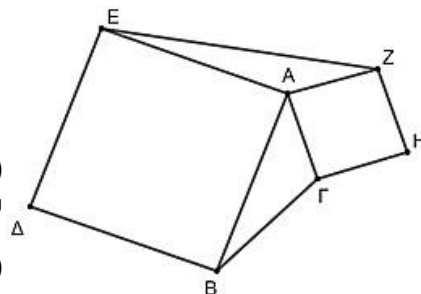
β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΕΖΗΓΒΔ είναι $(ΕΖΗΓΒΔ) = 54 \text{ cm}^2$:

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 30^\circ$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ 143/ΘΕΜΑ 4/22023. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

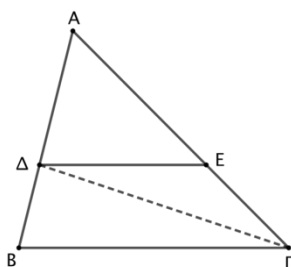
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(ADE)}{(AB\Gamma)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(DE\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$.

(Μονάδες 5)



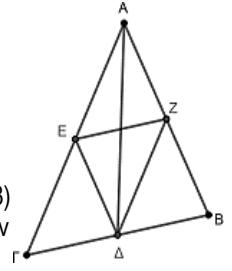
ΑΣΚΗΣΗ 144/ΘΕΜΑ 4/22150. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με E και Z τα μέσα των πλευρών του $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα. Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα AD ενώνει την κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ με το μέσο Δ της απέναντι πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $ED\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας
 β) Για το εμβαδόν $(AE\Delta Z)$ του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ ισχύει ότι $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(ED\Gamma)$.
 γ) Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 18)

- δ) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$;

(Μονάδες 07)



ΑΣΚΗΣΗ 145/ΘΕΜΑ 4/22141. Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει τα άκρα του B και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔA και EA , αντίστοιχα, του τριγώνου $A\Delta E$, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔE . Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$.

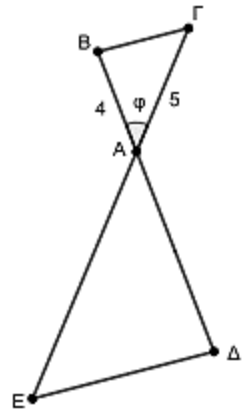
(Μονάδες 10)

- β) Αν $\angle B\hat{A}\Gamma = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(A\Delta E)$ του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.

(Μονάδες 07)

- γ) Να βρείτε σημείο Z εσωτερικό της πλευράς AD , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma Z$ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 08)



ΑΣΚΗΣΗ 146/ΘΕΜΑ 4/22148. Έστω E σημείο στην πλευρά ΓA του τριγώνου $AB\Gamma$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ του $AB\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Z στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς ΓA του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε να είναι

$AZ = AE$, όπως στο σχήμα.

- α) Έστω $A\Gamma = 3AE$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

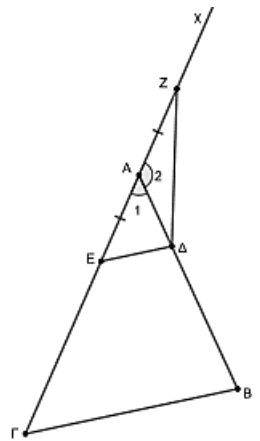
(Μονάδες 07)

- ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

- β) Αν το εμβαδόν του ΔEZ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του $AB\Gamma$, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{A\Gamma}$.

(Μονάδες 08)



ΑΣΚΗΣΗ 147/ΘΕΜΑ 4/22243 Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο Z στην πλευρά AD , ώστε $AZ = \frac{3}{4}AB$.

- α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4}AB$.

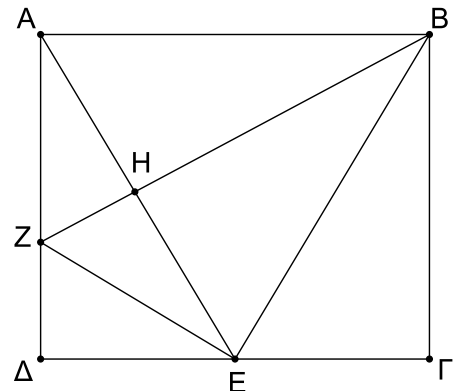
(Μονάδες 6)

- β) Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, E το μέσο της $\Gamma\Delta$ και H είναι το σημείο τομής των AE , BZ , να αποδείξετε ότι:

- i. $BE^2 = \frac{5}{4}AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16}AB^2$, (Μονάδες 6)

- ii. το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

- γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BEZ και $B\Gamma E$ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 7)



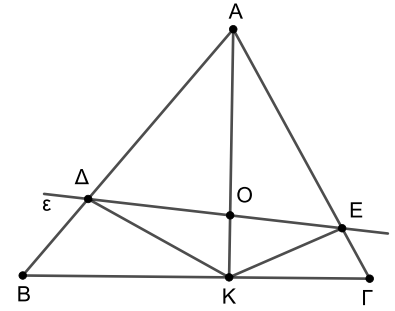
ΑΣΚΗΣΗ 148/ΘΕΜΑ 4/22340. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το εσωτερικό σημείο K της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο O του ευθύγραμμου τμήματος AK , ώστε $AO = \frac{3}{4}AK$. Από το O φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $(AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta)$, (Μονάδες 7)
- ii. $(AOE) = \frac{3}{4}(AKE)$, (Μονάδες 7)
- iii. $(ADE) = \frac{3}{4}(ADKE)$. (Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(ADE) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)



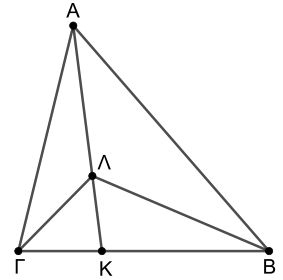
ΑΣΚΗΣΗ 149/ΘΕΜΑ 4/22375. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο K ώστε $KB = 2K\Gamma$ και στο ευθύγραμμο τμήμα AK παίρνουμε σημείο Λ ώστε $LA = 2LK$. Έστω E_1 , E_2 , E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων $AL\Gamma$, ΓLK , $B LK$ και ALB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ και $\frac{E_4}{E_3} = 2$. (Μονάδες 10)
- ii. $E_1 = E_3$. (Μονάδες 8)

β) Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ 150/ΘΕΜΑ 4/22380. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω K η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία $\Gamma\Delta$ και Λ η προβολή του σημείου B πάνω στη ευθεία $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

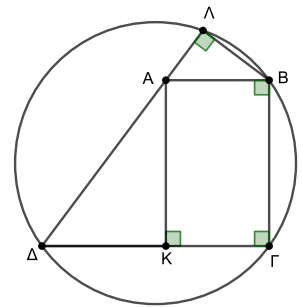
- i. $K\Delta = 12$,
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AK\Delta$ είναι 96.

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda A$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Lambda A$.

(Μονάδες 8)



γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta\Lambda$.

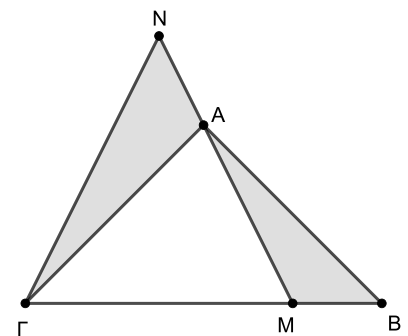
(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 151/ΘΕΜΑ 4/22404. Το σημείο M διαιρεί εσωτερικά την πλευρά $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ σε λόγο $\frac{MB}{M\Gamma}$ και το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.

α) Έστω $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 7)
- ii. $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 6)
- iii. $(AMB) = (AN\Gamma)$. (Μονάδες 6)

β) Έστω $\frac{MB}{M\Gamma} = 1$ και $(AMB) = (AN\Gamma)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM . (Μονάδες 6)



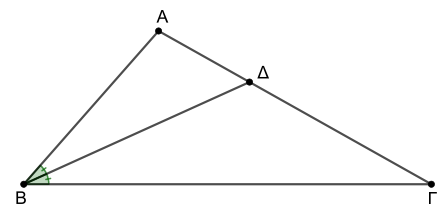
ΑΣΚΗΣΗ 152/ΘΕΜΑ 4/22406. Στο παρακάτω σχήμα η $B\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και επίσης είναι $B\Gamma = 2AB$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Delta$. (Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $AB = 12$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

- i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 108. (Μονάδες 7)
- ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων $\Delta B\Gamma$ και $AB\Delta$. (Μονάδες 6)



ΑΣΚΗΣΗ 153/ΘΕΜΑ

44/22407 .Στο παρακάτω σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΚ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΑΒ. Δίνονται $AB = 10$, $AG = 15$ και $AK = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

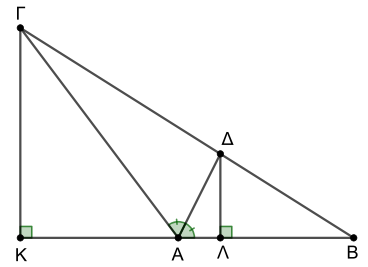
iii. $GK = 12$ και $(ABG) = 60$. (Μονάδες 8)

iv. $(ADB) = 24$ και $(ADG) = 36$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{DL}{GK} = \frac{2}{5}$. (Μονάδες 3)

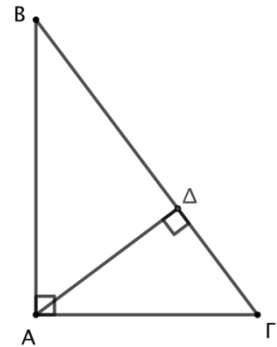
ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{LB}{AK}$ στον οποίο το σημείο Λ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΒΚ. . (Μονάδες 4)



ΚΕΦ.11: ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΘΓΩΝΑ**11.1-11.2 Κανονικά πολύγωνα-Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων****ΑΣΚΗΣΗ 153/ ΘΕΜΑ 1/16097.**

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.
- Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
- Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.
- Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.
- Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.



(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 154/ ΘΕΜΑ 1/21975.

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
- Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.
- Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.
- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 155/ ΘΕΜΑ 2/20638

Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών n_1 και n_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του n_1 προς το n_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

(Μονάδες 10)

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $n_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

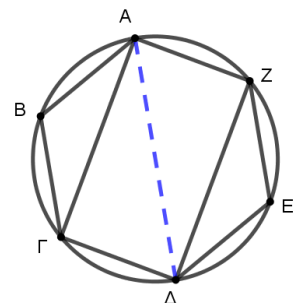
(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 156/ ΘΕΜΑ 4/21841 . Έστω ABΓΔΕΖ κανονικό εξαγώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R).

α) Να αποδείξετε ότι:

- Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 6)
- Οι γωνίες $\widehat{Γ\hat{A}D}$ και $\widehat{A\hat{D}Z}$ είναι ίσες. (Μονάδες 3)
- Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες. (Μονάδες 3)
- Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 6)



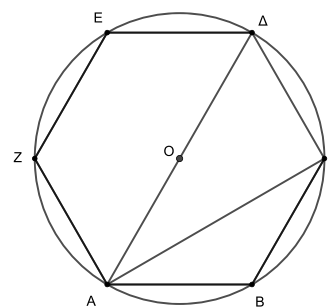
11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο

ΑΣΚΗΣΗ 157/ ΘΕΜΑ 2/16820 . Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε το τμήμα ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 7)

β) $ΑΓ = R \cdot \sqrt{3}$ (Μονάδες 9)

γ) $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 9)

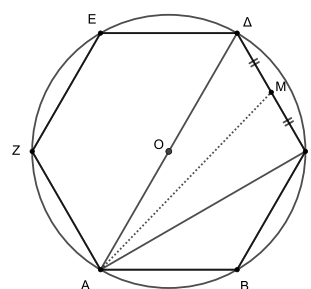


ΑΣΚΗΣΗ 158/ ΘΕΜΑ 2/16818 . Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) $ΑΓ = R \cdot \sqrt{3}$ (Μονάδες 9)

γ) $(ΑΜΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ (Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ 159/ ΘΕΜΑ 4/16818 . Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε

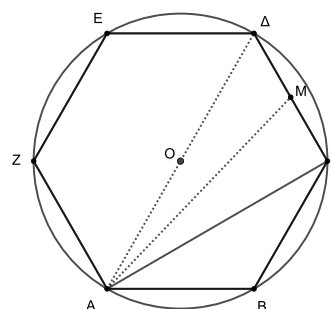
ότι: α) $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

(Μονάδες 7)

β) $(ΑΜΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

(Μονάδες 6)

γ) $(ΑΜΔΕΖ) = R^2\sqrt{3}$ (Μονάδες 12)



11.4 Προσέγγιση μήκους κύκλου με κανονικά πολύγωνα

ΑΣΚΗΣΗ 160/ ΘΕΜΑ 2/21296 . Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.

(Μονάδες 08)

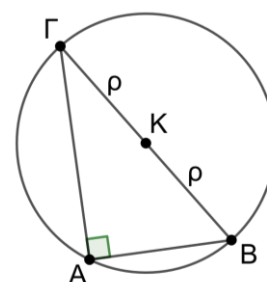
β) Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου,

(Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)



ΑΣΚΗΣΗ 161/ ΘΕΜΑ 4/16928 . Δίνεται κύκλος με μήκος 10.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος P_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον παραπάνω κύκλο είναι ίση με $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο P_6 κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο.

(Μονάδες 08)

γ) Έστω ένα κανονικό δωδεκάγωνο με περίμετρο P_{12} και ένα κανονικό εικοσιτετράγωνο με περίμετρο P_{24} που είναι εγγεγραμμένα στον παραπάνω κύκλο. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{30}{\pi}$, $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$, P_{12} , P_{24} και 10.

(Μονάδες 07)

11.5 Μήκος τόξου

ΑΣΚΗΣΗ 162/ ΘΕΜΑ 2/22242 . Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία A, B , ώστε $\widehat{AKB} = 60^\circ$ και $\widehat{ALB} = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = R$.

(Μονάδες 5)

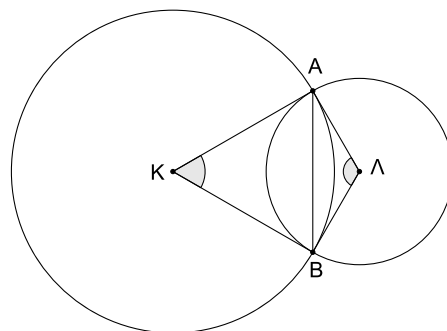
ii. Η κοινή χορδή AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο

(Λ, ρ) και ισχύει $R = \rho\sqrt{3}$.

(Μονάδες 7)

β) Αν ℓ_1 είναι το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ του κύκλου (K, R) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου και ℓ_2 είναι το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ του κύκλου (Λ, ρ) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ 163/ ΘΕΜΑ 2/22133 . Η $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι επίκεντρη γωνία σε κύκλο $(A, 5)$, όπως στο σχήμα. Δίνεται ότι $B\Gamma = 5\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η χορδή $B\Gamma$ είναι ίση με την πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R = 5$.

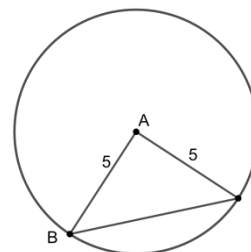
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ℓ είναι το μήκος του κυρτού τόξου $\widehat{B\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $\ell = 2,5\pi$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ 164/ ΘΕΜΑ 2/21192 . Δίνεται τεταρτοκύκλιο $\widehat{AB}$ κέντρου O και ακτίνας R . Αν ο κύκλος κέντρου B και ακτίνας R τέμνει το τόξο $\widehat{AB}$ στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και το μήκος $\ell_{B\Gamma}$ του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ είναι $\ell_{B\Gamma} = \frac{\pi \cdot R}{3}$.

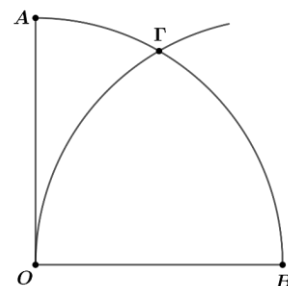
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ είναι $\ell_{A\Gamma} = \frac{\pi \cdot R}{6}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου OAG που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα OA και τα τόξα $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{O\Gamma}$.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ 165/ ΘΕΜΑ 2/22046 . Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα OG την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $GB = OG = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα BA , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{O\hat{B}A} = 30^\circ$.

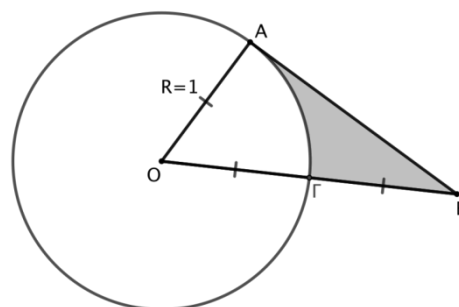
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)



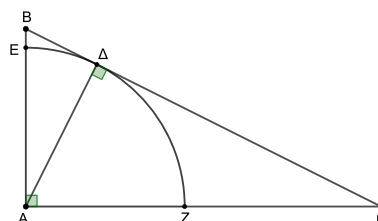
ΑΣΚΗΣΗ 166/ ΘΕΜΑ 2/21122 . Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$ και είναι $B\Delta = 1$ και $\Delta\Gamma = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\widehat{EZ}$.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ 167/ ΘΕΜΑ 4/21193 . Στο παρακάτω σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες μήκους R , έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές α , β και γ . Ένας τεντωμένος μάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία K , Λ , M , N , P , Σ .

α) Να αποδείξετε ότι:

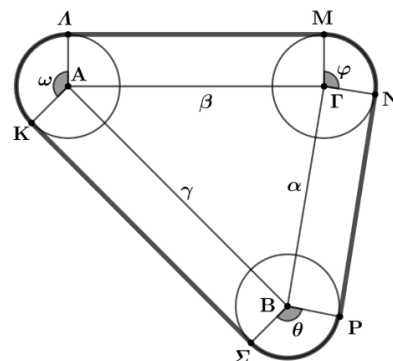
- Το τετράπλευρο $\Lambda M \Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 4)
- Η κυρτή γωνία $\widehat{K\Lambda\Lambda}$ και η γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 4)

β) Αν $\widehat{K\Lambda\Lambda} = \omega$, $\widehat{\Sigma B P} = \theta$, $\widehat{M \Gamma N} = \phi$, να αποδείξετε ότι $\omega + \theta + \phi = 360^\circ$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μάντα L είναι $L = 2(\tau + \pi R)$ όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)



11.6 Προσέγγιση εμβαδού του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

ΑΣΚΗΣΗ 168/ ΘΕΜΑ 2/22310

Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

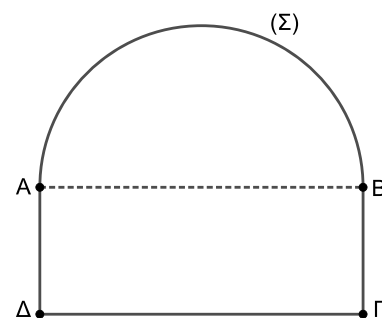
Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8 \text{ cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi \text{ cm}^2$,
- το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi \text{ cm}$.

β) Να βρείτε:

- το μήκος της πλευράς AD του ορθογωνίου,
- την περίμετρο του σχήματος (Σ).



ΑΣΚΗΣΗ 169/ ΘΕΜΑ 2/21181

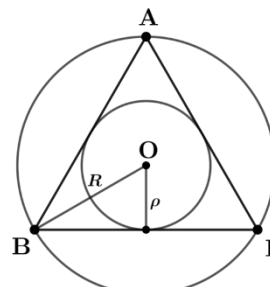
Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, ρ) όπου ρ το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου. Αν το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 5 να υπολογίσετε:

α) Την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 4)

β) Αν $R = 10$ τότε να υπολογίσετε:

- Το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. (Μονάδες 9)
- Το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζουν ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο $AB\Gamma$ κύκλος. (Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ 170/ ΘΕΜΑ 2/21301

Σε κύκλο (K, ρ) εμβαδού $E = 4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, όπως στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (K, ρ) .

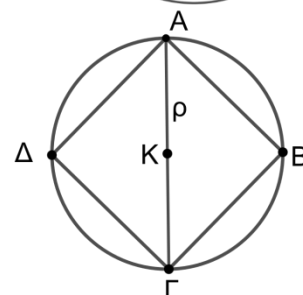
(Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου $A\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) και της πλευράς AB του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 08)



ΑΣΚΗΣΗ 171/ ΘΕΜΑ 2/21300

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, ρ) , όπως στο διπλανό σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 08)

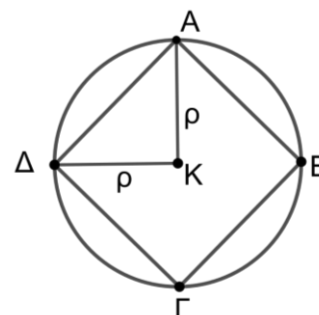
β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Delta$ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$.

(Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (K, ρ) .

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ 172/ ΘΕΜΑ 2/21075

Δίνεται κύκλος με κέντρο O , ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π .

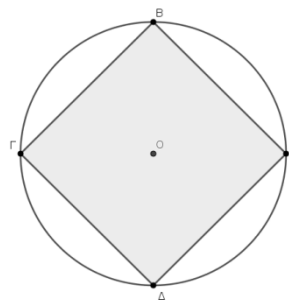
α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου. (Μονάδες 07)

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο. (Μονάδες 09)

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

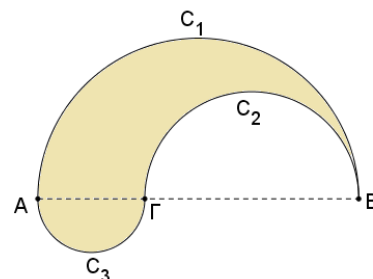
(Μονάδες 09)

**ΑΣΚΗΣΗ 173/ ΘΕΜΑ 2/20672**

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6$, και σημείο του Γ , ώστε $B\Gamma = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η AB σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1 , C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 15)



β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ 174/ ΘΕΜΑ 4/22151

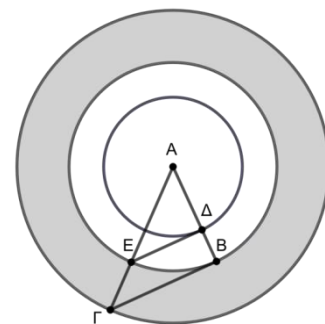
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην πλευρά AB παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E ώστε $AE=AB$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνες $\rho=AD$, $r=AB=AE$ και $R=A\Gamma$ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (A, ρ) , (A, r) και (A, R) όπως στο σχήμα. Έστω E_{EF} το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) , E_{AB} το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, r) , $E_{A\Gamma}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, r) και E_{AD} το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ) .

α) Να αποδείξετε ότι:

$$i. \frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}$$

$$ii. \frac{E_{AB}}{E_{AD}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$$

(Μονάδες 10)



(Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι: $\frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{E_{AB}}{E_{AD}}$

(Μονάδες 08)

ΑΣΚΗΣΗ 175/ ΘΕΜΑ 4/22154

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$, που η κοινή κορυφή τους A βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (A, ρ_1) , (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (A, ρ_3) , οι κορυφές B και E στον κύκλο (A, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (A, ρ_1) , όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε E_{EF} το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , E_1 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_1) , E_2 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_3) .

α) Αν $\frac{E_{EF}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

$$i. \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}.$$

(Μονάδες 07)

$$ii. \frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}.$$

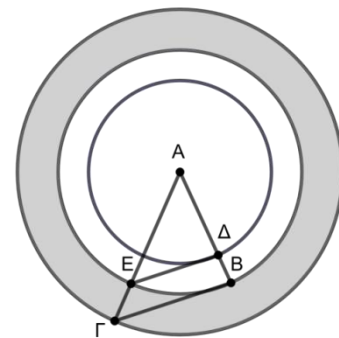
(Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $E_{EF} = E_2$ και επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{AB} = E_1$, όπου E_{AB} είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_1) και (A, ρ_2) .

(Μονάδες 05)

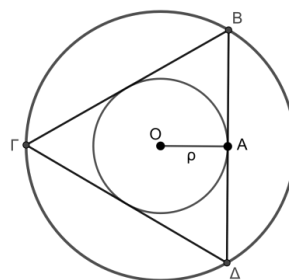
**ΑΣΚΗΣΗ 176/ ΘΕΜΑ 4/22157**

Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ) και (O, R) με $R > \rho$. Οι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου $B\Gamma\Delta$ είναι σημεία του κύκλου (O, R) , ενώ οι πλευρές του εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης η $B\Delta$ εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο A .

α) Αν το εμβαδόν E του κύκλου (O, ρ) είναι ίσο με 36π , να αποδείξετε ότι:

i. $\rho = 6$.

(Μονάδες 08)



ii. $R = 12$.

(Μονάδες 06)

iii. Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $108\sqrt{3}$. (Μονάδες 07)β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΒΓΔ) του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot E$, όπου E είναι το εμβαδόν του κύκλου (Ο, ρ). (Μονάδες 04)**ΑΣΚΗΣΗ 177/ ΘΕΜΑ 4/18355**Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην διαγώνιό του ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΕΓ = \frac{1}{4} ΑΓ$. Με πλευρά την ΑΕ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΙΘΕ όπως φαίνεται στο σχήμα.

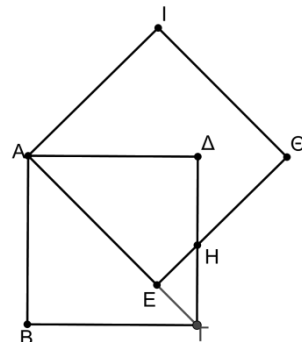
Έστω Η το σημείο τομής της ΔΓ με την ΕΘ.

α)

i. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΙΘΕ)}{(ΑΒΓΔ)}$. (Μονάδες 08)ii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ΕΓΗ)}{(ΑΓΔ)}$.

(Μονάδες 10)

β) Κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ. Να εξετάσετε αν ο λόγος του εμβαδού του κύκλου αυτού προς το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ εξαρτάται από το μήκος α της πλευράς του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 07)

**ΑΣΚΗΣΗ 178/ ΘΕΜΑ 4/21103**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

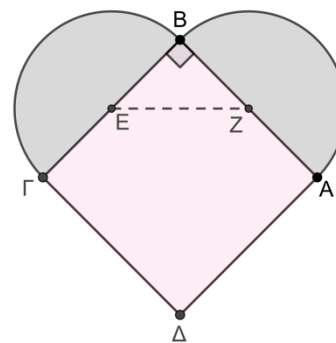
α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με π·α. (Μονάδες 07)

β)

i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi + 4$, να υπολογίσετε το α. (Μονάδες 06)ii. Αν $\alpha = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο

 $\frac{(\tau)}{(ΑΒΓΔ)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)**11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος****ΑΣΚΗΣΗ 179/ ΘΕΜΑ 2/21121**Στο παρακάτω σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα $ΒΓ = 13$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 6$. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

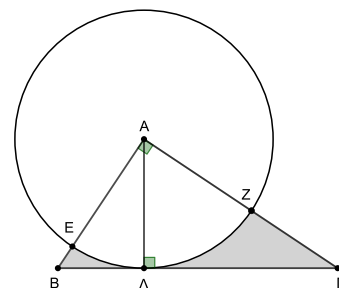
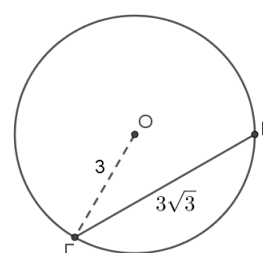
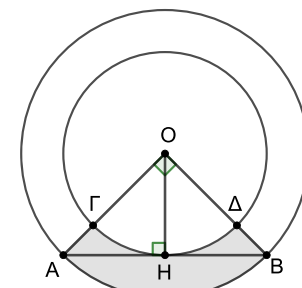
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα $\widehat{ΑΕΔΖ}$,

(Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. (Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ 180/ ΘΕΜΑ 2/21123**Στο τρίγωνο ΟΑΒ του σχήματος είναι $\widehat{ΑΟΒ} = 90^\circ$, $ΟΑ = ΟΒ = 2$ και το ΟΗ είναι το ύψος του από την κορυφή Ο. Με κέντρο το Ο και ακτίνες $R = ΟΑ$ και $\rho = ΟΗ$ γράφουμε δυο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (Ο, ρ) τέμνει τις ΟΑ και ΟΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.α) Να αποδείξετε ότι $ΟΗ = \sqrt{2}$. (Μονάδες 10)β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $\widehat{ΟΑΒ}$ και $\widehat{ΟΓΔ}$. (Μονάδες 10)γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα $\widehat{ΑΒ}$ και $\widehat{ΓΔ}$ και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ. (Μονάδες 5)**ΑΣΚΗΣΗ 181/ ΘΕΜΑ 2/21069**Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 3$. Θεωρούμε την χορδή $ΒΓ = 3\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{ΒΓ}$ είναι 120° . (Μονάδες 08)

β) Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{B\Gamma}$. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\widehat{B\Gamma}$. (Μονάδες 09)

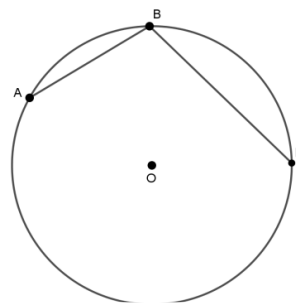
ΑΣΚΗΣΗ 182/ ΘΕΜΑ 2/20363

Δίνεται ο κύκλος (O, R) και τα σημεία του A, B, Γ όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, ώστε $AB = R$ και $B\Gamma = R\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AB} = 60^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R , τα μήκη των τόξων $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R , το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(O\widehat{A\Gamma})$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $A\widehat{O\Gamma}$. (Μονάδες 10)



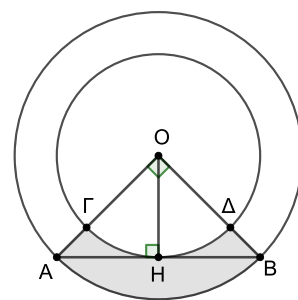
ΑΣΚΗΣΗ 183/ ΘΕΜΑ 2/18099

Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με $E = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$ (Μονάδες 7)



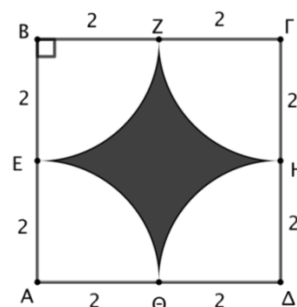
ΑΣΚΗΣΗ 184/ ΘΕΜΑ 2/18098

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $a = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$

(Μονάδες 12)

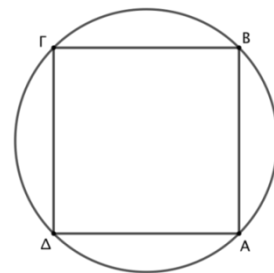


2/18097

Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$. (Μονάδες 12)



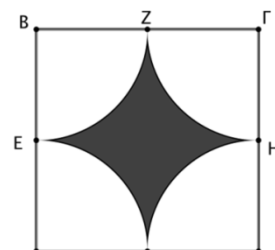
ΑΣΚΗΣΗ 185/ ΘΕΜΑ 3/22054

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα a σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του a . (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι: $E = a^2(4 - \pi)$ (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου. (Μονάδες 05)

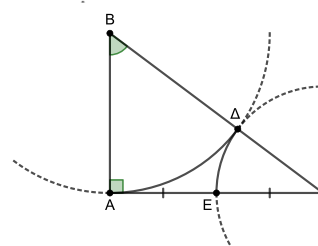


ΑΣΚΗΣΗ 186/ ΘΕΜΑ 4/22389

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Έστω ότι το E είναι το μέσο της $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$. (Μονάδες 8)

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R) . Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$. (Μονάδες 8)



γ) Έστω $\hat{B} = \mu^\circ$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $B\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$.

(Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ 187/ ΘΕΜΑ 4/22261

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και

$B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 90^\circ$. (Μονάδες 8)

β) η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με 120° . Δίνεται $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 5)

γ) η γωνία $BO\Gamma$ ισούται με 120° . (Μονάδες 5)

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή $B\Gamma$ και το κυρτογώνιο τόξο $B\Gamma$, είναι: $E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$. Δίνεται $\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 188/ ΘΕΜΑ 4/22244

Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές A, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1**. Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \text{ m}^2$. (Μονάδες 4)

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι

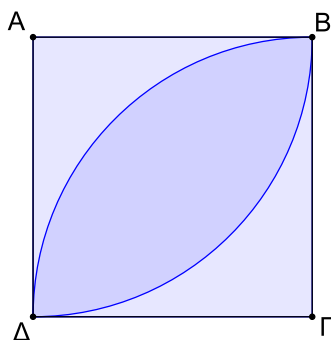
$50(\pi - 2) \text{ m}^2$. (Μονάδες 5)

β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2**.

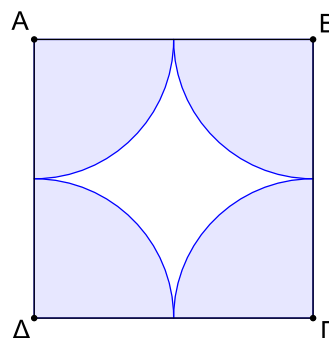
i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΑΣΚΗΣΗ 189/ ΘΕΜΑ 4/22098

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 4a$ και $A\Delta = pa$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου AB .

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

(Μονάδες 8)

β) Αν η διαγώνιος $B\Delta$ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο E και M είναι το μέσο της AB ,

i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = BD \cdot BE$ και $AD^2 = BD \cdot DE$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $BE = \frac{16a}{\sqrt{16+\pi^2}}$ και $DE = \frac{\pi^2 a}{\sqrt{16+\pi^2}}$, (Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το συν $\widehat{BME}$. (Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 190/ ΘΕΜΑ 4/22058

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R . Έστω AB διάμετρος του κύκλου και Δ, E σημεία της τέτοια ώστε $AD = DE = EB$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια $A\Delta$ και AE πάνω από τη διάμετρο AB και τα ημικύκλια BE και $B\Delta$ κάτω από τη διάμετρο AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ϵ_1 και ϵ_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων $A\Delta BZ$ και $BEAH$ αντίστοιχα.

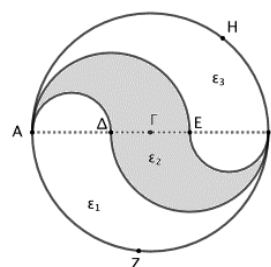
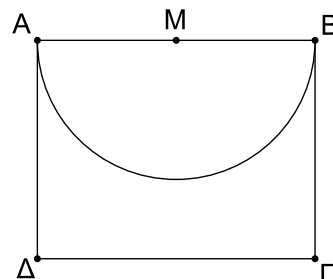
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν εστουγαμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος $A\Delta BE$.

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

(Μονάδες 05)



ΑΣΚΗΣΗ 191/ ΘΕΜΑ 4/2024

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του M, τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους AM, MB και AB γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του AB, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου AB και της κάθετης από το M στο AB.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια $\widehat{ZAM}$, $\widehat{EMB}$ και $\widehat{AB}$, όπου Z, E, Δ είναι τα μέσα των AM, MB και AB αντίστοιχα. (Μονάδες 09)

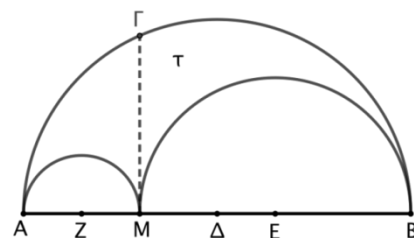
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου MΓ.

(Μονάδες 05)

δ) Για ποια θέση του M μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ;

(Μονάδες 05)

**ΑΣΚΗΣΗ 192/ ΘΕΜΑ 4/2021**

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 2\rho$. Με διάμετρο BΓ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $\widehat{AB\Gamma}$ με κέντρο το A και ακτίνα AB, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \rho\sqrt{2}$.

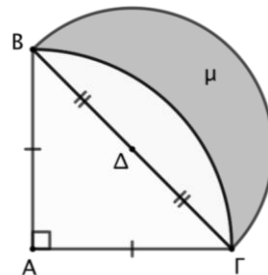
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ.

(Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

(Μονάδες 05)

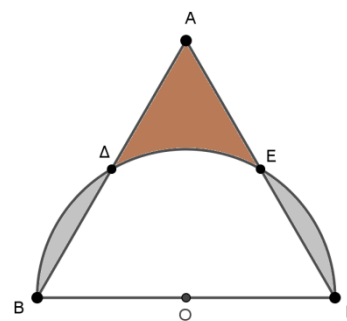
**ΑΣΚΗΣΗ 193/ ΘΕΜΑ 4/21979**

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, πλευράς $2a$. Με διάμετρο τη BΓ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές AB, AΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Αν Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma = a\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})a^2}{6}$. (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα AΔ, AE και το τόξο ΔΕ είναι: $E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)a^2}{6}$. (Μονάδες 8)

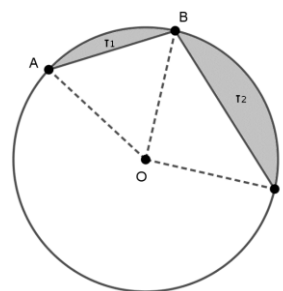
**ΑΣΚΗΣΗ 194/ ΘΕΜΑ 4/21659**

Για τα σημεία A, B και Γ του κύκλου (O, R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $AB = R$ και $B\Gamma = R\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R:

α) τα μήκη των τόξων AB, BΓ. (Μονάδες 8)

β) το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου AΓ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα $(\widehat{OAG})$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία AOG. (Μονάδες 8)

γ) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2) , όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα. (Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ 195/ ΘΕΜΑ 4/21138**

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος c_1 έχει κέντρο K και ακτίνα R και ο κύκλος c_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα $\rho = 2$. Οι αποστάσεις των K και Λ από την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων είναι $KO = \sqrt{3}$ και $LO = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

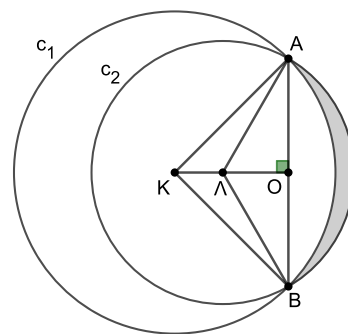
i) $OA = \sqrt{3}$,
(Μονάδες 6)

ii) $R = \sqrt{6}$.
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα εμβαδά:

i) των κυκλικών τομέων $K\widehat{AB}$ και $L\widehat{AB}$,
(Μονάδες 8)

ii) του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος.
(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ 196/ ΘΕΜΑ 4/21127

Ο κυκλικός δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει κέντρο Ο και ακτίνα R. Έστω AB μια χορδή του κύκλου και Μ η προβολή του Ο στην AB. Αν η ΜΟ προεκταθεί προς το Ο, τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ν. Δίνεται ότι $MN = \frac{3R}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $AB = R\sqrt{3}$,

(Μονάδες 6)

ii) $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

(Μονάδες 6)

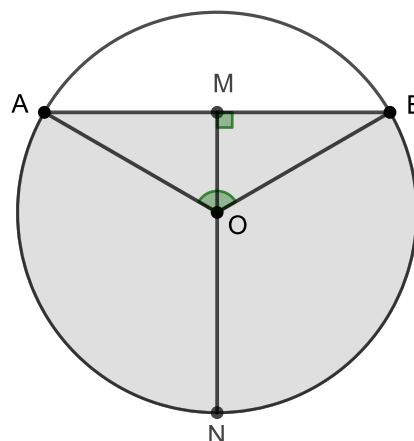
β) Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με $R = 10 \text{ cm}$. Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή AB και το $MN = 15 \text{ cm}$. Να βρείτε:

i) το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο $\widehat{ANB}$,

(Μονάδες 7)

ii) το μήκος του τόξου $\widehat{ANB}$.

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ 197/ ΘΕΜΑ 4/18043**

Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τα σημεία Α,Β,Γ και Δ. Η πλευρά ΑΔ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

α) Αν η πλευρά AB ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $\widehat{BG} = 120^\circ$:

i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας.

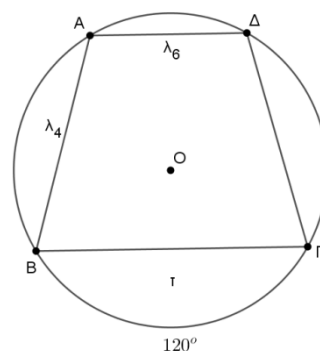
(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία ΒΟΓ.

(Μονάδες 10)

β) Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου AB;

(Μονάδες 07)

**ΑΣΚΗΣΗ 198/ ΘΕΜΑ 4/20361**

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και η χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο σημείο Α φέρνουμε την εφαπτομένη χ'χ του κύκλου και από το Β την κάθετη στην χ'χ που την τέμνει στο Γ.

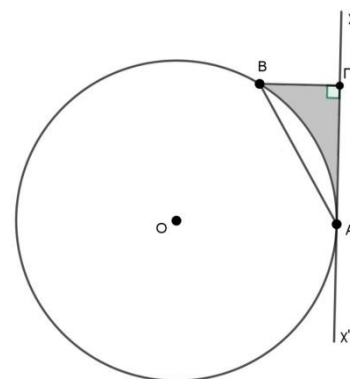
Να αποδείξετε ότι:

α) $AG = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 8)

β) $(OAGB) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$. (Μονάδες 7)

γ) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι:

$E = \frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$. (Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ 199/ ΘΕΜΑ Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας $R = 2 \text{ cm}$ καθώς και εγγεγραμμένο σ' αυτόν τετράγωνο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ε.

1. Να δείξετε ότι $BE = R = 2 \text{ cm}$ και $GE = 2R$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

3. Να υπολογίσετε τη περίμετρο του μεικτόγραμμου

γραμμοσκιασμένου τριγώνου ΒΓΕ.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου

τριγώνου ΒΓΕ.

