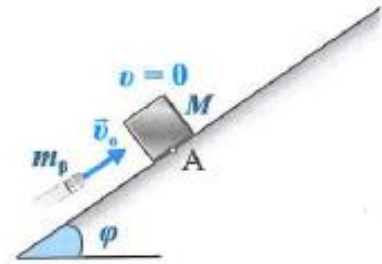


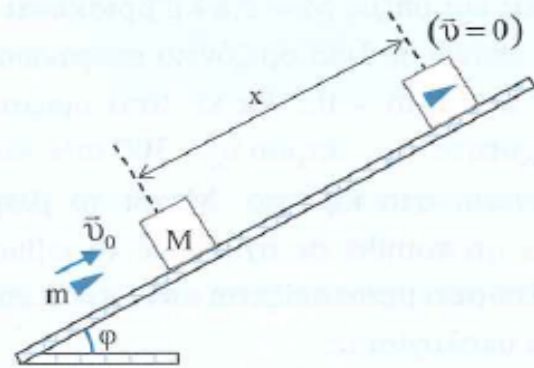
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.114 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα βλήμα μάζας $m_B = 0,4 \text{ kg}$ που κινείται παράλληλα σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ ($\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$) και το οποίο σφηνώνεται σε ακίνητο σώμα μάζας $M = 4,6 \text{ kg}$, έχοντας ελάχιστα πριν την κρούση κινητική ενέργεια $K_B = 12500 \text{ J}$. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται εμφανίζει με το κεκλιμένο επίπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Να υπολογίσετε:



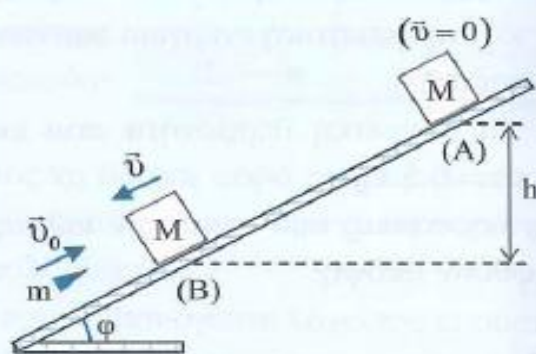
- το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος ελάχιστα πριν τη σύγκρουσή του με το σώμα μάζας M ,
- το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση,
- το μέγιστο ύψος από το σημείο της κρούσης στο οποίο θα φτάσει το συσσωμάτωμα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

24. Σώμα μάζας $M = 2,96 \text{ kg}$ συγκρατείται ακίνητο επάνω σε λείο πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Βλήμα μάζας $m = 40 \text{ g}$ κινείται με ταχύτητα $\bar{v}_0$ παράλληλα προς το πλάγιο επίπεδο με φορά προς τα επάνω και σφηνώνεται ακαριαία στο κέντρο του σώματος, όπως απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Ακριβώς πριν από την κρούση, αφήνουμε ελεύθερο το σώμα να κινηθεί και το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση ολισθαίνει επάνω στο πλάγιο επίπεδο κατά $x = 1,6 \text{ m}$ και ακινητοποιείται. Να υπολογίσετε:



- Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
 - Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος ακριβώς πριν από την κρούση.
 - Την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώμα - βλήμα εξαιτίας της κρούσης.
- Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

25. Μικρό, ξύλινο, συμπαγές κιβώτιο μάζας $M = 3 \text{ kg}$ αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση A λείου πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Το κιβώτιο ολισθαίνει κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου και όταν φθάσει στη θέση B σφηνώνεται ακαριαία στο κέντρο του βλήμα μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$, το οποίο κινείται παράλληλα με το πλάγιο επίπεδο με φορά προς τα επάνω, όπως απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

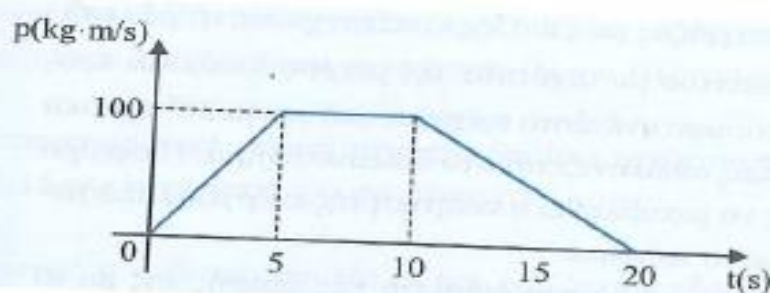


Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα που προκύπτει φθάνει στη θέση A του πλάγιου επιπέδου με μηδενική ταχύτητα. Εάν η κατακόρυφη απόσταση των θέσεων A και B είναι $h = 1,25 \text{ m}$, να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της ταχύτητας του ξύλινου κιβωτίου ακριβώς πριν σφηνωθεί σε αυτό το βλήμα.
- Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος ακριβώς πριν από την κρούση.
- Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος $0,4 \text{ s}$ μετά την κρούση.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

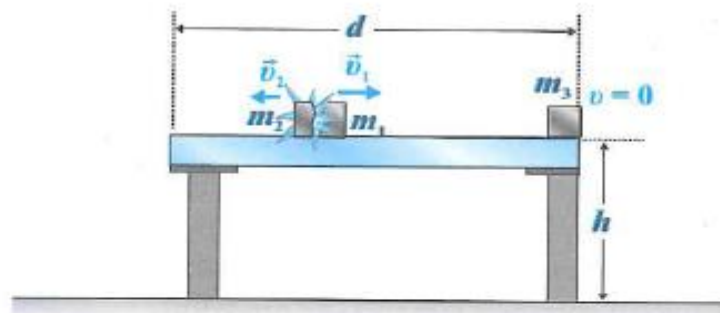
26. Σε σώμα μάζας $m = 4 \text{ kg}$, το οποίο ηρεμεί επάνω σε οριζόντιο επίπεδο, ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,25$. Η αλγεβρική τιμή της ορμής του σώματος συνάρτηση με τον χρόνο μεταβάλλεται όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



- Να περιγράψετε τα είδη των κινήσεων που εκτελεί το σώμα.
- Να σχεδιάσετε σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων τη γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με τον χρόνο.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 12 \text{ s}$.
- Να υπολογίσετε το έργο της τριβής και το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

5.18 Πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι, μήκους d και ύψους h , βρίσκεται ένα σώμα μάζας $M = 8 \text{ kg}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες m_1 και m_2 για τις οποίες ισχύει $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$, που κινούνται σε α-



ντίθετες κατευθύνσεις. Το κομμάτι μάζας m_1 , αφού διανύσει μήκος $d_1 = 1,5 \text{ m}$, συναντά τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5 \text{ s}$ ένα άλλο σώμα μάζας m_3 , το οποίο βρίσκεται ακίνητο στην άκρη του τραπεζιού. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά και το συσσωμάτωμα που δημιουργείται έχει αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα ίσου μέτρου με την ταχύτητα του κομματιού μάζας m_2 αμέσως μετά τη διάσπαση. Το συσσωμάτωμα ($m_1 + m_3$) και το σώμα μάζας m_2 εκτελούν οριζόντια βολή με την αντίσταση του αέρα αμελητέα και φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Να υπολογίσετε:

- τα μέτρα των ταχυτήτων των κομματιών μάζας m_1 και m_2 αμέσως μετά τη διάσπαση,
 - το μήκος d του τραπεζιού,
 - τη μάζα m_3 ,
 - το πηλίκο της ενέργειας που απελευθερώνεται από τη διάσπαση ($E_{\text{διασπ}}$) προς την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων μάζας m_1 και m_3 εξαιτίας της πλαστικής κρούσης ($E_{\text{απωλ}}$).
- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$. Η διάσπαση και η κρούση διαρκούν αμελητέο χρόνο. Τα σώματα θεωρούνται σημειακά αντικείμενα.

ΛΥΣΕΙΣ

4.114 α) Έχουμε $K_p = \frac{1}{2} m_p v_o^2$ ή $v_o^2 = \frac{2K_p}{m_p}$

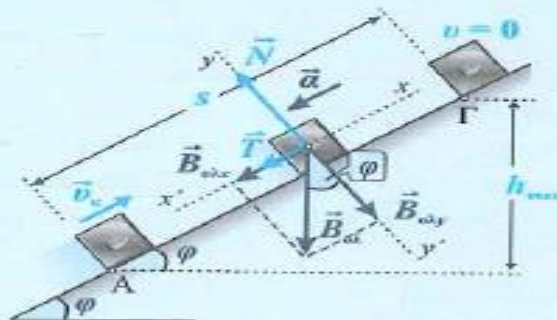
ή $v_o = \sqrt{\frac{2K_p}{m_p}}$ ή $v_o = 250 \text{ m/s}$.

β) Από την Α.Δ.Ο. έχουμε:

$\vec{p}_{\text{ολ,πρ}} = \vec{p}_{\text{ολ,τελ}}$ ή $m_p v_o = p_k$ ή $p_k = 100 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

γ) Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα $\vec{v}_k$. Είναι: $p_k = (M + m_p) v_k$ ή $v_k = 20 \text{ m/s}$ (μέτρο)

Για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρού-



ση έχουμε:

$\Sigma F_y = 0$ ή $N = (m_p + M)g \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$ ή $N = 40 \text{ N}$

Είναι $T = \mu N$ ή $T = 20 \text{ N}$ και

$\Sigma F_x = (m_p + M)a$ ή $B_{\text{ολ}(x)} + T = (m_p + M)a$

ή $a = \frac{(m_p + M)g \cdot \eta\mu\phi + T}{m_p + M}$ ή $a = 10 \text{ m/s}^2$.

Η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη. Έχουμε:

$v_{\text{τελ}} = v_o - a \cdot \Delta t$ ή $0 = v_k - a \cdot \Delta t$ ή $\Delta t = 2 \text{ s}$

Άρα $s = v_k \cdot \Delta t - \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$ ή $s = 20 \text{ m}$.

Συνεπώς $\eta\mu\phi = \frac{h_{\text{max}}}{s}$ ή $h_{\text{max}} = 12 \text{ m}$.

5.18 α) Επειδή $m_1 + m_2 = M$ και $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$, προκύπτει:

$$m_1 = 2 \text{ kg} \quad \text{και} \quad m_2 = 6 \text{ kg}$$

Από την Α.Δ.Ο. έχουμε:

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \quad \text{ή} \quad v_1 = 3v_2 \quad (1)$$

Όμως το κομμάτι μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα v_1 διανύει το μήκος d_1 σε χρόνο t_1 . Άρα: $d_1 = v_1 t_1$

$$\text{ή} \quad v_1 = 3 \text{ m/s}$$

Από την (1) προκύπτει: $v_2 = 1 \text{ m/s}$

β) Το κομμάτι μάζας m_2 και το συσσωμάτωμα εκτελούν οριζόντια βολή από το ίδιο ύψος και πέφτουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Επομένως ξεκίνησαν την ίδια στιγμή. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι τα κομμάτια μάζας m_1 και m_2 έφτασαν ταυτόχρονα στην άκρη του τραπεζιού. Επομένως είναι:

$$d = d_1 + d_2 \quad \text{ή} \quad d = d_1 + v_2 t_1 \quad \text{ή} \quad d = 2 \text{ m}$$

γ) Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση έχουμε $m_1 v_1 = (m_1 + m_3) v_k$ και επειδή $v_k = v_2 = 1 \text{ m/s}$, προκύπτει $m_3 = 4 \text{ kg}$.

$$\delta) \text{ Είναι } E_{\text{διασπ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{ή} \quad E_{\text{διασπ}} = 12 \text{ J}$$

$$\text{και } E_{\text{σπασ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_3) v_k^2 \quad \text{ή} \quad E_{\text{σπασ}} = 6 \text{ J.}$$

$$\text{Επομένως } \frac{E_{\text{διασπ}}}{E_{\text{σπασ}}} = 2.$$

26. α. Τα είδη των κινήσεων που εκτελεί το σώμα είναι:

Για $0 \leq t \leq 5 \text{ s}$, ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για $5 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$, ευθύγραμμη ομαλή και για $10 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$, ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

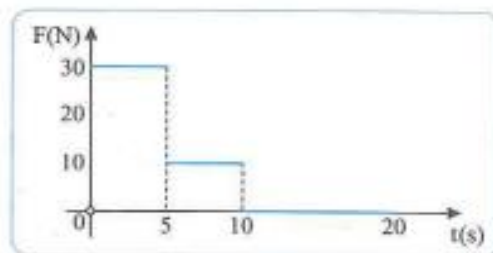
β. Το μέτρο της τριβής που ασκείται στο σώμα είναι: $T = \mu N = \mu mg$ ή $T = 10 \text{ N}$.

$$\text{Για } 0 \leq t \leq 5 \text{ s είναι: } \Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad F - T = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad F - 10 \text{ N} = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad \text{ή} \quad F = 30 \text{ N.}$$

$$\text{Για } 5 \leq t \leq 10 \text{ s είναι: } \Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad F - T = 0 \quad \text{ή} \quad F - 10 \text{ N} = 0 \quad \text{ή} \quad F = 10 \text{ N.}$$

$$\text{Για } 10 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s είναι: } \Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad F - T = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad F - 10 \text{ N} = -10 \text{ N} \quad \text{ή} \quad F = 0.$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



γ. Στο χρονικό διάστημα $10 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$ η ορμή του σώματος μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $p = 200 - 10t$, η οποία για $t = t_1 = 12 \text{ s}$ δίνει

$$p_1 = 80 \text{ kg} \cdot \text{m/s.} \text{ Επομένως, είναι: } p_1 = m v_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = \frac{p_1}{m} \quad \text{ή} \quad v_1 = 20 \text{ m/s.}$$

- δ. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο, αξιοποιώντας τη σχέση $v = \frac{p}{m}$, απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

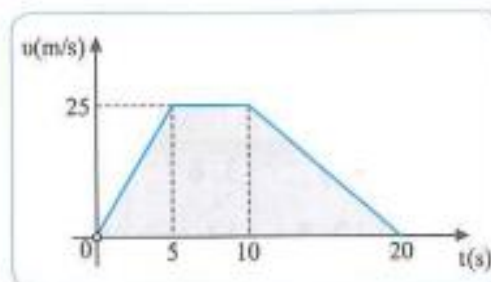
Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο διάγραμμα $v = f(t)$ ισούται αριθμητικά με τη μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 20$ s.

$$\text{Έχουμε: } \Delta x = \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 25 + 25 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 25 \right) \text{ m}$$

ή $\Delta x = 312,5$ m. Το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = -T \cdot \Delta x \quad \text{ή} \quad W_T = -3125 \text{ J. Από το θεώρημα έργου - ενέργειας έχουμε:}$$

$$\Delta K = \Sigma W \quad \text{ή} \quad K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_T \quad \text{ή} \quad 0 - 0 = W_F + W_T \quad \text{ή} \quad W_F = 3125 \text{ J.}$$



24. α. Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του συσσωματώματος έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2}(m+M)v_k^2 = -(m+M)gh \quad \text{ή} \quad v_k = \sqrt{2gh} \quad \text{ή} \quad v_k = 4 \text{ m/s.}$$

β. Από την Α.Δ.Ο. έχουμε: $\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \quad \text{ή} \quad mv_0 + 0 = (m+M)v_k \quad \text{ή} \quad v_0 = 300 \text{ m/s.}$

γ. Είναι: $E_{\text{αν}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_k^2 \quad \text{ή} \quad E_{\text{αν}} = 1776 \text{ J.}$

25. α. Η μηχανική ενέργεια του κιβωτίου στη διάρκεια της καθόδου του επί του πλάγιου επιπέδου διατηρείται. Έχουμε: $E_{\text{μηχ}(A)} = E_{\text{μηχ}(B)} \quad \text{ή} \quad K_A + U_A = K_B + U_B$

$$\text{ή} \quad 0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + 0 \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{2gh} \quad \text{ή} \quad v = 5 \text{ m/s.}$$

- β. Η μηχανική ενέργεια του συσσωματώματος στη διάρκεια της ανόδου του επί του πλάγιου επιπέδου διατηρείται. Έχουμε: $E_{\text{μηχ}(B)} = E_{\text{μηχ}(A)} \quad \text{ή} \quad K_B + U_B = K_A + U_A$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}(m+M)v_k^2 + 0 = 0 + (m+M)gh \quad \text{ή} \quad v_k = \sqrt{2gh} \quad \text{ή} \quad v_k = 5 \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \quad \text{ή} \quad mv_0 - Mu = (m+M)v_k \quad \text{ή} \quad v_0 = \frac{(m+M)v_k + Mu}{m} \quad \text{ή} \quad v_0 = 65 \text{ m/s.}$$

- γ. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την άνοδο του συσσωματώματος προς τη θέση Α, έχουμε: $\Sigma F_x = (M+m)a \quad \text{ή} \quad (M+m)gh = (M+m)a \quad \text{ή} \quad a = gh \quad \text{ή} \quad a = 5 \text{ m/s}^2.$

Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος $\Delta t = 0,4$ s μετά την κρούση είναι:

$$v'_k = v_k - a\Delta t \quad \text{ή} \quad v'_k = 3 \text{ m/s.}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι: $\frac{dK}{dt} = -\Sigma F_x \cdot v'_k = -(M+m)gh \cdot v'_k \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -52,5 \text{ J/s.}$