ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
8 Νοεμβρίου 2024

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις

$$\mathrm{A} = -\left(\frac{(-10)^2 - (-8)^2}{-(-6)^2}\right)^{2024} + \frac{10}{11}, \quad \mathrm{B} = -[(3-8)^2 + (-3)^3 + 1]^{2000} + \frac{30}{31}$$

και συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)

Έστω θετικός ακέραιος α τέτοιος, ώστε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 24 και α να είναι ίσο με 120. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του μέγιστου κοινού διαιρέτη των αριθμών 24 και α.

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

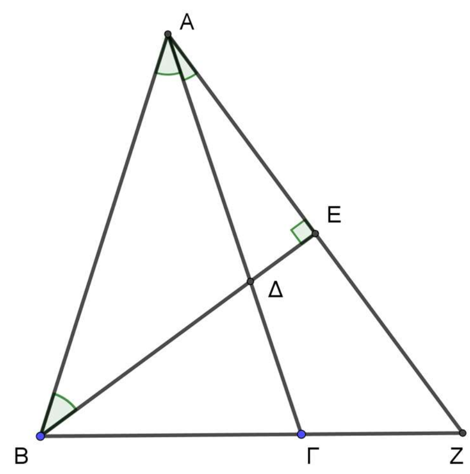
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε το τρίγωνο ΒΓΔ να είναι ισοσκελές με ΒΓ = ΒΔ. Το σημείο Ζ ανήκει στην ευθεία ΒΓ, έτσι ώστε η ευθεία ΑΖ να είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΔ στο σημείο Ε.

Δίνεται επίσης ότι: $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$.

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 2 \cdot \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι: ΑΓ = ΒΖ.



Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
8 Νοεμβρίου 2024

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=\left(\left(-\frac{99}{9}\right)^2+\frac{(-3)^5}{9^2}\right)\cdot(-2024)^0-118-\frac{2}{21},$$

$$B=\frac{(-20)^8}{4^8}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-8}-\frac{3}{32}\ .$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)

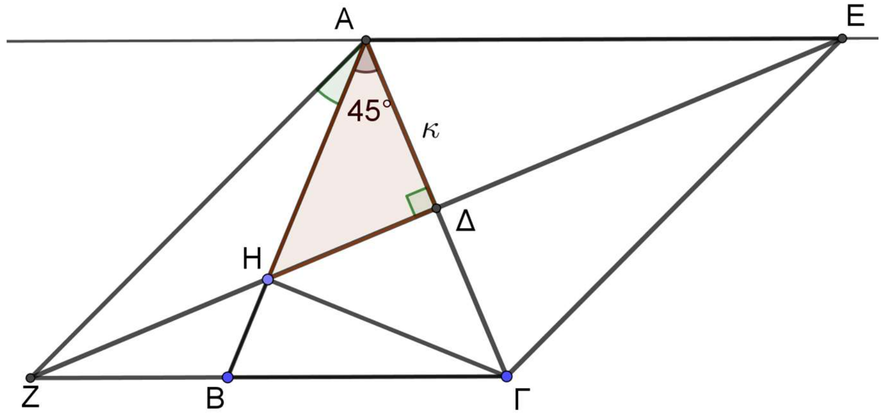
Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$ που είναι εικοσαπλάσιοι του αθροίσματος των ψηφίων τους.

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$ και $\widehat{\text{Α}}=45^o$. Το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο Α προς την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε, την πλευρά ΑΒ στο σημείο Η και την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\text{Ζ}\widehat{\text{Α}}\text{Β}$.

(β) Αν $\text{ΑΔ}=\kappa$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΓΕ συναρτήσει του κ.



Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες *Καλή επιτυχία!*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
8 Νοεμβρίου 2024

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο Α προς την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε, την πλευρά ΑΒ στο σημείο Η και την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι: $\text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = \text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η}$.

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΕ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(x^2+1)(y^2+1)+4(x-1)(y-1)+4(x+y-1)=0.$$

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{\beta}{\beta^2+\beta+1}=\alpha.$$

(α) Να εκφράσετε την παράσταση $\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}$ συναρτήσει του α.

(β) Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του α ώστε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\alpha.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες *Καλή επιτυχία!*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
8 Νοεμβρίου 2024

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του x, αν ισχύουν οι ισότητες:

$$x=\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\gamma+\delta+\alpha}=\frac{\gamma}{\delta+\alpha+\beta},$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του 0.

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{\mathrm{A}}=36^0$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΔ = ΑΒ. Από το Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ και πάνω σε αυτή παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΑΔ και τα σημεία Α και Ε να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΒΓ. Αν η ευθεία ΒΕ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ , να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ.

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Να βρείτε την αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$, έτσι ώστε να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x,y που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \quad \text{και} \quad \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=b.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες *Καλή επιτυχία!*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
8 Νοεμβρίου 2024

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$|\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma| = |\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1|,$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 \ \text{ και } \ \mathrm{B} = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 1.$$

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f(xy) = xf(y) + f(x) - 2024x.$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $f\big(f(1)\big) = 1$, να βρείτε την τιμή του $f(2025)$.

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Στο εξωτερικό ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ, με $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{\Delta B}$ και $\mathrm{AE} = \mathrm{E\Gamma}$, τέτοια ώστε

$$\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = 2 \cdot \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} \ \text{ και } \ \mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = 2 \cdot \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες *Καλή επιτυχία!*