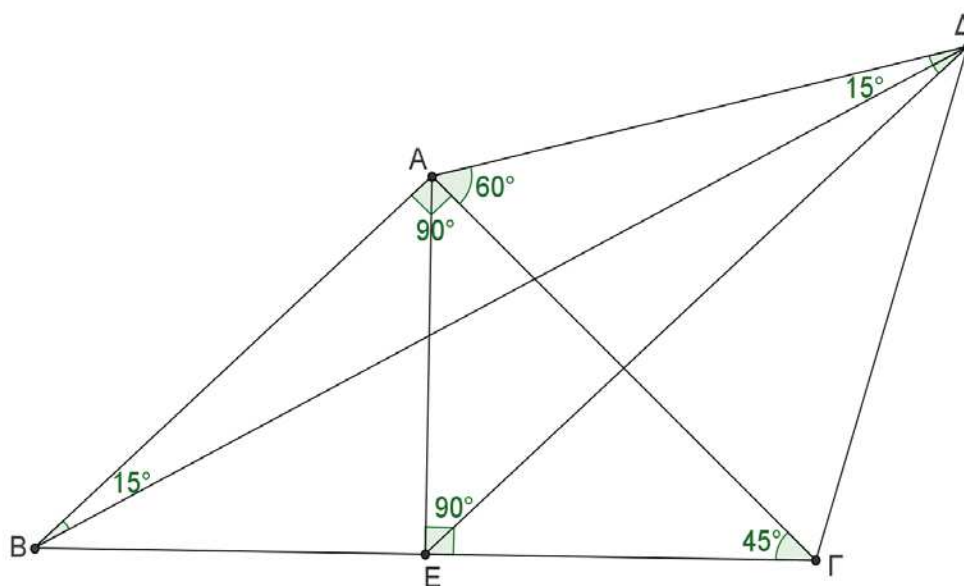




Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η διάμεσός του AE είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο AEG είναι ορθογώνιο στο E με μία γωνία του 45° . Επομένως θα έχει $\hat{EAG} = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $EA = EG$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε ότι: $\Delta A = \Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τα άκρα A και Γ του ευθύγραμμου τμήματος AG , οπότε η ευθεία DE είναι η μεσοκάθετη του AG .

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ λαμβάνουμε τις ισότητες $AB = AG = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε $\hat{\Delta\Gamma} = 60^\circ$, οπότε $\hat{\Delta AB} = \hat{\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma AB} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Επειδή $AB\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$\hat{A\Delta B} = \hat{AB\Delta} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες AB και DE είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία AG , που τις τέμνει η ευθεία $B\Delta$, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$\hat{B\Delta E} = \hat{AB\Delta} = 15^\circ$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13},$$

οπότε για $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256}{81} - 1}{\frac{256}{81} - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{175}{81}}{\frac{256}{81} - 3} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13.$$

2^{ος} τρόπος

Για όσους δεν γνωρίζουν την παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων, προτείνουμε την ακόλουθη λύση:

Έχουμε $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, οπότε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^4 - 1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 + 1\right)\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3\right)} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256 \cdot 256 - 81 \cdot 81}{81^2}}{\left(\frac{256 + 81}{81}\right)\left(\frac{256 - 243}{81}\right)} - \frac{6}{13} \\ &= \frac{\frac{65536 - 6561}{81^2}}{\left(\frac{337}{81}\right)\left(\frac{13}{81}\right)} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{58975}{81^2}}{\frac{337 \cdot 13}{81^2}} - \frac{6}{13} = \frac{58975}{337 \cdot 13} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4n}{100} = \frac{4n}{300} = \frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n = 75k$, όπου k θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση $170 \leq n \leq 230$, έχουμε:

$$170 \leq n = 75k \leq 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75} \leq k \leq \frac{230}{75} \Leftrightarrow 2 + \frac{20}{75} \leq k \leq 3 + \frac{5}{75} \Leftrightarrow k = 3.$$

Επομένως έχουμε $n = 75 \cdot 3 = 225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευρά α . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και του τετραπλεύρου $AB\Delta Z$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$.

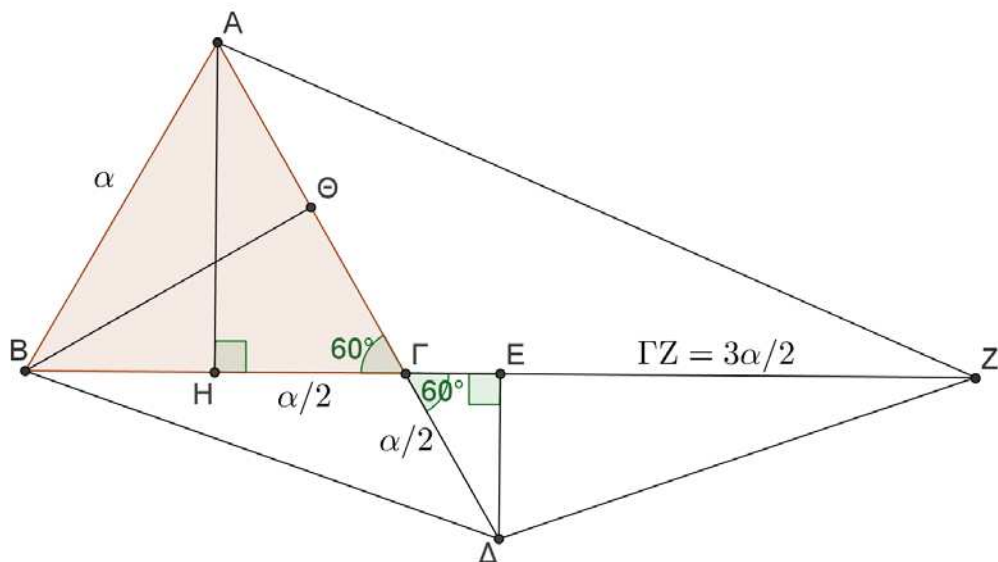
Λύση

Το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει βάση $A\Delta = \frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$B\Theta = AH = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot B\Theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο $AB\Delta Z$ έχουμε: $E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z)$.

Στο τρίγωνο ABZ έχουμε βάση $BZ = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $AH = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$E(ABZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο $B\Delta Z$ έχουμε βάση $BZ = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔE το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Gamma E\Delta$ ως εξής:

$$\frac{E\Delta}{AH} = \frac{\Gamma\Delta}{\Lambda\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E\Delta}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $E\Delta = \Gamma\Delta \eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$

Άρα έχουμε:

$$E(B\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

2^{ος} τρόπος

Έστω $E(AB\Gamma) = E$. Τότε $E(B\Gamma\Delta) = \frac{E}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος $B\Theta$ με το τρίγωνο $AB\Gamma$

και βάση $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$. Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = E(AB\Gamma) + E(B\Gamma\Delta) = \frac{3E}{2}.$$

Ακόμα έχουμε: $E(A\Gamma Z) = \frac{3E}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος $A\eta$ με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και

βάση $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$. Τέλος έχουμε $E(\Gamma\Delta Z) = \frac{3E}{4}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος $\Delta\epsilon$ με το

τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ και βάση $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$. Έτσι έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E + \frac{E}{2} + \frac{3E}{2} + \frac{3E}{4} = \frac{15E}{4}$$

και επομένως

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{3E/2}{15E/4} = \frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$,

αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι

ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 .

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα.

Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda \beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda \beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda \beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda \beta(\Delta_1)^2 + \lambda \beta(\Delta_2)^2}{\lambda \beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1) + \beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} \right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} \right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά $100 - 58 = 42\%$.

2^{ος} τρόπος

Επειδή στον πρώτο τρόπο διαπιστώνουμε στη σχέση (1) ότι ο λόγος $\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}$

εξαρτάται από τους λόγους των βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}$ και $\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}$, μπορούμε, χωρίς απώλεια

της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\beta(\Delta_1) = 3$ και $\beta(\Delta_2) = 7$ με $\beta(\Delta) = 10$.

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η αξία του τετραγώνου της μονάδας βάρους είναι 1, τότε έχουμε ότι $\alpha(\Delta_1) = 3^2 = 9$ και $\alpha(\Delta_2) = 7^2 = 49$ και $\alpha(\Delta) = 10^2 = 100$. Επομένως η μείωση της αξίας του διαμαντιού είναι $100 - (9 + 49) = 42$, δηλαδή σε ποσοστό 42%.