Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x<30$, οπότε πρέπει να είναι $x \geq 30$.

Παρατηρούμε ότι για $x=30$, έχουμε την περίπτωση

$$\text{Μ.Ο.} = \frac{\Sigma_{30}}{30} = \frac{8\cdot 100 + (30-8)\cdot 70}{30} = \frac{30\cdot 70 + 8\cdot 30}{30} = 70+8 = 78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του x είναι 30.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $A_1(x_1, 0)$ και $A_2(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (3\alpha - 5)x + 186 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 3a - 5, \qquad (1)$$

$$x_1 x_2 = 186 \qquad (2).$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $|x_1| < |x_2|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι με γινόμενο $186 = 2\cdot 3\cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1, x_2) \in \{(1,186), (2,93), (3,62), (6,31), (-1,-186), (-2,-93), (-3,-62), (-6,-31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2 + 5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι οι εξής: $64, \dfrac{100}{3}, \dfrac{70}{3}, 14, -\dfrac{182}{3}, -30, -20, -\dfrac{32}{3}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left\{ \begin{matrix} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{matrix} \right\}$$

Λύση (1ος τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το x^2y^2 η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

Επομένως, έχουμε $x^2 + y^2 - xy = \dfrac{91}{13} = 7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2(x^2 + y^2) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$, οπότε

$xy=3$ από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+y^2=10 \\ 2xy=6 \end{matrix}\right\},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+2xy=16 \\ x^2+y^2+2xy=4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (x+y)^2=16 \\ (x-y)^2=4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+y=\pm 4 \\ x-y=\pm 2 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+y=4 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x+y=-4 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x+y=-4 \\ x-y=-2 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(3,1) \text{ ή } (x,y)=(-1,-3) \text{ ή } (x,y)=(1,\,3) \text{ ή } (x,y)=(-3,-1).$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε

$$\left\{\begin{matrix} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (x^2+y^2)^2-(xy)^2=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{matrix}\right\},$$

οπότε, αν θέσουμε $\varphi=x^2+y^2$ και $\omega=xy$, λαμβάνουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix} \varphi^2-\omega^2=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (\varphi+\omega)(\varphi-\omega)=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi-\omega=7 \\ \varphi+\omega=13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi=10 \\ \omega=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{matrix}\right\}.$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $B\Delta$ τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $A\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $B\Delta H\Theta$, $B\Delta EK$ και $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμα.

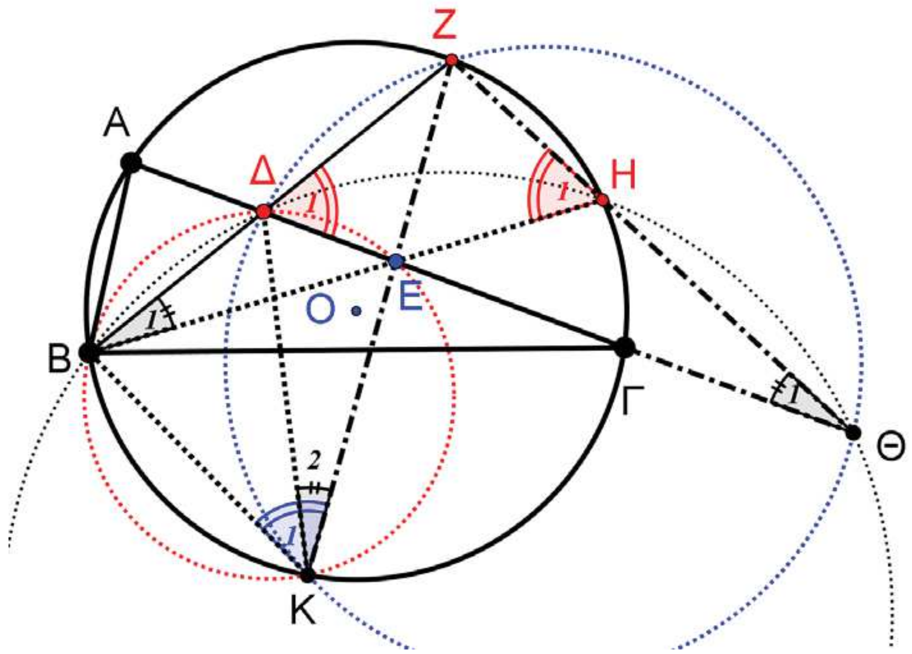
Λύση

Η γωνία $\hat{H}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(O,R)$ και βαίνει στο τόξο BZ. Άρα:

$$\hat{H}_1=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta Z$. Άρα:

$$\hat{\Delta}_1=\Delta\hat{A}Z+A\hat{Z}B=\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο** $B\Delta H\Theta$ **είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BKHZ$ έχουμε: $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$, η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου** $B\Delta EK$ **.**

Από το εγγράψιμο $B\Delta EK$ έχουμε: $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$.Από το εγγράψιμο $B\Delta H\Theta$ έχουμε: $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$. Άρα είναι: $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$.

Επομένως και **το τετράπλευρο** $\Delta Z\Theta K$ **είναι εγγράψιμο.**

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1,\ d_4 = n \ \text{ και } \ d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$
$$\Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 640 \Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$ και επειδή οι d_2 και d_3 είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 3 \cdot 159$ έχει και άλλους διαιρέτες.

- $1+d_2=5, 1+d_3=128 \Leftrightarrow d_2=4, d_3=127$, απορρίπτονται, αφού ο $n=4\cdot 127$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=8, 1+d_3=80 \Leftrightarrow d_2=7, d_3=79$, οπότε είναι $n=7\cdot 79=553$
- $1+d_2=10, 1+d_3=64 \Leftrightarrow d_2=9, d_3=63$, απορρίπτονται, αφού ο $n=9\cdot 63$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=16, 1+d_3=40 \Leftrightarrow d_2=15, d_3=39$, απορρίπτονται, αφού ο $n=15\cdot 39$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=20, 1+d_3=32 \Leftrightarrow d_2=19, d_3=31$, οπότε είναι $n=19\cdot 31=589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.