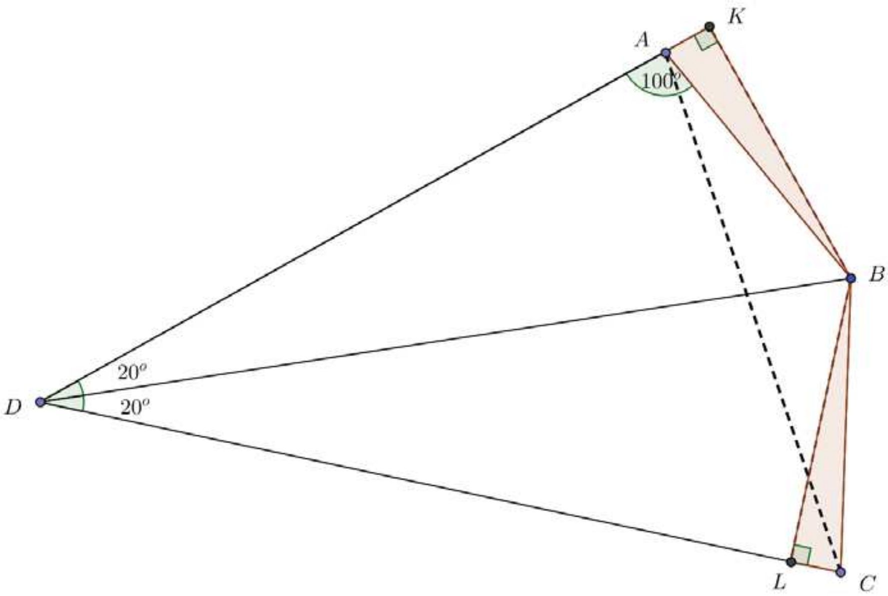
Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A}=100^\circ$ και $\hat{D}=40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$, θα έχουμε ότι $C\hat{D}B=B\hat{D}A=20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $D\hat{B}C=D\hat{C}B=80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $D\hat{B}A=180^\circ\text{-}\left(100^\circ+20^\circ\right)=60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL, αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK=BL$ και $B\hat{A}K=80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι $BA = BC$. Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $C\hat{A}B=20^\circ$.



Σχήμα 4

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \text{ και } \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1}-\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}=\frac{\left(x^k+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)-\left(x^{k+1}+1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}$$

$$=\frac{x^{k+2}+x^k+1-2x^{k+1}-1}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^k\left(x-1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)},$$

οπότε, αφού $x>0$ και k ακέραιος, έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\left\{\begin{array}{l}0, \quad \text{αν } x=1\\ >0, \text{ αν } 0<x\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}=\mathrm{B}, \quad \text{αν } x=1\\ \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{αν } 0<x\neq 1\end{array}\right\}.$$

2ος τρόπος

Έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{(x^k+1)(x^{k+2}+1)}{(x^{k+1}+1)^2}=\frac{x^{2k+2}+x^k+x^{k+2}+1}{(x^{k+1}+1)^2}$$

$$=1+\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{(x^{k+1}+1)^2}=1+\frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2}\geq 1.$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν, $x=1$.

Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}, \text{ αν } x=1 \text{ και } \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{ αν } 0<x\neq 1.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων $\left(x,y\right)$ που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2-10xy+13y^2+2\left|x-y\right|=5$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2-10xy+13y^2=5-2\left|x-y\right| \qquad (1)$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2-10xy+13y^2=2\left(x^2-5xy+\frac{25y^2}{4}\right)+13y^2-\frac{25y^2}{2}=2\left(x-\frac{5y}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}\geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν: $x-\frac{5y}{2}=y=0\Leftrightarrow x=y=0$.

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5-2\left|x-y\right|\geq 0\Leftrightarrow\left|x-y\right|\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left|x-y\right|\in\{0,1,2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1. $\left|x-y\right|=0\Leftrightarrow x=y$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2-10x^2+13x^2=5\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $\left(x,y\right)=\left(-1,-1\right)$ ή $\left(x,y\right)=\left(1,1\right)$.

2. $\left|x-y\right|=1\Leftrightarrow x-y=1 \text{ ή } x-y=-1\Leftrightarrow x=y+1 \text{ ή } x=y-1$.

Για $x=y\pm 1$ η εξίσωση γίνεται: $2\left(y\pm 1\right)^2-10\left(y\pm 1\right)y+13y^2=3$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 56$

3. $|x-y| = 2 \Leftrightarrow x-y=2$ ή $x-y=-2 \Leftrightarrow x=y+2$ ή $x=y-2$.

Για $x=y+2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y+2)^2 - 10(y+2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \dfrac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = \dfrac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x,y) = (3,1)$

Για $x=y-2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y-2)^2 - 10(y-2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \dfrac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = -\dfrac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x,y) = (-3,-1)$.

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(3,1)$, $(-3,-1)$.

Πρόβλημα 3

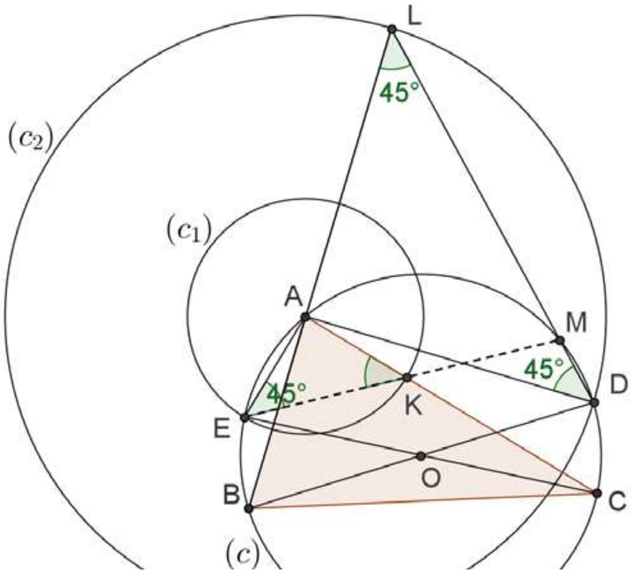
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $\mathrm{AB} < \mathrm{AC} < \mathrm{BC}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο Α και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του Α) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται πάνω στο κύκλο (c).

Λύση

Έστω Μ το σημείο τομής της DL με τον κύκλο (c) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Ε, Κ, Μ βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία $\mathrm{E\hat{A}C}$ είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο EC του κύκλου (c). Το τρίγωνο ΑΕΚ είναι ισοσκελές (διότι ΑΕ, ΑΚ είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα:

$$\mathrm{A\hat{E}K} = \mathrm{A\hat{K}E} = 45^\circ. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία $\mathrm{B\hat{A}D}$ είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο BD του κύκλου (c), οπότε και η γωνία $\mathrm{D\hat{A}L}$ είναι ορθή. Το τρίγωνο ADL είναι ισοσκελές (διότι AD, AL είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)). Άρα έχουμε

$$\mathrm{A\hat{D}L} = \mathrm{A\hat{L}D} = 45^\circ. \qquad (2)$$

Οι γωνίες $\mathrm{A\hat{D}M}=\mathrm{A\hat{D}L}$ και $\mathrm{A\hat{E}M}$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$, δηλαδή

$$\mathrm{A\hat{E}M} = \mathrm{A\hat{D}L} \qquad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $\mathrm{A\hat{E}K} = \mathrm{A\hat{E}M} = 45^\circ$, οπότε τα σημεία E, K, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8\cdot 100 + (x-8)\cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x + 240, \qquad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq \frac{70x+240}{x} = 70 + \frac{240}{x}\ . \qquad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x < 30$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq 70 + \frac{240}{x} > 70 + \frac{240}{30} = 78, \qquad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.

Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x<30$, οπότε πρέπει να είναι $x\geq 30$.

Παρατηρούμε ότι για $x=30$, έχουμε την περίπτωση

$$\text{Μ.Ο.}=\frac{\Sigma_{30}}{30}=\frac{8\cdot 100+(30-8)\cdot 70}{30}=\frac{30\cdot 70+8\cdot 30}{30}=70+8=78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του x είναι 30.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y=x^2-(3\alpha-5)x+186,\ \alpha\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής $y=x^2-(3\alpha-5)x+186,\ \alpha\in\mathbb{R}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $\mathrm{A}_1(x_1,0)$ και $\mathrm{A}_2(x_2,0)$, όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-(3\alpha-5)x+186=0,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1+x_2=3a-5, \qquad (1)$$
$$x_1x_2=186 \qquad (2).$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $|x_1|<|x_2|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι με γινόμενο $186=2\cdot 3\cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1,x_2)\in\{(1,186),(2,93),(3,62),(6,31),(-1,-186),(-2,-93),(-3,-62),(-6,-31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha=\dfrac{x_1+x_2+5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι οι εξής: $64,\dfrac{100}{3},\dfrac{70}{3},14,-\dfrac{182}{3},-30,-20,-\dfrac{32}{3}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{array}\right\}$$

Λύση (1^ος τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το x^2y^2 η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)$$

Επομένως, έχουμε $x^2+y^2-xy=\dfrac{91}{13}=7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2\left(x^2+y^2\right)=20\Leftrightarrow x^2+y^2=10$, οπότε