Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}.$$

Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε $x=2014$, η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A}=\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^2+(2x+1)^2}+\frac{(x+2)^3+(x-2)^3-18x}{x^2+(2x-1)^2}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+1\right)^2-(4x)^2}$$

$$=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2+4x+1}+\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2-4x+1}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}$$

$$=2x\left(x^2+3\right)\left[\frac{1}{5x^2+4x+1}+\frac{1}{5x^2-4x+1}-\frac{2\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right]$$

$$=2x\left(x^2+3\right)\left(\frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right)=2x\left(x^2+3\right)\cdot 0=0.$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3-2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}=0$$

Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι x ευρώ και τόμου Β είναι y ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x+120y=4000 \Leftrightarrow 5x+6y=200 \qquad (1)$$

$$50\cdot\frac{90x}{100}+60\cdot\frac{80y}{100}=1680 \Leftrightarrow 45x+48y=1680 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{cases} 5x+6y=200 \\ 45x+48y=1680 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 45x+54y=1800 \\ 45x+48y=1680 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 6y=120 \\ 45x+48y=1680 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} y=20 \\ x=\dfrac{1680-48y}{45} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} y=20 \\ x=16 \end{cases}\right\}.$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(x^2+y^2+xy\right)^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)\\ &=x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3\\ &=x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4.\end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(x^2+y^2+xy\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2+(xy)^2+2\left(x^2+y^2\right)xy\\ &=x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2+2x^3y+2xy^3\\ &=x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4.\end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\left(x^2+y^2+2xy\right)^2=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right]=2\left[x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4\right]\\ &=2\left[2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4\right]=4\left(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4\right)\\ &=4\left(x^2+y^2+xy\right)^2,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{\mathrm{B}}=\left|2\left(x^2+xy+y^2\right)\right|=2\left(x^2+xy+y^2\right)\in\mathbb{Q},$$

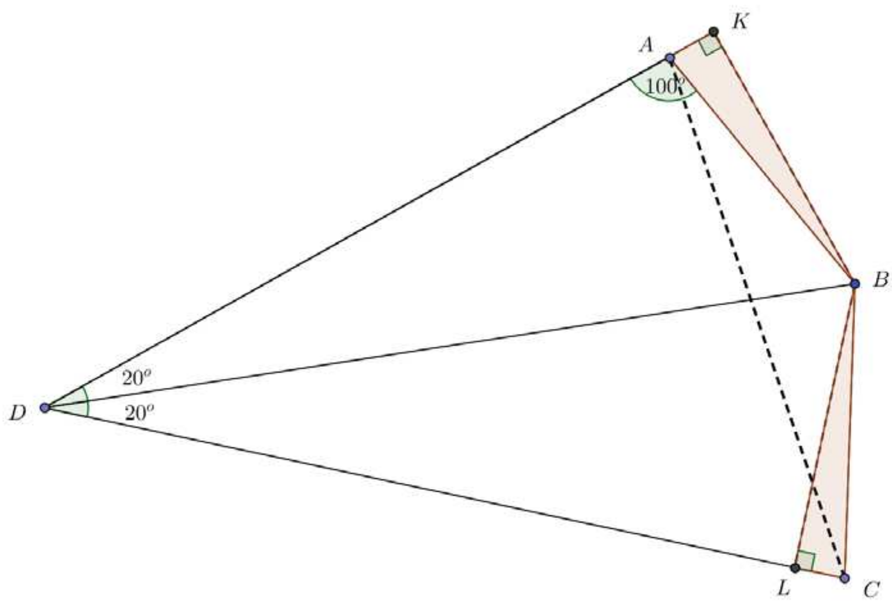
αφού οι αριθμοί x, y είναι ρητοί και $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geq 0.$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A}=100^\circ$ και $\hat{D}=40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$, θα έχουμε ότι $C\hat{D}B=B\hat{D}A=20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $D\hat{B}C=D\hat{C}B=80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $D\hat{B}A=180^\circ\text{-}\left(100^\circ+20^\circ\right)$=$60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL, αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK=BL$ και $B\hat{A}K=80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι $BA = BC$. Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $C\hat{A}B=20^\circ$.



Σχήμα 4

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \text{ και } \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε: