

υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\nu \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \nu.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων), οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\nu) = 7 \cdot (108 + \nu) \Leftrightarrow \text{(από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\nu = 756 + 7\nu \Leftrightarrow 18\nu = 36 \Leftrightarrow \nu = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110.$$

2^{ος} τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \nu_1$, με $\nu_1 = 0, 1, 2, \dots, 17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \nu_2$, με $\nu_2 = 0, 1, 2, \dots, 11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\nu_1 = 5\nu_2$ είναι τα :

$$(\nu_1, \nu_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα

$$\frac{154}{110} \text{ που είναι ισοδύναμο με το } \frac{7}{5}.$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Λύση

Έχουμε: $4 < 5$, οπότε $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$. Είναι

$2,1^2 = 4,41, 2,2^2 = 4,84$ και $2,3^2 = 5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha = 2,2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $A = 2$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

Λύση

Έχουμε $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{2} < \frac{-2\beta}{-2} < \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \frac{5}{2}$. Επειδή ο

β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta = 1$ ή $\beta = 2$.

- Για $\beta = 1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < x \Leftrightarrow x > 1$.
- Για $\beta = 2$ η ανίσωση γίνεται:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 \cdot x < -1, \text{ η οποία είναι αδύνατη.}$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi' \chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2, -6)$. Το σημείο A ανήκει στον άξονα $\chi' \chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα $\psi' \psi$ και στην ευθεία (ε).

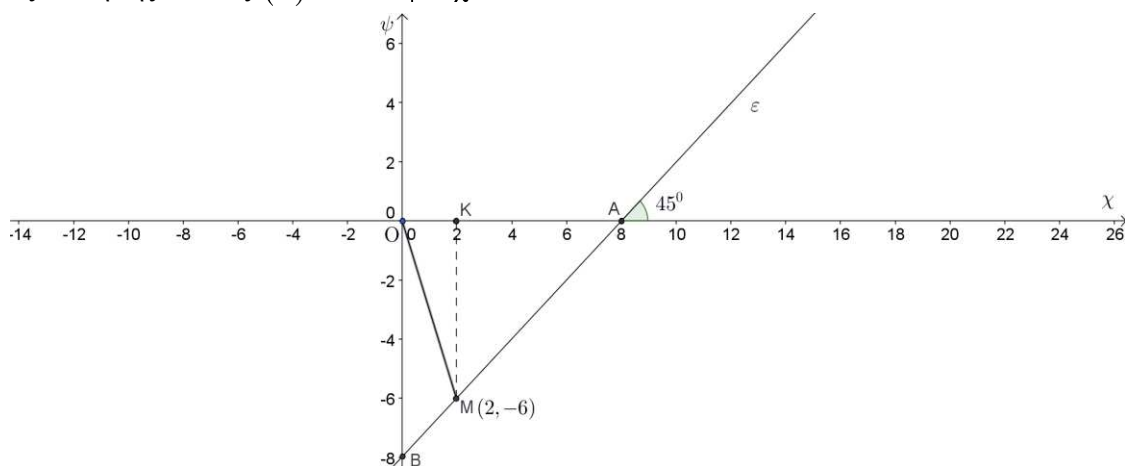
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM.

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi = a\chi + \beta$, όπου $a = \tan 45^\circ = 1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $M(2, -6)$ έχουμε ότι $-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $\psi = \chi - 8$



Σχήμα 2

β) Τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τους άξονες $\chi' \chi$ και $\psi' \psi$ είναι τα $A(8, 0)$ και $B(0, -8)$, αντίστοιχα. Άρα έχουμε

$$(OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

γ) Αν K είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$, τότε το τρίγωνο KMA είναι ορθογώνιο στο K και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $KM = 6$ και $KA = 6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$AM = \sqrt{KM^2 + KA^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB λαμβάνουμε:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα OAM και OAB έχουν κοινό ύψος από την κορυφή O, έστω $υ$, έχουμε:

$$(\text{OAM}) = \frac{3}{4}(\text{OAB}) = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24 \text{ τετρ. μονάδες}$$

Το εμβαδό του τριγώνου OAM μπορεί να υπολογιστεί παρατηρώντας ότι το KM είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά OA (του τριγώνου OAM).

Οπότε: $(OAM) = \frac{1}{2} KM \cdot OA = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24$.

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{AB}$ σε μοίρες.
 (β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $OB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

(α) Επειδή το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές ($OA = OB = R$), έπεται ότι:

Επειδή το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές ($ΟΓ = ΟΒ = R$), έπεται ότι:

Άρα έχουμε: $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{O\hat{B}\Gamma} - \widehat{O\hat{B}A} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$ και $\widehat{A\Gamma} = 40^\circ$.

(β) Το ύψος του τριγώνου ΟΓΒ είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{O}B$,
 οπότε $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ - O\hat{G}\Delta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, οπότε θα είναι και $\Gamma\hat{O}E = 60^\circ$. Άρα το
 τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\Gamma E = O\Gamma = R$. Επειδή η ευθεία ΟΕ είναι

μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $EB = GE = R$, οπότε το τετράπλευρο OBEΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $OD = OG \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, και $GD = OG \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ οπότε

$$(OBE\Gamma) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Παρατήρηση

Ο ρόμβος OBEΓ, αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς R που το κάθε ένα από αυτά (τα τρίγωνα) έχει εμβαδό $\frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$. Άρα το εμβαδό του ρόμβου θα είναι:

$$(OBE\Gamma) = 2 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ και } (\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{array} \right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y) , να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β .

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = \frac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\frac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \\ \omega = -\frac{1}{4} \end{array} \right\},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2) , οπότε θα έχουμε;

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - 4\beta = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ -\beta = -4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 10 \\ \beta = 4 \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \quad \text{και} \quad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.