

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA=BT$). Άρα $\hat{MAT}=\hat{NTA}$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_r) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN=AM+MN$ και $MT=TN+MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN . Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \parallel AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \parallel AT$. Άρα $MN \parallel K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MKAN$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MKAN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

Λύση

Περιορισμός: $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 5$. Η εξίσωση, για $x \leq 0$ ή $x \geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + (x^2 - 5x) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x^2 - 5x})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \quad (E_1) \quad \text{ή} \quad x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \quad (E_2)$$

$$\bullet \quad (E_1): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, x \geq 5, \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\bullet \quad (E_2): x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}, -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}.$$

Πρόβλημα 2

Αν α, β ακέραιοι και ο αριθμός $A = \alpha^2 + 2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = \alpha^2 + \beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Λύση

Έστω ότι $A = \alpha^2 + 2\beta = x^2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$. Τότε $\beta = \frac{x^2 - \alpha^2}{2}$. Επειδή $\beta \in \mathbb{Z}$, πρέπει ο

αριθμητής $x^2 - \alpha^2$ να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Έτσι έχουμε

$$\alpha^2 + \beta = \alpha^2 + \frac{x^2 - \alpha^2}{2} = \frac{x^2 + \alpha^2}{2} = \frac{(x+\alpha)^2 + (x-\alpha)^2}{4} = \left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2,$$

όπου οι αριθμοί $\frac{x+\alpha}{2}$ και $\frac{x-\alpha}{2}$ είναι ακέραιοι, αφού οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Πρόβλημα 3

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση

$$4x^4 + (8+4a)x^3 + (a^2+8a+4)x^2 + (a^3+8)x + a^2 = 0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} & 4x^4 + (8+4a)x^3 + (a^2+8a+4)x^2 + (a^3+8)x + a^2 \\ &= (4x^4 + 8x^3 + a^2x^2) + (4ax^3 + 8ax^2 + a^3x) + (4x^2 + 8x + a^2) \\ &= x^2(4x^2 + 8x + a^2) + ax(4x^2 + 8x + a^2) + (4x^2 + 8x + a^2) \\ &= (4x^2 + 8x + a^2)(x^2 + ax + 1). \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, και τα δύο τριώνυμα $x^2 + ax + 1$ και $4x^2 + 8x + a^2$ έχουν πραγματικές ρίζες

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad 64 - 16a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad a^2 - 4 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = -2 \text{ ή } a = 2. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B, AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο Λ . Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο M . Οι κύκλοι $C_B(B, AB)$, $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O, R)$ στο σημείο Σ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Λ, N, T είναι συνευθειακά.

(β) Να αποδείξετε ότι οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΓAN είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma N$ ως ακτίνες του κύκλου C_Γ). Άρα $\hat{A}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{N}\hat{A}\hat{\Gamma}$.

