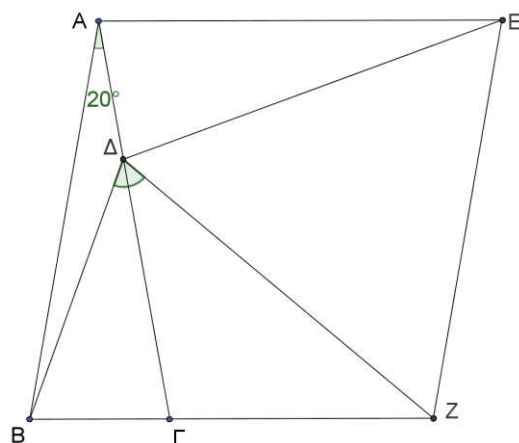




Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{A} = 20^\circ$ και $AE \parallel B\Gamma$ έχουμε ότι:

$$\hat{E}\hat{A}\Delta = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta A$ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($AB = EA$, $B\Gamma = A\Delta$) και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες ($\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} = 80^\circ$).

Επομένως, έχουμε: $E\Delta = A\Gamma = AB$, $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 20^\circ$.

Επειδή το παραλληλόγραμμο $BAEZ$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ($AE = AB$), είναι ρόμβος, οπότε $EZ = AB = E\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $\hat{A}\hat{E}\hat{Z} = \hat{B} = 80^\circ$. Επομένως $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z} = \hat{A}\hat{E}\hat{Z} - \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισόπλευρο.

Τότε είναι: $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{E} - \hat{\Delta}\hat{Z}\hat{E} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $BZ\Delta$ ($ZB = AB = Z\Delta$) προκύπτει ότι: $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{Z} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 + 3x + 1}{x} - \frac{27x}{9x^2 + 3x + 1} \geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι και $9x^2 + 3x + 1 > 0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
& (9x^2 + 3x + 1)^2 - 27x^2 \geq 6x(9x^2 + 3x + 1) \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 3x + 1)^2 - 6x(9x^2 + 3x + 1) - 27x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 27x^2 \geq 0. \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 1)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 1)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (9x^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}
\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, αφού $x > 0$.

Πρόβλημα 2

Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = \beta$.

Λύση

Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (1)$$

$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \quad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\alpha(\beta^2 - 1) + \beta(\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)(\alpha\beta + \alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta + \alpha + \beta = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta = 1$, τότε $\alpha + \gamma = -1$ και $\alpha + \gamma = 0$, αδύνατο.

Άρα είναι $\beta \neq 1$, οπότε θα είναι:

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta + 1} = -1 + \frac{1}{\beta + 1}.$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ πρέπει: $\frac{1}{\beta + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2, 0\}$. Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$, οπότε έχουμε: $\alpha + \gamma = 0$ και $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0$, το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha \neq 0$.
- $\beta = -2$, οπότε έχουμε $\alpha + \gamma = 2$ και $4\alpha + \gamma = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2, \gamma = 4$. Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2, 4)$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Λύση

Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακεραίους λ έχει λύση ως προς x η εξίσωση

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2 - \lambda)x^2 + (1 + \lambda)x - 2(2 + \lambda) = 0.$$

Αν $\lambda = 2$ προκύπτει από την εξίσωση η λύση $x = \frac{8}{3}$.

Αν $\lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς x , αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta = (\lambda + 1)^2 + 8(4 - \lambda^2) = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 = (-\lambda^2 + 2\lambda) + (33 - 6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq 3$ και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε $\Delta < 0$. Επομένως, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι: $\lambda = 1$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$.

Άρα για $x = \frac{8}{3}$ το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για $x = -1 \pm \sqrt{7}$ παίρνει την ακέραια τιμή 1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B, AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο A . Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K, A, M, N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων C_A και C_B . Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία T, A, Γ είναι συνευθειακά.

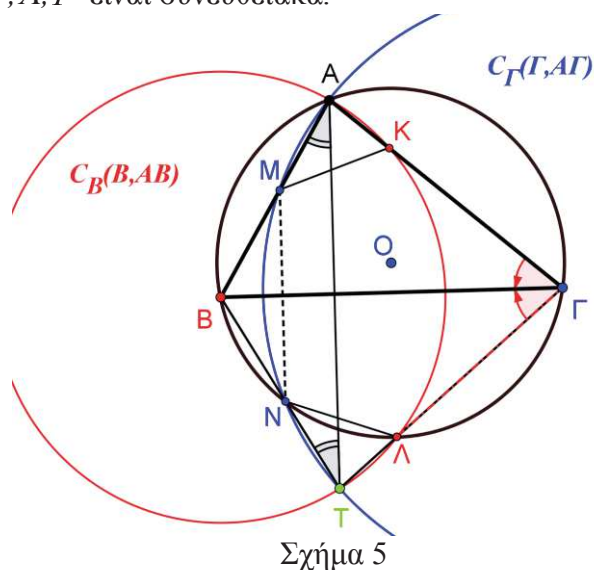
Οι χορδές BA και BA του κύκλου C είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου C_A , οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο C) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$\hat{B\Gamma A} = \hat{B\hat{\Gamma}A} = \hat{\Gamma} \quad (1).$$

Η $B\Gamma$ είναι διάκεντρος των κύκλων C_B και C_Γ , οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής AT και θα διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Gamma}T$, δηλαδή

$$\hat{B\Gamma A} = \hat{B\hat{\Gamma}T} = \hat{\Gamma} \quad (2).$$

Άρα τα σημεία T, A, Γ είναι συνευθειακά.



Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία T, N, B είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA=BT$). Άρα $\hat{MAT}=\hat{NTA}$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_F) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN=AM+MN$ και $MT=TN+MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN . Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \parallel AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \parallel AT$. Άρα $MN \parallel K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MKAN$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MKAN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

Λύση

Περιορισμός: $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 5$. Η εξίσωση, για $x \leq 0$ ή $x \geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + (x^2 - 5x) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x^2 - 5x})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \quad (E_1) \quad \text{ή} \quad x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \quad (E_2)$$

$$\bullet \quad (E_1): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, x \geq 5, \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\bullet \quad (E_2): x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}, -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}.$$

Πρόβλημα 2

Αν α, β ακέραιοι και ο αριθμός $A = \alpha^2 + 2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = \alpha^2 + \beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Λύση

Έστω ότι $A = \alpha^2 + 2\beta = x^2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$. Τότε $\beta = \frac{x^2 - \alpha^2}{2}$. Επειδή $\beta \in \mathbb{Z}$, πρέπει ο

αριθμητής $x^2 - \alpha^2$ να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Έτσι έχουμε

$$\alpha^2 + \beta = \alpha^2 + \frac{x^2 - \alpha^2}{2} = \frac{x^2 + \alpha^2}{2} = \frac{(x + \alpha)^2 + (x - \alpha)^2}{4} = \left(\frac{x + \alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - \alpha}{2}\right)^2,$$