

μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $EB = GE = R$, οπότε το τετράπλευρο OBEΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $OD = OG \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, και $GD = OG \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ οπότε

$$(OBE\Gamma) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Παρατήρηση

Ο ρόμβος OBEΓ, αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς R που το κάθε ένα από αυτά (τα τρίγωνα) έχει εμβαδό $\frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$. Άρα το εμβαδό του ρόμβου θα είναι:

$$(OBE\Gamma) = 2 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{array} \right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y) , να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β .

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = \frac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\frac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \\ \omega = -\frac{1}{4} \end{array} \right\},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2) , οπότε θα έχουμε;

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - 4\beta = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ -\beta = -4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 10 \\ \beta = 4 \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \quad \text{και} \quad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

Λύση

(α) Επειδή $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$, έπεται ότι $x > y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει: $z = 2x + 2y = 12y$, οπότε $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$, οπότε $z > x$.

Άρα έχουμε: $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y > 0$, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι: $(x, y, z) = (10, 2, 24)$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A = 8x + 1$ και $B = 2x - 3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω $A = 8x + 1 = \alpha^2$ και $B = 2x - 3 = \beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x = \frac{\alpha^2 - 1}{8} = \frac{\beta^2 + 3}{2} \quad (1)$$

και

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = 13. \quad (2)$$

Από τη σχέση 92) έχουμε:

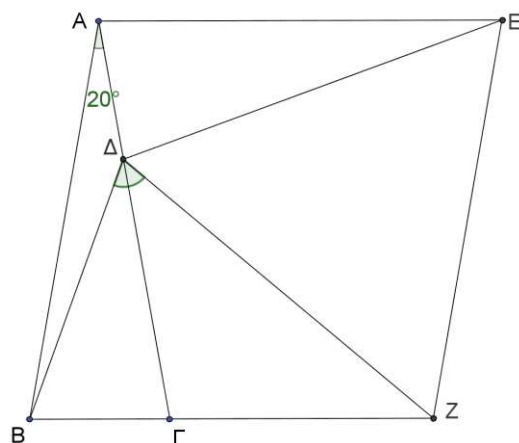
$$\begin{aligned} \alpha^2 - 4\beta^2 = 13 &\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 13 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 13 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -13 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 13 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = -13 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (7, 3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (-7, -3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (7, -3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (-7, 3). \end{aligned}$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1), προκύπτει ότι: $x = 6$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 20^\circ$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Από το σημείο A φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα AE τέτοιο ώστε $AE \parallel B\Gamma$, $AE = AB$ και με τα σημεία E και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AB . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $BAEZ$. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{\Delta}Z$.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{A} = 20^\circ$ και $AE \parallel B\Gamma$ έχουμε ότι:

$$\hat{E}\hat{A}\Delta = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta A$ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($AB = EA$, $B\Gamma = A\Delta$) και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες ($\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} = 80^\circ$).

Επομένως, έχουμε: $E\Delta = A\Gamma = AB$, $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 20^\circ$.

Επειδή το παραλληλόγραμμο $BAEZ$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ($AE = AB$), είναι ρόμβος, οπότε $EZ = AB = E\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $\hat{A}\hat{E}\hat{Z} = \hat{B} = 80^\circ$. Επομένως $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z} = \hat{A}\hat{E}\hat{Z} - \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισόπλευρο.

Τότε είναι: $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{E} - \hat{\Delta}\hat{Z}\hat{E} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $BZ\Delta$ ($ZB = AB = Z\Delta$) προκύπτει ότι: $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{Z} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 + 3x + 1}{x} - \frac{27x}{9x^2 + 3x + 1} \geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι και $9x^2 + 3x + 1 > 0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι: