

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 7)

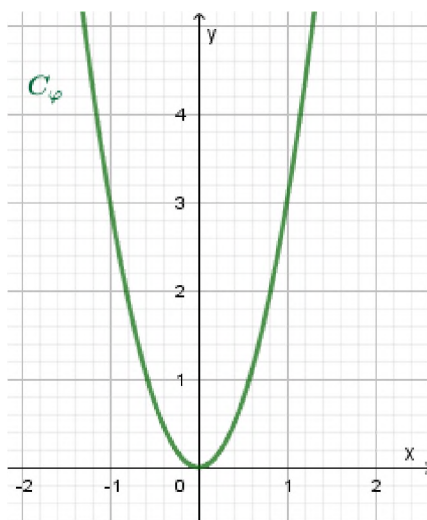
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$.

Επομένως είναι άρτια συνάρτηση.

Η γραφική της παράσταση είναι η παρακάτω παραβολή.

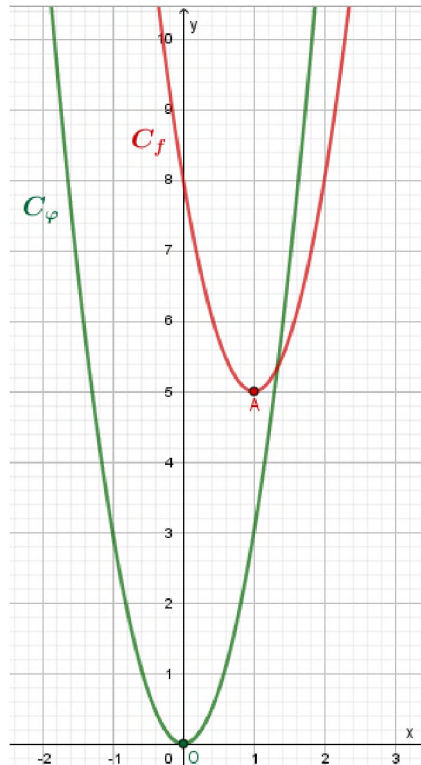


β) Είναι:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 8 = 3\left(x^2 - 2x + \frac{8}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{3}\right) = 3\left[(x-1)^2 + \frac{5}{3}\right]$$

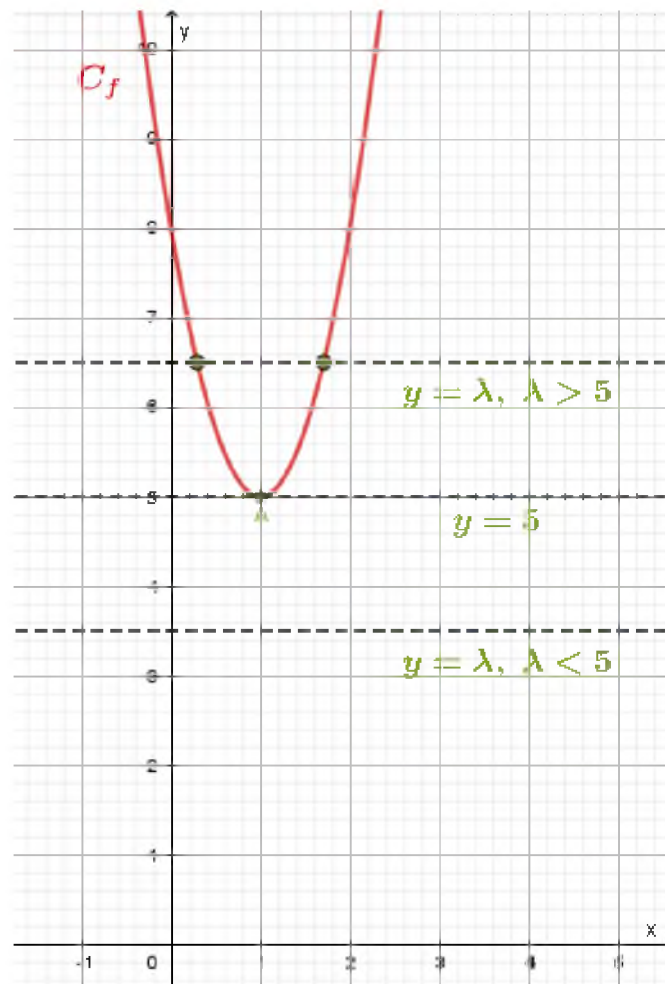
Επομένως $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ , μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω. Έτσι, είναι:



γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A(1,5)$. Ως εκ τούτου,

- i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η $x = 1$.
- ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$, ολικό ελάχιστο το $f(1) = 5$.
- iii. Είναι:
 - Αν $\lambda > 5$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες
 - Αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα
 - Αν $\lambda < 5$ η εξίσωση είναι αδύνατη



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ).

(Μονάδες 12)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος (Σ) που βρήκατε στο ερώτημα α.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

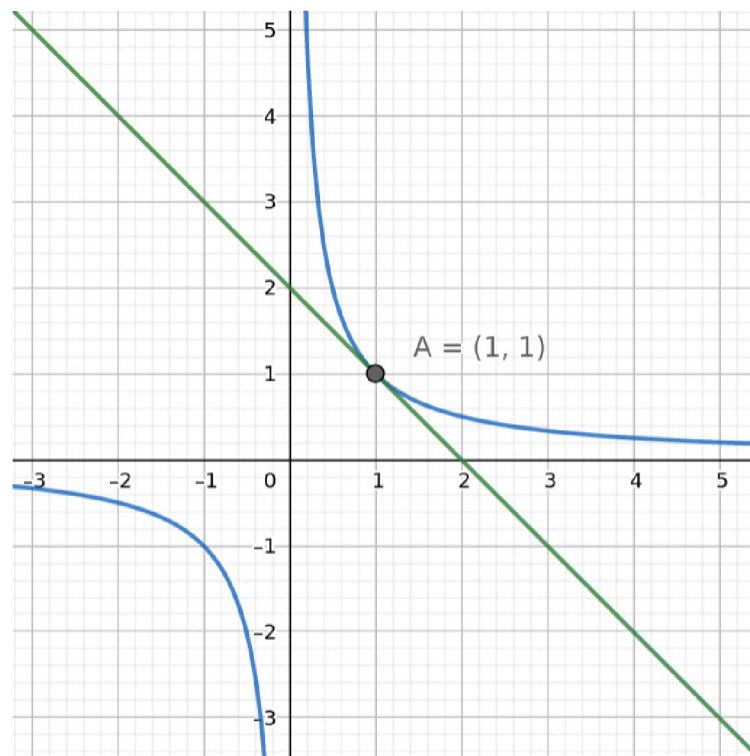
α) Το σύστημα (Σ) έχει νόημα για $x \neq 0$. Αντικαθιστώντας το y από την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη έχουμε:

$$-x+2=\frac{1}{x} \Leftrightarrow -x^2+2x=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Για $x=1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $y=-1+2 \Leftrightarrow y=1$.

Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(1,1)$.

β) Η εξίσωση $y=-x+2$ παριστάνει μία ευθεία, ενώ η εξίσωση $y=\frac{1}{x}$ παριστάνει μία υπερβολή. Η λύση του συστήματος $(x,y)=(1,1)$ είναι οι συντεταγμένες του μοναδικού σημείου τομής τους, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

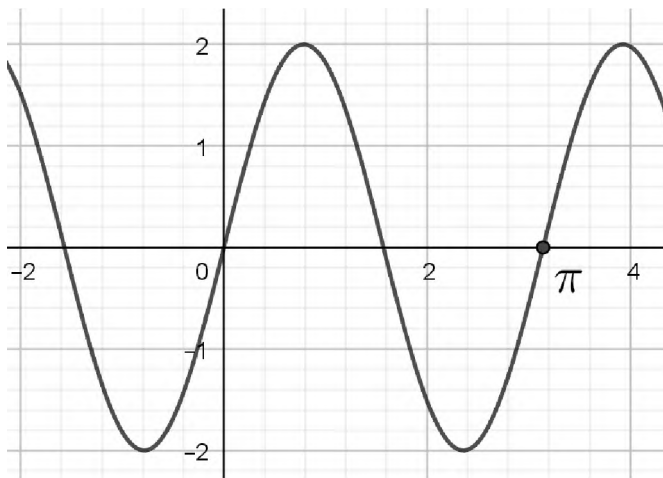
$$f(x) = \eta\mu ax \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu ax \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - ax) - 1, \text{ με } a \in \mathbb{R}.$$

α)

- i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

- ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $a = 2$.



(Μονάδες 6)

- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α)

- i. Ισχύει ότι $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) = \eta\mu\alpha x$ και $\sin(\pi - \alpha x) = -\sin\alpha x$. Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= \eta\mu\alpha x(\eta\mu\alpha x + 2) - \sin\alpha x(-\sin\alpha x) - 1 = \\ &= \eta\mu^2\alpha x + 2\eta\mu\alpha x + \sin^2\alpha x - 1 = \\ &= 1 + 2\eta\mu\alpha x - 1 = 2\eta\mu\alpha x. \end{aligned}$$

- ii. Η $\eta\mu\alpha x$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f έχει περίοδο $T = \pi$. Άρα,

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \pi \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{aligned} 2\eta\mu 2x &= 1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \eta\mu 2x &= \eta\mu \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi \\ \text{ή} \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \kappa\pi \\ \text{ή} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \kappa\pi \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή $x \in [0, \pi]$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{12} + \kappa\pi \leq \pi \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{12} \leq \kappa &\leq 1 - \frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{12} + \kappa\pi \leq \pi \Leftrightarrow \\ -\frac{5}{12} \leq \kappa &\leq 1 - \frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $x = \frac{\pi}{12}$ και ή $x = \frac{5\pi}{12}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

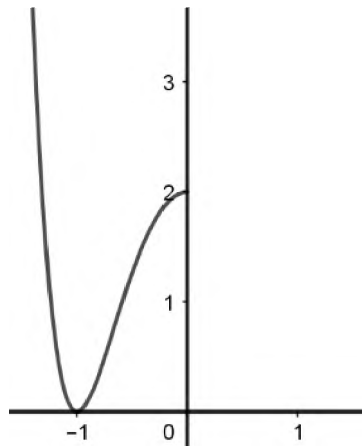
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε αν $x \in \mathbb{R}$ τότε και $-x \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι: $f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 = x^6 - 3x^2 + 2 = f(x)$.

Άρα, η f είναι άρτια.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0$.

Θέτουμε $x^2 = y$ και η εξίσωση γίνεται

$$y^3 - 3y + 2 = 0 \quad (1).$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι διαιρέτες του 2, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2$. Για $\rho = 1$, κάνοντας τη διαίρεση με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Οπότε, το 1 είναι ρίζα και η εξίσωση (1) γίνεται:

$$(y - 1)(y^2 + y - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y^2 + y - 2 = 0.$$

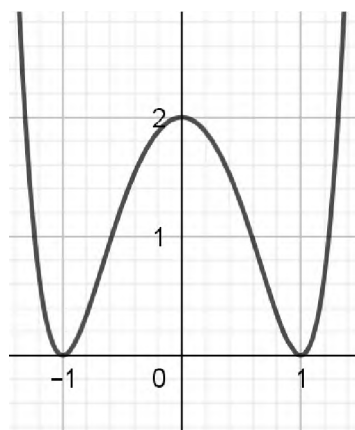
Η εξίσωση $y^2 + y - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = -2$ και $y_2 = 1$.

Οπότε, $x^2 = -2$, αδύνατη ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι:

$A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, οπότε έχει την ακόλουθη μορφή:



δ) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Για την συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$ με α θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το α , άρα $\alpha = 2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha \cdot \eta\mu\beta x = 2$, πρέπει $\alpha = 2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\beta x$, άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta\pi}{16} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\text{η λύση } \frac{\beta\pi}{16} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$$

ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το π έχουμε $\frac{\beta}{16} = 2\kappa + \frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του β που ζητάμε θα

είναι όταν ο κ , ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του κ το β γίνεται

αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16} = 2\kappa + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{16} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = 8$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2 \cdot \eta\mu 8x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 8x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \\ x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \end{cases}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

$$\begin{aligned} \text{i) } 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{1}{48}\right)\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa}{4} + \frac{1}{48} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{23}{48} &\Leftrightarrow -\frac{4}{48} \leq \kappa \leq \frac{4 \cdot 23}{48} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{23}{12}. \end{aligned}$$

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{\pi}{48} \text{ rad}$ ή

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = \frac{13\pi}{48} \text{ rad}.$$

$$\text{ii) } 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48}\right)\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{48} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4 \cdot 5}{48} \leq \kappa \leq \frac{4 \cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{19}{12}.$$

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} \text{ rad}$ ή

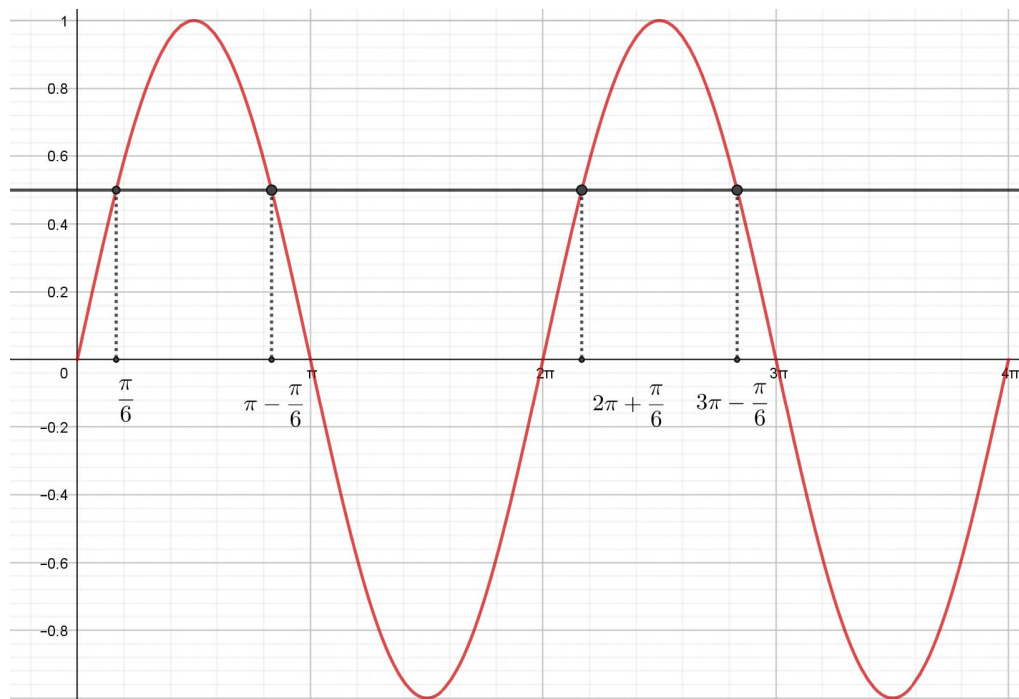
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} \text{ rad}.$$

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x = \frac{1}{2}$. Επειδή $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, θα είναι

$0 \leq 8x \leq 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι:

$\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της

συνάρτησης $\eta\mu\omega$.



Άρα:

$$8x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{48}$$

$$8x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48}$$

$$8x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{48}$$

$$8x = 3\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{48}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0$. Οπότε $x = 0$ ή $x^2 - x - 2 = 0$ που έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $x = -1$ και $x = 2$. Τελικά ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι οι $x = 0$, $x = -1$ και $x = 2$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση, πρέπει $x > 0$. Θέτουμε $\ln x = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $P(\omega) = 0$.

Από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες $\omega = 0$, $\omega = -1$, $\omega = 2$. Οπότε προκύπτουν τρεις εξισώσεις:

i) $\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$ δεκτή.

ii) $\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1}$ δεκτή.

iii) $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow x = e^2$ δεκτή.

γ) Η ανίσωση $x^3 - x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow P(x) > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) > 0$ αληθεύει για $x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$		
$x^2 - x - 2$	+	⊖	-	-	⊖	+	
x	-	-	⊖	+	+	+	
$P(x)$	-	⊖	+	⊖	-	⊖	+

Οπότε για την ανίσωση $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 2(\ln x) > 0 \Leftrightarrow P(\ln x) > 0$, προκύπτει ότι

$\ln x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$. Λύνουμε τις δύο ανισώσεις:

i) $-1 < \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln e^{-1} < \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < 1$

ii) $2 < \ln x \Leftrightarrow \ln e^2 < \ln x \Leftrightarrow e^2 < x$.

Τελικά $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup (e^2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x \neq 0$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$. Επίσης,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x), \text{ για κάθε } x \in A, \text{ που σημαίνει ότι η συνάρτηση } f$$

είναι περιττή, δηλαδή η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ) Είναι $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ και αφού f περιττή είναι $f(\ln \frac{1}{2}) = f(-\ln 2) = -f(\ln 2)$,

δηλαδή $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2}) = 0$.

δ) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$ και αφού f περιττή είναι $f(\eta\mu(\pi + \theta)) = f(-\eta\mu\theta) = -f(\eta\mu\theta)$, δηλαδή $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

(Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$\alpha. f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad \beta. f(x) = -\sqrt{9-x^2} \quad \gamma. f(x) = \sqrt{x^2-9} \quad \delta. f(x) = -\sqrt{x^2-9}$$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-2 < -1$ και f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ είναι $f(-2) > f(-1)$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-2) = f(2)$. Συνεπώς $f(-1) < f(2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$, οπότε $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$, οπότε $f(-3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-3) = f(3)$.

Συνεπώς $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

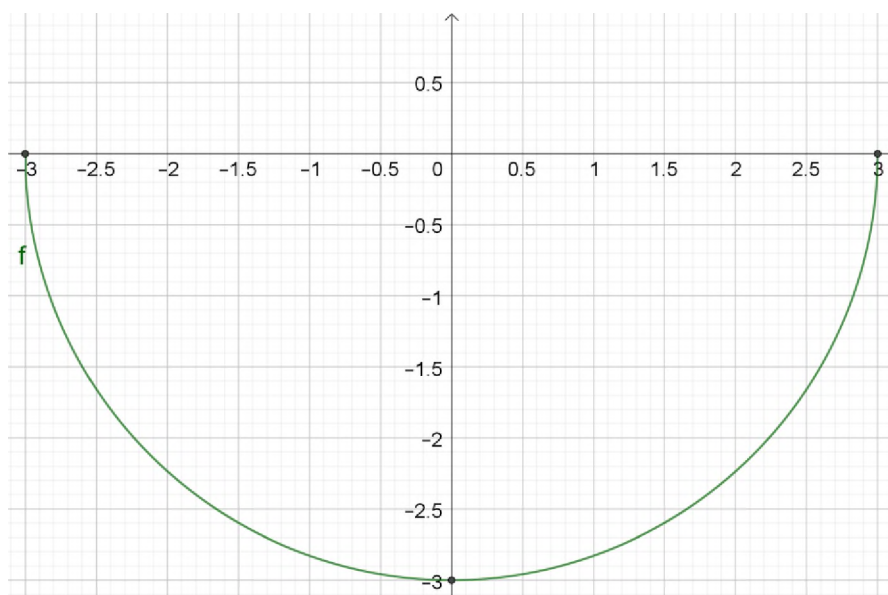
γ) Αφού $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι και η μοναδική θέση ελαχίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x) > f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 0) \cup (0, 3]$.

Αφού $f(x) \leq f(3)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 3, όπως και στο -3 αφού $f(-3) = f(3)$, που είναι και οι μοναδικές θέσεις μεγίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x) < f(3)$ για κάθε $x \in (-3, 3)$.

δ) Από τους 4 τύπους μόνο ο α. και ο β. έχουν πεδίο ορισμού το $[-3, 3]$.

Επίσης για τον τύπο α. ισχύει $f(0) > f(3)$ οπότε δεν μπορεί να αντιστοιχεί στη συνάρτηση του προβλήματος. Συνεπώς ο σωστός τύπος είναι ο β. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \widehat{AOM}$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x=1$ στο σημείο K.

α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta, \epsilon\phi\theta, \sigma\phi\theta$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.

(Μονάδες 6)

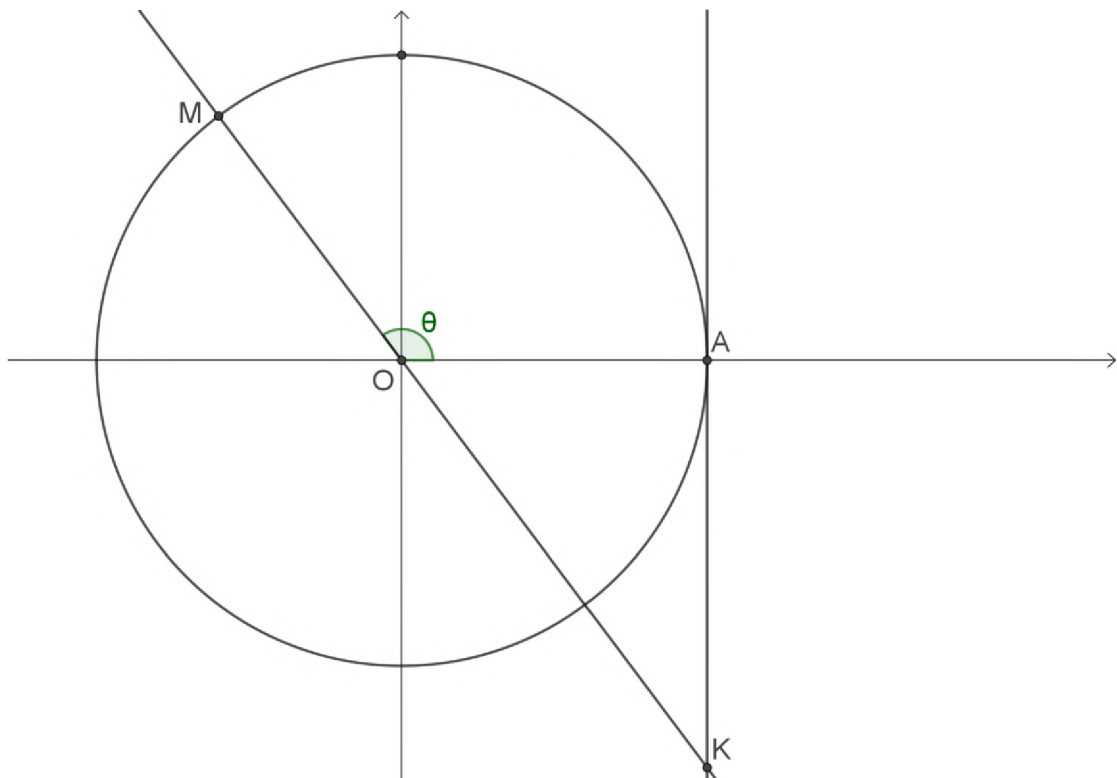
γ) Έστω μια γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ϕ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \phi$.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Για τη γωνία $\theta = \hat{AOM}$ γνωρίζουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ και $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$. Από τη τριγωνομετρική

ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ έχουμε ότι:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{9}{25}.$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$.

$$\text{Επίσης } \varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \text{ και τέλος } \sigma\phi\theta = \frac{1}{\varepsilon\phi\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}.$$

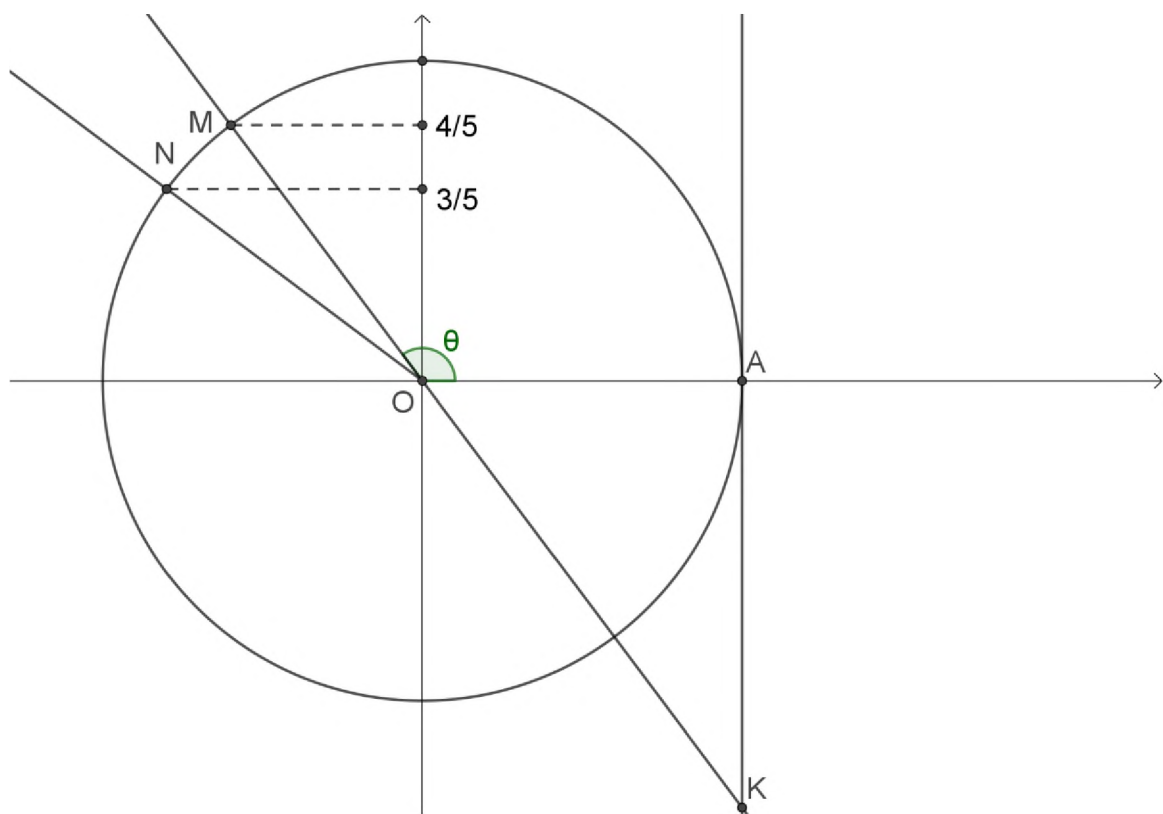
β) Γενικά, για τα σημεία M και K που η τελική πλευρά μιας γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο και την ευθεία $x=1$ αντίστοιχα, ισχύει ότι $M(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $K(1, \varepsilon\phi\theta)$. Συνεπώς $M(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ και $K(1, -\frac{4}{3})$.

γ)

i. Είναι $\eta\mu\phi = \frac{3}{5} > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$, οπότε η τελική πλευρά της γωνίας ϕ είναι στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Είναι $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, δηλαδή $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$. Όμως η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, οπότε για να είναι $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$ θα πρέπει $\theta < \phi$.

Εναλλακτικά, βρίσκουμε το σημείο N του κύκλου με τεταγμένη $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και τετμημένη $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$ και διαπιστώνουμε το σημείο N είναι πιο αριστερά και κάτω από το σημείο M δηλαδή $\hat{AOM} < \hat{AON}$ οπότε $\theta < \phi$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x' .

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$-1 \leq \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1 \text{ οπότε } -2 \leq 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 2 \text{ οπότε } -2+1 \leq 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 2+1 \text{ και τελικά} \\ -1 \leq f(x) \leq 3.$$

$$\text{Επίσης } f(1) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \text{ και } f(3) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$. Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \eta' \\ \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \eta' \\ \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{2} = 2\kappa - \frac{1}{6} \\ \eta' \\ \frac{x}{2} = 2\kappa + \frac{7}{6} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 4\kappa - \frac{1}{3} \\ \eta' \\ x = 4\kappa + \frac{7}{3} \end{array} \right\}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x = 4\kappa - \frac{1}{3}$ ή

$$x = 4\kappa + \frac{7}{3}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(1-x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi - \pi x}{2}\right) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right), \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned} (f(x)-1)^2 + (f(1-x)-1)^2 &= \left(1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1\right)^2 + \left(1 + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1\right)^2 = \\ 4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= 4\left(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4 \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

δηλαδή $(f(x)-1)^2 + (f(1-x)-1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και

$$g(x) = 3x - 1.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

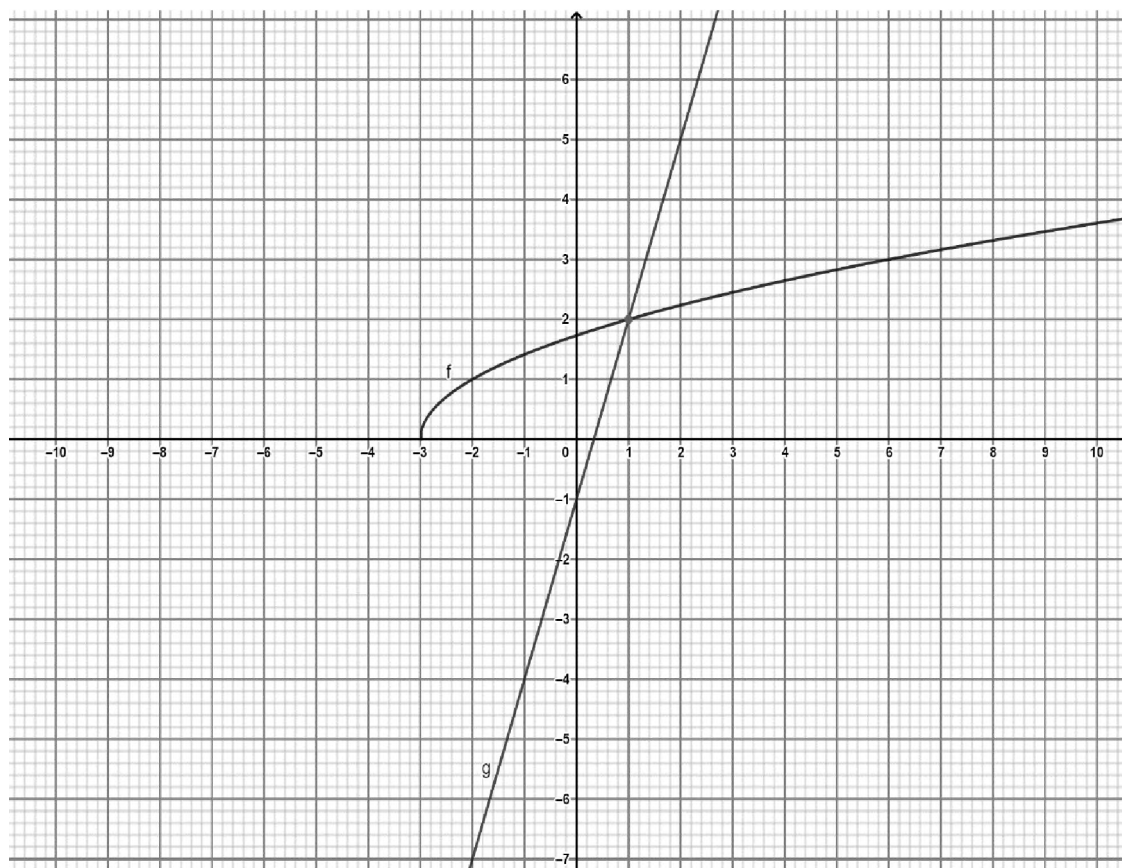
γ)

i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x + 3 \geq 0$, δηλαδή για $x \geq -3$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = [-3, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εφόσον είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3x - 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g που ανήκουν στο σύνολο $A = A_f \cap A_g = [-3, +\infty)$.

Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $(1, 2)$, δηλαδή στο σημείο με τετμημένη $x=1$ και $1 \in A$.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=1$.

β) Εναλλακτική λύση :

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$\sqrt{x+3} = 3x - 1.$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x \geq -3$ και $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

$\sqrt{x+3} = 3x - 1$ υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο

$$\sqrt{x+3}^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow x+3 = 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 7x - 2 = 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1 και $-\frac{2}{9}$. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η $x=1$ είναι δεκτή.

Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η $x=1$.

γ) i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x , όπου η C_f είναι κάτω από C_g .

Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x \in (1, +\infty)$.

ii. Αλγεβρικά η ανίσωση λύνεται:

Για $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 < (3x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x+3 < 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 - 7x - 2 > 0 \text{ τότε}$$

$$x \in (-\infty, -\frac{2}{9}) \cup (1, +\infty).$$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x \in (1, +\infty)$.

Για $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε $\sqrt{x+3} < 3x-1$ αδύνατη.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$, έχουμε: $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1, (1) \text{ και } -1\leq\eta\mu x\leq 1\Leftrightarrow -1\leq-\eta\mu x\leq 1, (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $-2\leq\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\leq 2$, δηλαδή $-2\leq f(x)\leq 2$, που είναι το ζητούμενο.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f , τότε για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x_0=1$ και $\eta\mu x_0=-1$, οπότε $\eta\mu^2 x_0+\sigma\upsilon\nu^2 x_0=1+1=2$, που είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός 2 δεν είναι η μέγιστη τιμή της f .

γ) i. Με $x=0$ έχουμε: $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0-\eta\mu 0=1-0=1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 1)$.

ii. Με $y=0$ δηλαδή $f(x)=0$ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x$. Μια προφανής λύση

της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{\pi}{4}$ και επειδή $\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$,

μια άλλη λύση της είναι ο αριθμός $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

Άρα δυο κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ είναι τα $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \sin x$, $\rho > 0$ με $\rho = 2$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -2 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 2 .

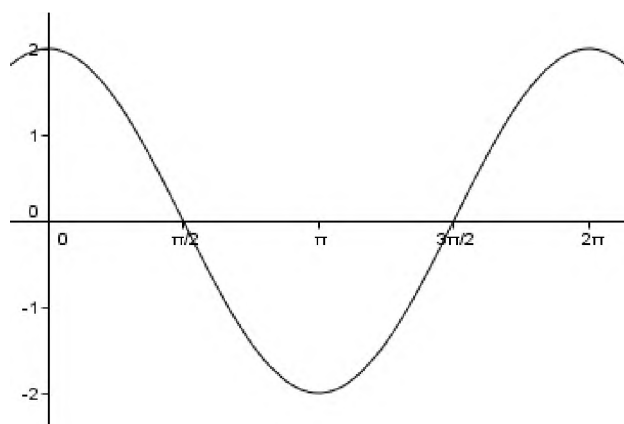
β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1$ που είναι ισοδύναμη με την $\sin x = \frac{1}{2}$. Μια προφανής λύση της είναι η $x = \frac{\pi}{3}$ και επειδή οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο, μια άλλη λύση είναι η $x = -\frac{\pi}{3}$.

Άρα, δυο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 1$ είναι τα $\left(-\frac{\pi}{3}, 1\right), \left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}$ περιέχονται στο πρώτο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνημίτονο, είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον $\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{15} > 0$, οπότε $\frac{2\pi}{5} > \frac{\pi}{3}$ και λόγω της μονοτονίας του συνημιτόνου παίρνουμε $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, οπότε $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, δηλαδή $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα προκύπτει η γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται στο σχήμα.

x		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin x$		2	0	-2	0	2



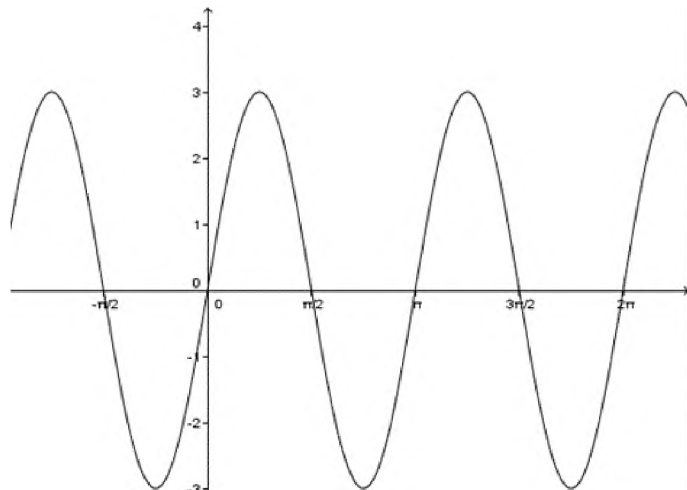
ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$$f(x) = \rho \eta\mu(\alpha x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha, \rho > 0$$

α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)



β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ .

(Μονάδες 6)

Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T = \pi$.

Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3 .

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta \mu(\alpha x)$ με $\alpha, \rho > 0$, οπότε έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

ελάχιστη τιμή $-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ . Έτσι, έχουμε $\frac{2\pi}{\alpha} = \pi$, οπότε $\alpha = 2$ και $\rho = 3$.

γ) Είναι: $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5 = (x^2 - 1)^2 + 4 \geq 4$ και η ισότητα $g(x) = 4$ ισχύει όταν $x^2 = 1$ δηλαδή όταν $x = -1$ ή $x = 1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f .

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 3$ και $g(x) \geq 4$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή $P(0) = 2 \neq 0$, το πολυώνυμο δεν έχει λύση τον αριθμό 0.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε ισχύει $P(\rho) = 0$ δηλαδή

$$2\rho^4 - 5\rho^3 + 4\rho^2 - 5\rho + 2 = 0, (1).$$

Για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του, αρκεί να δείξουμε ότι $P\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$.

Πραγματικά, είναι:

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{2}{\rho^4} - \frac{5}{\rho^3} + \frac{4}{\rho^2} - \frac{5}{\rho} + 2 = \frac{1}{\rho^4} (2 - 5\rho + 4\rho^2 - 5\rho^3 + 2\rho^4) = 0$$

λόγω της (1).

β) Επειδή οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορεί να είναι ρίζες του είναι οι θετικοί διαιρέτες του 2, με $x=2$ έχουμε:

$$P(2) = 2 \cdot 16 - 5 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 50 - 50 = 0$$

οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και λόγω του ερωτήματος α) έχει ρίζα

και τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

Έτσι, με τη βοήθεια του σχήματος

Horner έχουμε:

$$P(x) = (x-2)(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

και αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για το

πολυώνυμο $2x^3 - x^2 + 2x - 1$ με το $\frac{1}{2}$

συμπεραίνουμε ότι

$$P(x) = (x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2) = (x-2)(2x-1)(x^2 + 1)$$

οπότε

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}.$$

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + 1 > 0$, το πρόσημο του πολυωνύμου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $(x-2)(2x-1)$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων.

2	-5	4	-5	2	2
	4	-2	4	-2	
2	-1	2	-1	0	

2	-1	2	-1	$\frac{1}{2}$
	1	0	1	
2	0	2	0	

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$(x-2)(2x-1)$	+	0	-	0	+

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης $P(x) < 0$ είναι κάθε αριθμός του διαστήματος $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Καθώς υπάρχουν λογάριθμοι μόνο θετικών αριθμών, απαιτούμε $10^x - 1 > 0$, άρα

$10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, αφού η συνάρτηση $g(x) = 10^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > \log 1$ και καθώς η συνάρτηση $h(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ παίρνουμε $10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2$ σχέση που γράφεται $10^x > 10^{\log 2}$. Όστε $x > \log 2$, δηλαδή $x \in (\log 2, +\infty)$.

γ) Έχουμε $f(x) + x = \log(10^x - 1) + \log 10^x = \log[10^x(10^x - 1)] = \log(10^x \cdot 10^x - 10^x) = \log(10^{2x} - 10^x)$.

δ) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow \log(10^{2x} - 10^x) = 0$ άρα $10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow (10^x)^2 - 10^x - 1 = 0$. Θέτοντας $10^x = y > 0$, παίρνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2 - y - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, οπότε $y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Έτσι $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, αφού $y > 0$.

Τελικά $10^x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(\log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), -\log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

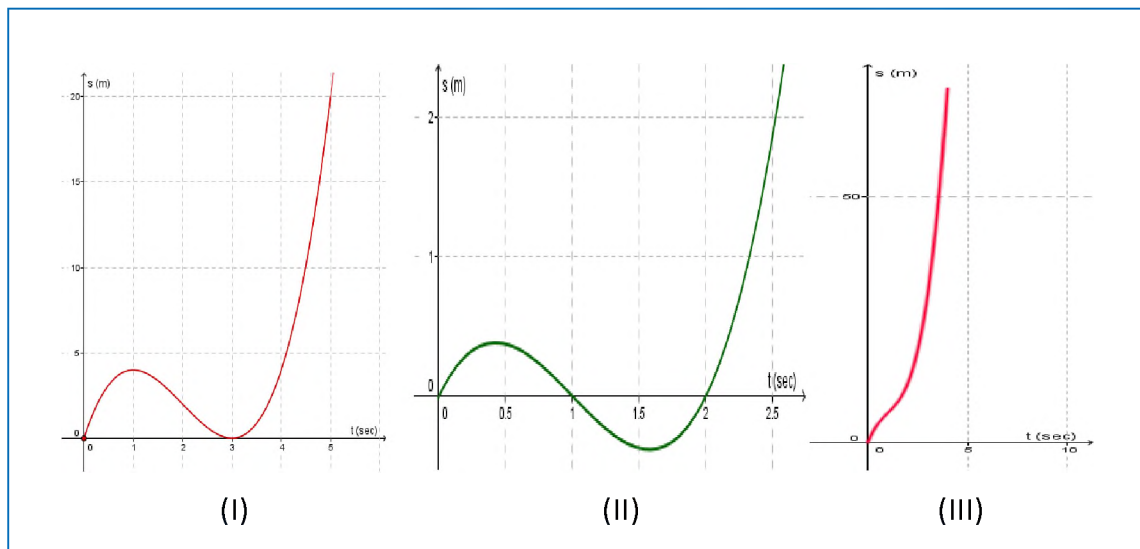
(Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)



ΛΥΣΗ

α) $S(0) = 0$ (το κινητό βρίσκεται στην αφετηρία) και $S(2) = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 20 = 12$ μέτρα.

β) $S(t) = 30 \Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 + 10t = 30 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 15 = 0$ (1).

Πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι οι $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικό φυσικό μέγεθος, πιθανές ρίζες είναι οι 1, 3, 5, 15.

Η τιμή $t = 3$ επαληθεύει την εξίσωση και με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	-3	5	-15	3
	3	0	15	
1	0	5	0	

Άρα η (1) $\Leftrightarrow (t - 3)(t^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Επομένως το κινητό θα χρειαστεί 3 δευτερόλεπτα για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

γ) Πραγματικά, έχουμε:

$$S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t = 2t(t^2 - 3t + 5) \geq 0,$$

διότι $t \geq 0$ (εκφράζει το χρόνο)

και $t^2 - 3t + 5 > 0$ (το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$, επομένως είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του t^2).

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:

Η (I) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

Η (II) παίρνει και αρνητικές τιμές.

Η (III) είναι μη αρνητική και γνησίως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

ΘΕΜΑ 4

Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1 ^ο	2	4	0	0,3 €	3,8 €
2 ^ο	1	2	3	0,3 €	3,55 €
3 ^ο	3	0	3	0,3 €	4,05 €
4 ^ο	2	2	1	0,3 €	
				Σύνολο	

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν.

(Μονάδες 10)

γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερις φίλοι για την παραγγελία τους;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αν η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει x ευρώ, η μία φέτα τυρί y ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα z ευρώ, προκύπτει το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 0z + 0,3 = 3,8 \\ x + 2y + 3z + 0,3 = 3,55 \\ 3x + 0y + 3z + 0,3 = 4,05 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 0z = 3,5 \\ x + 2y + 3z = 3,25 \\ 3x + 0y + 3z = 3,75 \end{cases}$$

β) Θα λύσουμε το παραπάνω σύστημα για να βρούμε τις τιμές των x , y και z . Έχουμε:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3,5 \\ x + 2y + 3z = 3,25 \\ 3x + 3z = 3,75 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x + 4y = 3,5 \\ 2x + 4y + 6z = 6,5 \\ 3x + 3z = 3,75 \end{cases} \xrightarrow{\text{αφαιρούμε από την (2) την (1)}} \begin{cases} 6z = 3 \\ 2x + 4y = 3,5 \\ 3x + 3z = 3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 2x + 4y = 3,5 \\ 3x + 3 \cdot 0,5 = 3,75 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 0,5 \\ 2x + 4y = 3,5 \\ 3x + 1,5 = 3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 2x + 4y = 3,5 \\ 3x = 2,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 2x + 4y = 3,5 \\ x = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 2 \cdot 0,75 + 4y = 3,5 \\ x = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 1,5 + 4y = 3,5 \\ x = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 0,5 \\ y = 0,5 \\ x = 0,75 \end{cases}$$

Τελικά, η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει $x = 0,75$ ευρώ, η μία φέτα τυρί κοστίζει $y = 0,5$ ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα κοστίζει $z = 0,5$ ευρώ.

γ) Το τέταρτο σάντουιτς κοστίζει $2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 + 0,3 = 3,3$ ευρώ. Συνολικά θα πληρώσουν λοιπόν: $3,8 + 3,55 + 4,05 + 3,3 = 14,7$ ευρώ.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$.

(Μονάδες 8)

β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$; Να

αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

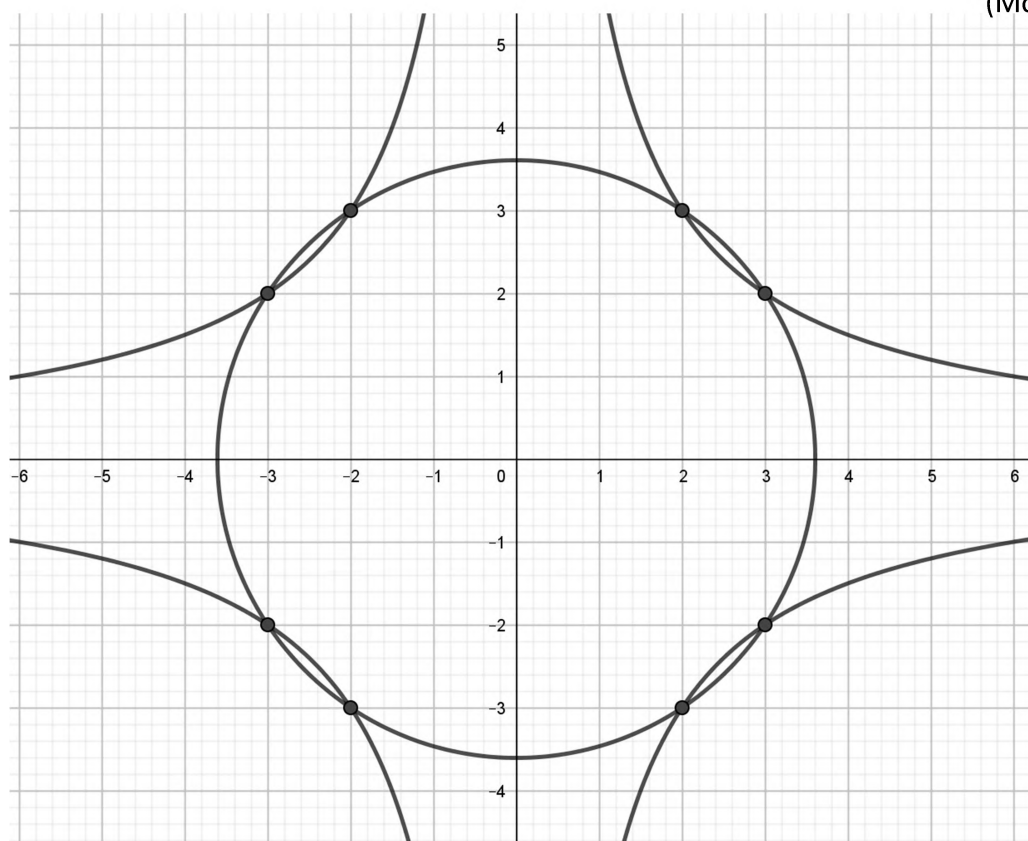
γ) Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ_2) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με βάση το σχήμα,

i. να βρείτε τις λύσεις του (Σ_2) .

(Μονάδες 4)

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ_1) σημειώνοντας τις λύσεις του.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Έχουμε: } \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega^2 - 13\omega + 36 = 0$ που έχει ρίζες $\omega = 4$ και $\omega = 9$. Άρα $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Οπότε το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τις $(2, 3)$, $(-2, -3)$, $(3, 2)$ και $(-3, -2)$.

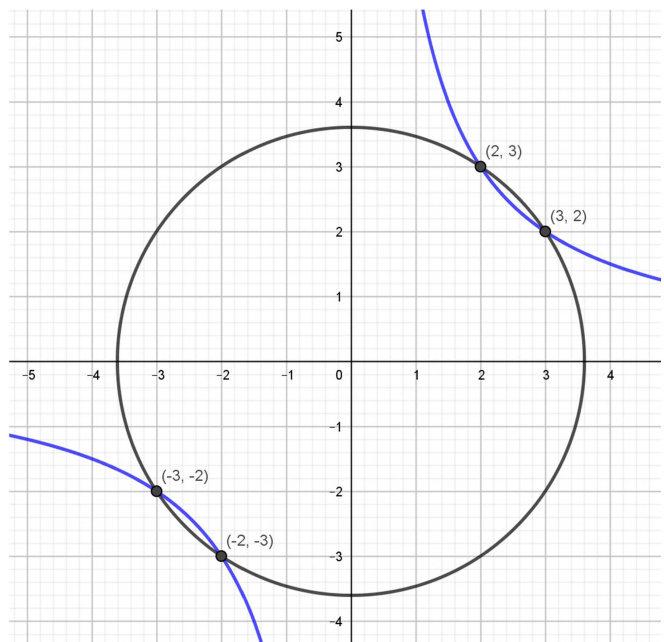
β) Παρατηρούμε ότι:

$|2 \cdot 3| = 6$ και $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Ομοίως $|-2 \cdot (-3)| = 6$ και $(-2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$, $|3 \cdot 2| = 6$ και $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, $|(-3) \cdot (-2)| = 6$ και $(-3)^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$, άρα οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) είναι και λύσεις του (Σ_2) .

γ)

i. Το (Σ_2) έχει οκτώ λύσεις, τις $(2, 3)$, $(-2, -3)$, $(3, 2)$, $(-3, -2)$ (που είναι λύσεις και του (Σ_1)) και τις $(-2, 3)$, $(-3, 2)$, $(3, -2)$, $(2, -3)$.

ii. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γεωμετρική αναπαράσταση του (Σ_1) είναι το τμήμα της γραφικής αναπαράστασης του (Σ_2) που αποτελείται από τον κύκλο και τους κλάδους της υπερβολής που βρίσκονται στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο, όπου είναι σημειωμένα και τα σημεία τομής των δυο γραμμών, οι συντεταγμένες των οποίων είναι οι λύσεις του συστήματος αυτού.



ΘΕΜΑ 4

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

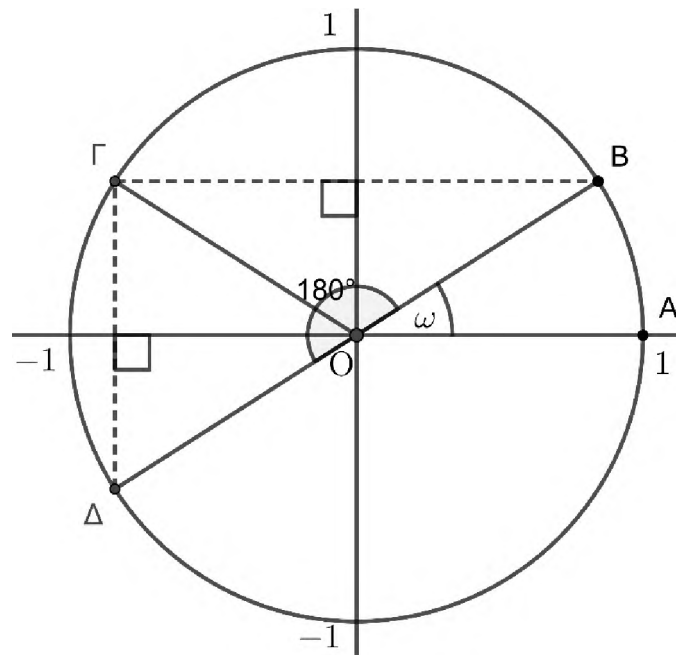
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B , Γ και Δ ,

(Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOG}$ και $\widehat{AOD}$.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $\eta\mu\omega = x$ και η εξίσωση γράφεται:

$$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο -1 είναι ρίζα. Κάνουμε τη διαίρεση $(5x^3 - 8x^2 - 7x + 6) : (x + 1)$.

5	-8	-7	6	-1
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

Άρα $5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = (x + 1)(5x^2 - 13x + 6)$.

Το τριώνυμο $5x^2 - 13x + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 169 - 120 = 49$ και ρίζες:

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 + 7}{10} = 2$$

και

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 - 7}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, είναι $0 < \eta\mu\omega < 1$, άρα η μόνη αποδεκτή λύση είναι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

β)

i. Ισχύει ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$, άρα $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά του B ως προς τον άξονα $y'y$ και την αρχή O αντίστοιχα. Οπότε είναι:

$$\Gamma\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Delta\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

- iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων B , Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα,

$$\eta\mu A\hat{O}B = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B = \frac{4}{5},$$

$$\eta\mu A\hat{O}\Gamma = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Gamma = -\frac{4}{5},$$

και

$$\eta\mu A\hat{O}\Delta = -\frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Delta = -\frac{4}{5}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$ φαίνεται παρακάτω

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 - 4 \\
 \underline{-x^5 + 4x^3} & x^3 - 1 \\
 & \underline{-x^2 + \alpha x + \beta} \\
 & x^2 \quad - 4 \\
 & \underline{ } \\
 & \alpha x + \beta - 4
 \end{array}$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το πολυώνυμο $\alpha x + \beta - 4$. Όμως από την εκφώνηση δίνεται ότι είναι το πολυώνυμο $4x + 1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα $\alpha x + \beta - 4$ και $4x + 1$ πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή $\alpha = 4$ και $\beta = 5$.

γ) Για $\alpha = 4$ και $\beta = 5$ έχουμε $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4x + 5$.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι $P(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1$.

ii. Αξιοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης που βρήκαμε παραπάνω έχουμε

$$P(x) < 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1 < 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0.$$

Το πρόσημο του πολυωνύμου $\Pi(x) = (x^2 - 4)(x - 1)(x^2 + x + 1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$		
x^2-4	+	0	-	-	0	+	
$x-1$	-	-	0	+	+	+	
x^2+x+1	+	+	+	+	+	+	
$\Pi(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Συνεπώς η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$, θα ισχύει ότι $P(1) = 0$.

Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 9 + \alpha - 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$.

β) Για $\alpha = 15$ έχουμε $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$.

i. Η διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 & x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{-2x^3 + 6x^2 - 4x} & 2x - 3 \\
 -3x^2 + 9x - 6 & \\
 \underline{3x^2 - 9x + 6} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$.

ii. Αξιοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης έχουμε :

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(2x - 3) < 0$$

Το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$		
x^2-3x+2	+	0	-	-	0	+	
$2x-3$	-	-	0	+	+	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(2x - 3) < 0$ αληθεύει για κάθε

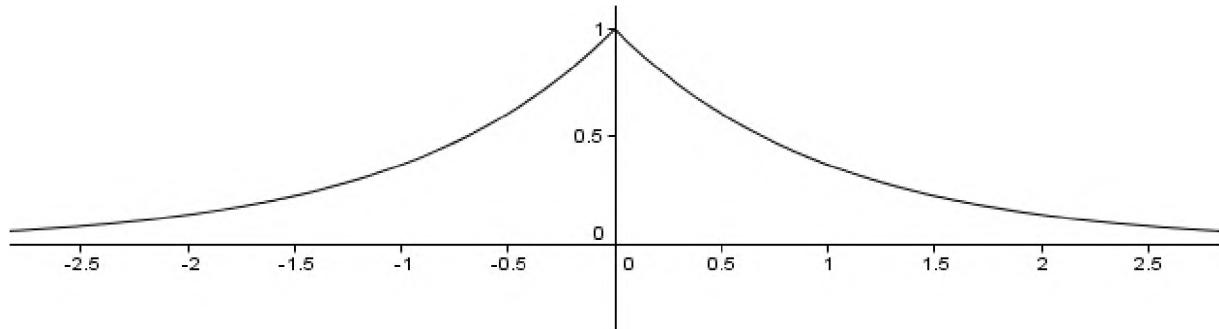
$$x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

iii. Είναι $\ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \ln 2 < 1$ οπότε αφού δείξαμε παραπάνω ότι $P(x) < 0$ για

κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, είναι $P(\ln 2) < 0$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$\text{A. } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{B. } f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

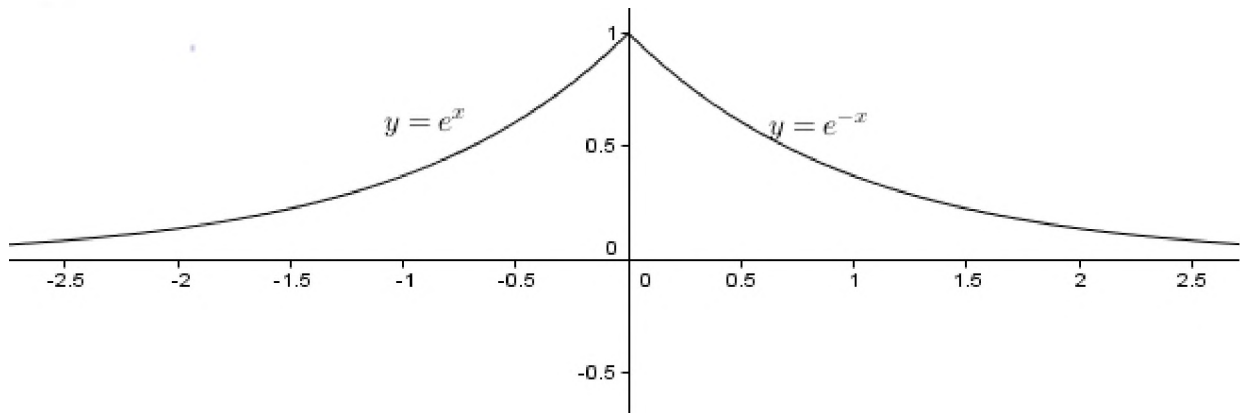
(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y = e^x$ για $x < 0$ και την $y = e^{-x}$ για $x \geq 0$ οπότε ο τύπος της είναι ο πρώτος από τους δοσμένους τύπους.

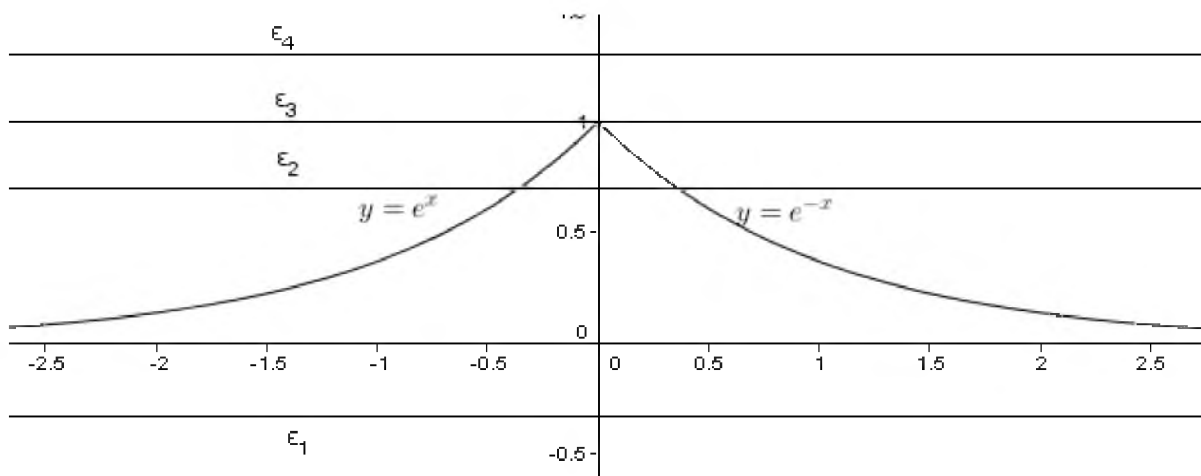


β) Από την παραπάνω γραφική παράσταση της f συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 0$, το $f(0) = 1$

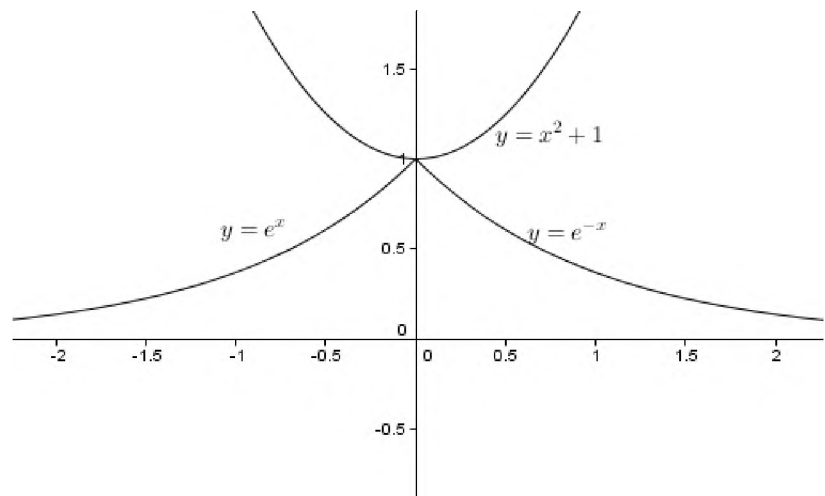
γ) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \leq 0$, (ευθεία ϵ_1) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $0 < \alpha < 1$, (ευθεία ϵ_2) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha = 1$, (ευθεία ϵ_3) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν $\alpha > 1$, (ευθεία ϵ_4) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.



δ) Η παραβολή $y = x^2 + 1$ διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$ αφού για $x = 0$ είναι $y = 0^2 + 1 = 1$. Το σημείο $(0, 1)$ είναι και σημείο της C_f , αφού $f(0) = 1$.

Με $x \neq 0$ έχουμε $x^2 > 0$, οπότε $y = x^2 + 1 > 1$ και $f(x) \leq 1$. Άρα η παραβολή και η C_f δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε το μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το $(0, 1)$.



Σχόλιο

Στο πλαίσιο μιας γραφικής λύσης θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε την παραβολή και τη γραφική παράσταση της f και να διαπιστώσουμε ότι έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(0, 1)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

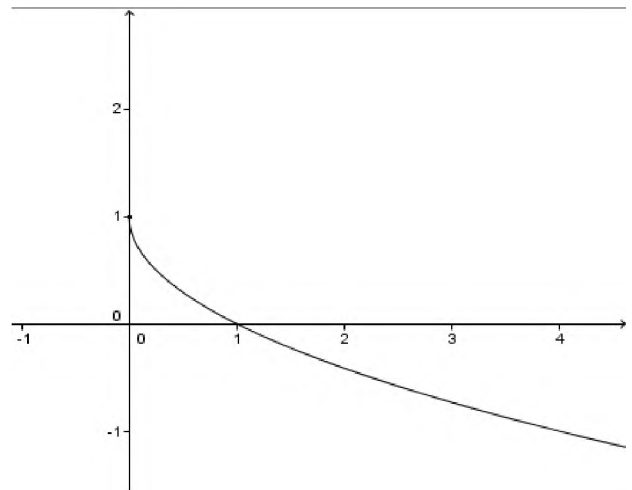
β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το

πρόσημο του γινομένου $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα της εκφώνησης προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Επίσης, η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν $x = 0$.

β) Από την ανισότητα $\alpha < \frac{1}{4}$ και τη μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι $f(\alpha) > f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$,
οπότε $2f(\alpha) - 1 > 0$.

Επίσης, $\beta > \frac{1}{4}$, οπότε $f(\beta) < f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(\beta) < \frac{1}{2}$, απ' όπου προκύπτει ότι $2f(\beta) - 1 < 0$.

Άρα, $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1) < 0$.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 2x$. Με $x \geq 0$ έχουμε:

$$f(x) = 2x \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 = 0$$

Αν θέσουμε $\sqrt{x} = u$, τότε η εξίσωση γράφεται $2u^2 + u - 1 = 0$ και έχει λύσεις τους αριθμούς -1 και $\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε:

- $u = -1$: $\sqrt{x} = -1$ που είναι αδύνατη.
- $u = \frac{1}{2}$: $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Εναλλακτική λύση του ερωτήματος γ)

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = 2x$. Επιπλέον:

- Αν $x > \frac{1}{4}$, τότε $2x > \frac{1}{2}$ και $f(x) < \frac{1}{2}$, οπότε $f(x) \neq 2x$.
- Αν $0 \leq x < \frac{1}{4}$, τότε $2x < \frac{1}{2}$ και $f(x) > \frac{1}{2}$, οπότε $f(x) \neq 2x$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μοναδική λύση την $x = \frac{1}{4}$ και το μοναδικό κοινό σημείο της

C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

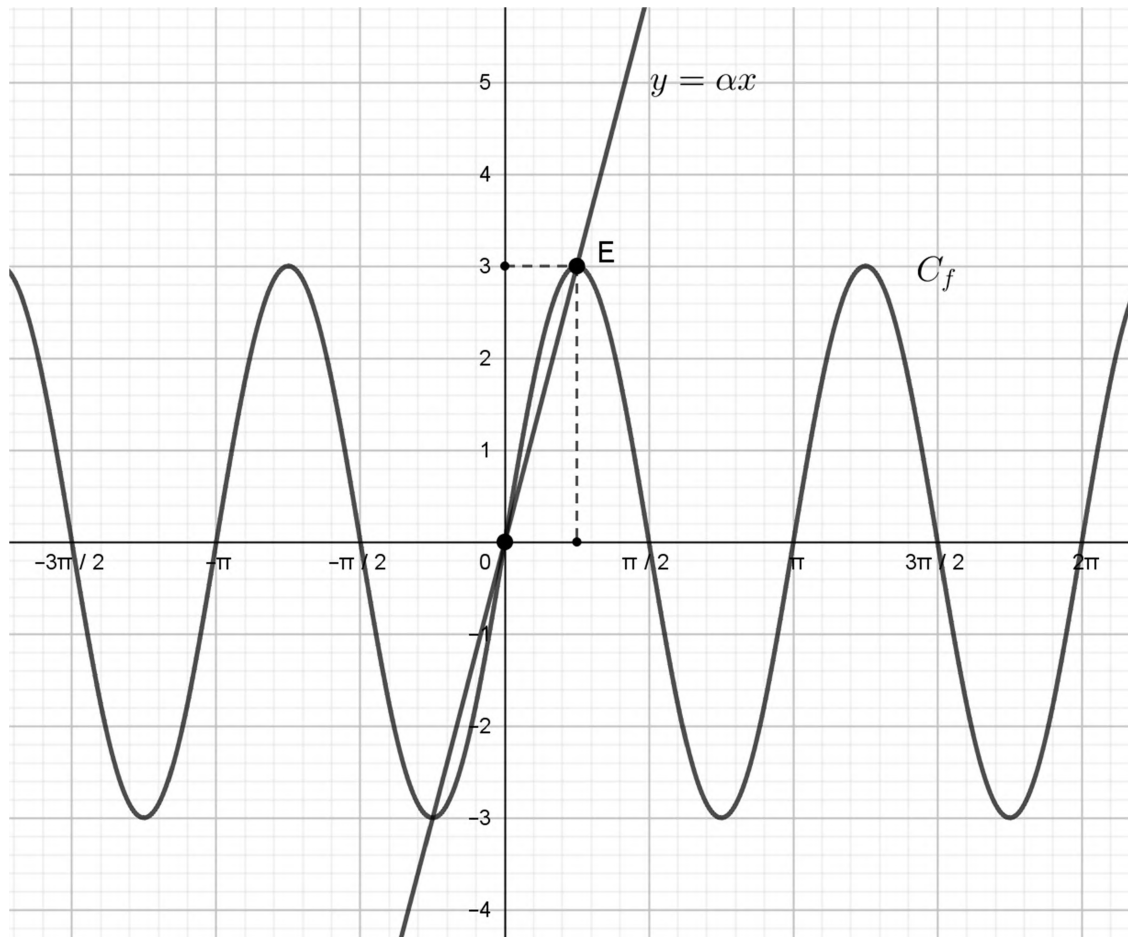
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x) = \rho \eta \mu(\omega x)$ με $\rho > 0$, έχει μέγιστη τιμή ρ . Με βάση το σχήμα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3, άρα $\rho = 3$. Επίσης η περίοδος της συνάρτησης είναι π , οπότε $\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = 2$. Άρα $f(x) = 3\eta \mu(2x)$.

β) Η ευθεία $y = \alpha x$ διέρχεται από το σημείο E της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση $f(x) = 3\eta \mu(2x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στη θέση

$x = \frac{\pi}{4}$. Άρα είναι $E\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ και $3 = \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{12}{\pi}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι :

$$y = \frac{12}{\pi} x.$$

γ) Η εξίσωση $3\eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi} x = 0$ γράφεται ισοδύναμα $3\eta \mu(2x) = \frac{12}{\pi} x$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3\eta \mu(2x)$ με την ευθεία $y = \frac{12}{\pi} x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι

- $x = 0$, δεδομένου ότι $f(0) = 3\eta \mu 0 = 0$ και η ευθεία $y = \frac{12}{\pi} x$ διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$.

- $x = \frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\eta \mu\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 3\eta \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 1 = 3$ και η ευθεία $y = \frac{12}{\pi} x$

διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ και

- $x = -\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\eta \mu\left(-2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 3\eta \mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot (-1) = -3$ και η ευθεία

$$y = \frac{12}{\pi} x \text{ διέρχεται από το σημείο } \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{12}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\pi}{4}, -3\right).$$

Άρα η εξίσωση $3\eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi} x = 0$ έχει λύσεις τις $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = -\frac{\pi}{4}$.

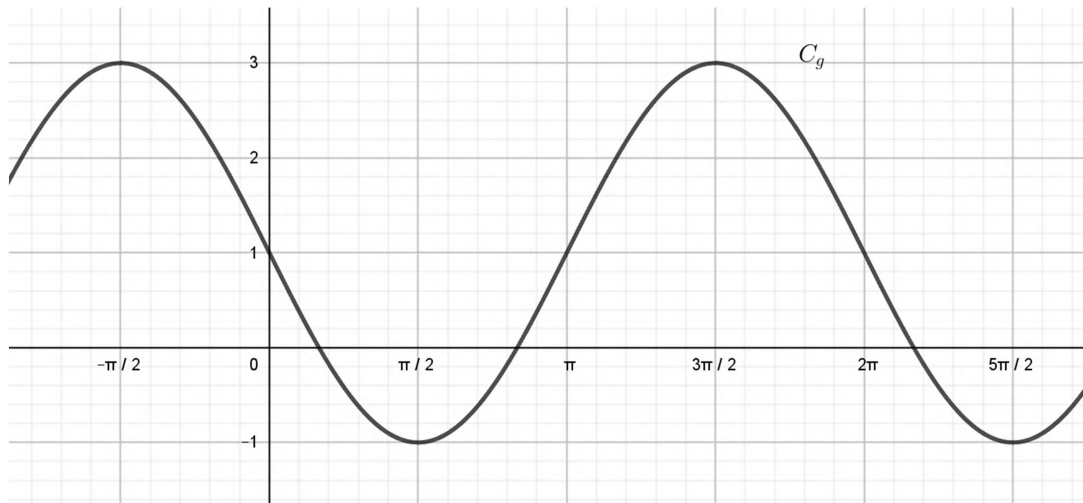
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{3}$, η μέγιστη τιμή της είναι $\max f(x) = 2 + 1 = 3$,

και η ελάχιστη τιμή της είναι $\min f(x) = -2 + 1 = -1$.

β)

i. Από την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης g , παρατηρούμε ότι

παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\frac{\pi}{2}$ και το επόμενο μέγιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$. Άρα η περίοδος

της συνάρτησης είναι $T = \frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$, οπότε $\beta = 1$. Η καμπύλη προκύπτει από

κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\alpha \eta \mu x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, άρα $\gamma = 1$. Επίσης

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 3 \Leftrightarrow \\ \alpha \cdot \eta \mu \frac{3\pi}{2} + 1 &= 3 \Leftrightarrow . \\ \alpha \cdot (-1) &= 2 \Leftrightarrow \\ \alpha &= -2 \end{aligned}$$

Τελικά $g(x) = -2\eta \mu x + 1$.

ii. Η εξίσωση γίνεται:

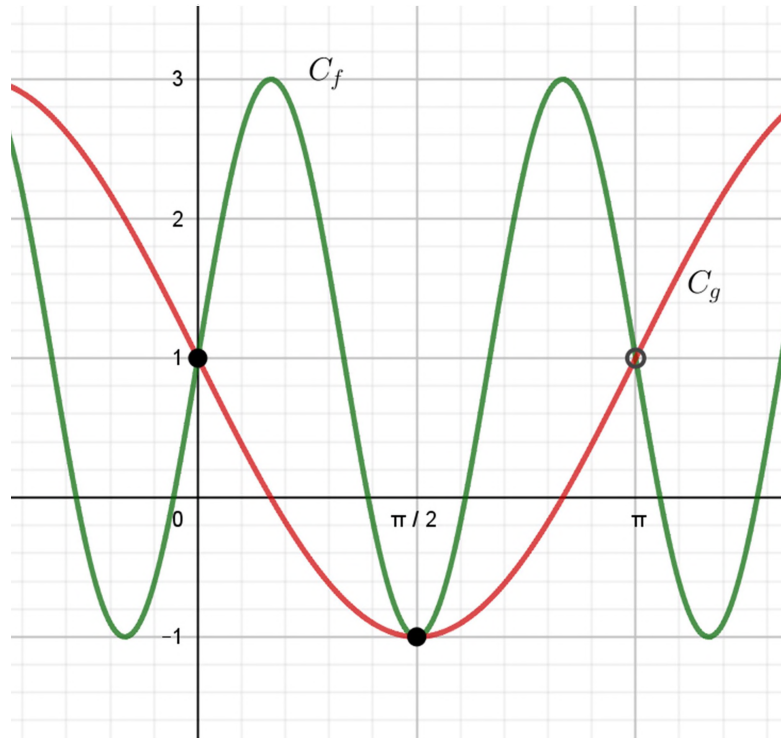
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow \\ 2\eta \mu 3x + 1 &= -2\eta \mu x + 1 \Leftrightarrow \\ \eta \mu 3x &= -\eta \mu x \Leftrightarrow \\ \eta \mu 3x &= \eta \mu(-x) \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi - x \\ \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi + (\pi + x) \end{cases} &, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Δηλαδή: $\begin{cases} x = \frac{\kappa\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$. Επειδή $x \in [0, \pi)$, για $\kappa = 0$ στον πρώτο τύπο λύσεων

προκύπτει $x = 0$ και στον δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $x = \frac{\pi}{2}$ (που προκύπτει και από

τον πρώτο τύπο λύσεων για $\kappa = 1$). Από τις άλλες τιμές του $\kappa \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $[0, \pi)$.

Η γραφική λύση της εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τελικά η εξίσωση έχει δυο λύσεις στο $[0, \pi)$, τις $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α)

i. Αν $\lambda = -1$, να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 2)

ii. Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda = -1$, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2, y_2) με $x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi$ και

$$y_2 = \eta\mu\varphi, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

i. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α)

i. Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται: $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - 1y = -1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_0, y_0) = (-1, 0)$.

ii. Από το αι) ερώτημα έχουμε $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta = -1$, $y_0 = \eta\mu\theta = 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$, οπότε $\theta = \pi$.

β) Για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται: $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + 1y = 1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος

είναι $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{3}$ και $\eta\mu\omega = \frac{2}{3}$, διότι

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \neq 1.$$

γ)

i. Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2, y_2) με $x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2 = \eta\mu\varphi$, τότε θα ικανοποιεί και την πρώτη εξίσωση, $-x + 2y = 1$. Δηλαδή:

$$-\sigma\upsilon\nu\varphi + 2\eta\mu\varphi = 1 \quad (1).$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα:

$$-\sigma\upsilon\nu\varphi + 2\eta\mu\varphi = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\varphi = 1 + \overset{\eta\mu\varphi > 0}{\underset{\sigma\upsilon\nu\varphi > 0}{\sigma\upsilon\nu\varphi}} \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu^2\varphi = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi \Leftrightarrow$$

$$4(1 - \sigma\upsilon\nu^2\varphi) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi \Leftrightarrow$$

$$5\sigma\upsilon\nu^2\varphi + 2\sigma\upsilon\nu\varphi - 3 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού με $\Delta = 64 > 0$ και ρίζες

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = -1, \text{ που απορρίπτεται γιατί } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}.$$

Άρα από την (1) έχουμε:

$$-\frac{3}{5} + 2\eta\mu\varphi = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\varphi = \frac{8}{5} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}.$$

ii. Η λύση $(x_2, y_2) = (\sigma\upsilon\nu\varphi, \eta\mu\varphi) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ του συστήματος (Σ) θα ικανοποιεί και την

δεύτερη εξίσωσή του, δηλαδή

$$\frac{3}{5} + \lambda \cdot \frac{4}{5} = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} \cdot \lambda \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha=2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\sin(\pi - x) = -\sin x$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = \sin x$.

Άρα: $f(x) = 2\sin^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha = 2\sin^2 x - 3\sin x + \alpha$.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(-x) = 2\sin^2(-x) - 3\sin(-x) + \alpha = 2\sin^2 x - 3\sin x + \alpha = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ αν και μόνον

αν $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 \frac{\pi}{3} - 3\sin \frac{\pi}{3} + \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

δ) Με $\alpha = 2$ έχουμε $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 2$.

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 2\eta\mu^2 x + 9\sin x - 9 = 0 \Leftrightarrow \\ 2\sin^2 x - 3\sin x + 2 &= 2(1 - \sin^2 x) + 9\sin x - 9 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 12\sin x + 9 = 0 \Leftrightarrow \\ (2\sin x - 3)^2 &= 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2}, \text{ αδύνατη.} \end{aligned}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ με $a > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (a + 2)\eta\mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x) = a\eta\mu 2x + 2\eta\mu 2x = (a + 2)\eta\mu 2x$.

β)

i. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f καθορίζεται από το συντελεστή $a + 2$.

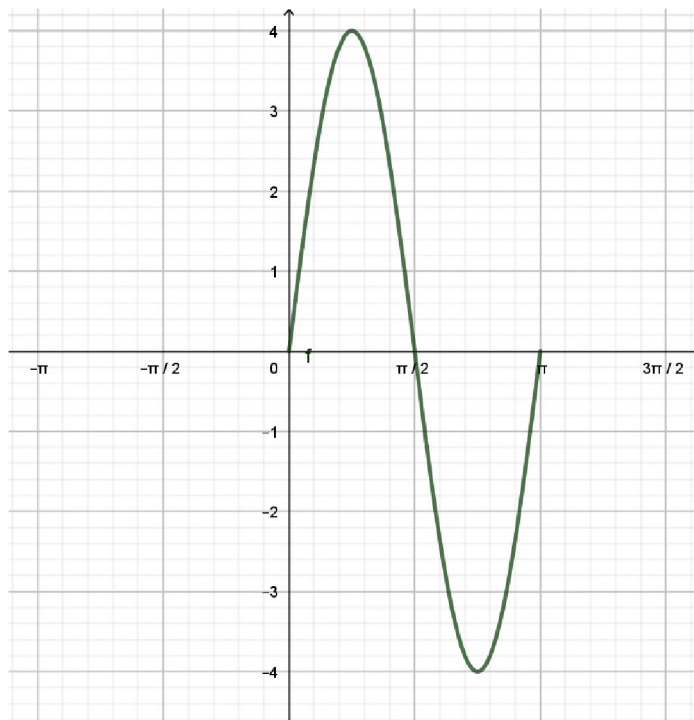
Πρέπει δηλαδή $a + 2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

ii. Η περίοδος $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = 4\eta\mu 2x$ στο διάστημα $[0, \pi]$, βάσει του παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$4\eta\mu 2x$	0	4	0	-4	0

δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



δ) Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - (1 - \eta\mu^2 2x) \Leftrightarrow \\ \eta\mu^2 2x - 4\eta\mu 2x + 4 &= 0 \Leftrightarrow (\eta\mu 2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = 2 \text{ αδύνατη.} \end{aligned}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

- i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

(Μονάδες 6)

- ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

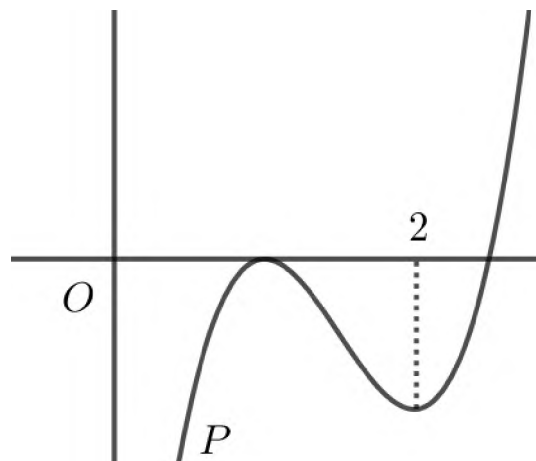
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



ΛΥΣΗ

α)

i. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - 1)$ ισχύει ότι:

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta = 3.$$

Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)$ είναι το $P(2)$. Άρα,

$$P(2) = -1 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^3 + \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 - 5 = -1 \Leftrightarrow$$

$$16 + 4\alpha + 2\beta - 5 = -1 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha + 2\beta = -12 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -6.$$

ii. Για να βρούμε τις τιμές των α, β λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + (3 - \alpha) = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + 3 = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 12 \end{cases}.$$

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x)$: $(x - 1)$ με το σχήμα Horner και έχουμε:

2	-9	12	-5	1
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

Άρα, $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x + 5)$. Το τριώνυμο $2x^2 - 7x + 5$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9$ και ρίζες:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{9}}{4} = \frac{5}{2} \text{ και } x_2 = \frac{7 - \sqrt{9}}{4} = 1.$$

$$\text{Άρα, } P(x) = (x - 1)2(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right) = 2(x - 1)^2\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

Η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2\left(x - \frac{5}{2}\right) < 0.$$

Ο πίνακας προσήμων του $P(x)$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	0	+	+
$(x-\frac{5}{2})$	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	-	+

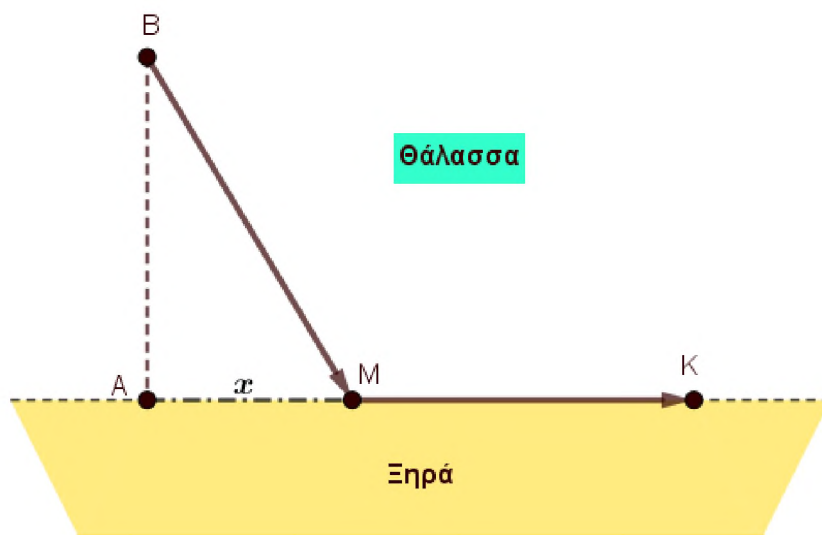
Άρα, $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{5}{2})$.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1,0)$ και $(\frac{5}{2}, 0)$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

ΘΕΜΑ 4

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το A . Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3 km/h και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5 km/h .

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t , είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x\text{ km}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή –δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Είναι $BA = 2$, $MA = x$, $MK = 4 - x$.

Η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t , είναι: $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.

α) Το τρίγωνο BAM είναι ορθογώνιο, οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

β) Η κίνηση γίνεται σε δύο μέσα – κολύμβηση στη θάλασσα και τρέξιμο στη ξηρά – με διαφορετικές (αλλά σταθερές) ταχύτητες $v_K = 3 \frac{km}{h}$ και $v_T = 5 \frac{km}{h}$ αντίστοιχα. Έτσι, ο συνολικός χρόνος κίνησης θα προκύψει ως άθροισμα των δύο επιμέρους χρόνων.

- Ο χρόνος κίνησης από το B στο M : $t_1 = \frac{BM}{v_K} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$
- Ο χρόνος κίνησης από το M στο K : $t_2 = \frac{MK}{v_T} = \frac{4-x}{5}$
- Ο χρόνος της συνολικής κίνησης: $t_{ολ} = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}$

Επομένως, η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η

$$t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

γ) Αρκεί να λυθεί η εξίσωση:

$$t(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$5\sqrt{4+x^2} + 3(4-x) = 20 \Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2} = 3x + 8$$

Αφού $x \in [0, 4]$ έπεται ότι $3x + 8 > 0$, επομένως ισοδύναμα είναι:

$$25(4+x^2) = (3x+8)^2 \Leftrightarrow 100 + 25x^2 = 9x^2 + 48x + 64 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Η λύση είναι δεκτή, διότι $\frac{3}{2} \in [0, 4]$.

Επομένως ο κολυμβητής θα βγει στην ακτή σε απόσταση $1,5 \text{ km}$ από το σημείο A .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2 = ex^3 + 4x^2 \ln e^{\frac{1}{2}} + 2 =$
 $= ex^3 + 4x^2 \cdot \frac{1}{2} \ln e + 2 = ex^3 + 2x^2 + 2.$

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$P(x) - (ex + 4) = 0 \Leftrightarrow ex^3 + 2x^2 + 2 - ex - 4 = 0 \Leftrightarrow ex^3 + 2x^2 - ex - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(ex + 2) - (ex + 2) = 0 \Leftrightarrow (ex + 2) \cdot (x^2 - 1) = 0.$$

Άρα οι τετμημένες των σημείων τομής είναι: $x = 1, x = -1$ και $x = -\frac{2}{e}.$

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$ θα λύσουμε την ανίσωση:

$$P(x) - (ex + 4) > 0 \Leftrightarrow (ex + 2) \cdot (x^2 - 1) > 0.$$

Οι ρίζες του $(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$ είναι $x = 1, x = -1$ και $x = -\frac{2}{e}.$

Το πρόσημο του $(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{e}$	1	$+\infty$
$(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Άρα $x \in (-1, -\frac{2}{e}) \cup (1, +\infty).$

δ) Παρατηρούμε ότι το $P(e) - e^2 - 4$ είναι η τιμή του $P(x) - (ex + 4)$ για $x = e.$

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε $P(e) - e^2 - 4 > 0$, αφού $e > 1.$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Η διαίρεση $P(x):Q(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - x^2} & x^2 - 2 \\
 & -2x^2 + \alpha x + \beta \\
 & \underline{2x^2 \quad -4x + 2} \\
 & (\alpha - 4)x + \beta + 2
 \end{array}$$

Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$, θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, που συμβαίνει μόνο όταν $\alpha - 4 = 0$ και $\beta + 2 = 0$, δηλαδή $\alpha = 4$ και $\beta = -2$.

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$ έχουμε $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$.

i. Η διαίρεση $P(x):(x^2 + 5)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2 & x^2 + 5 \\
 \underline{-x^4 - 5x^2} & x^2 - 2x - 6 \\
 & -2x^3 - 6x^2 + 4x - 2 \\
 & \underline{2x^3 + 10x} \\
 & -6x^2 + 14x - 2 \\
 & \underline{6x^2 + 30} \\
 & 14x + 28
 \end{array}$$

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$

ii. Η εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$ με τη βοήθεια της παραπάνω ταυτότητας γίνεται

$$(x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28 = 14(x + 2) \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28 = 14x + 28 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) = 0$$

και επειδή $x^2 + 5 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $x^2 - 2x - 6 = 0$ δηλαδή

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

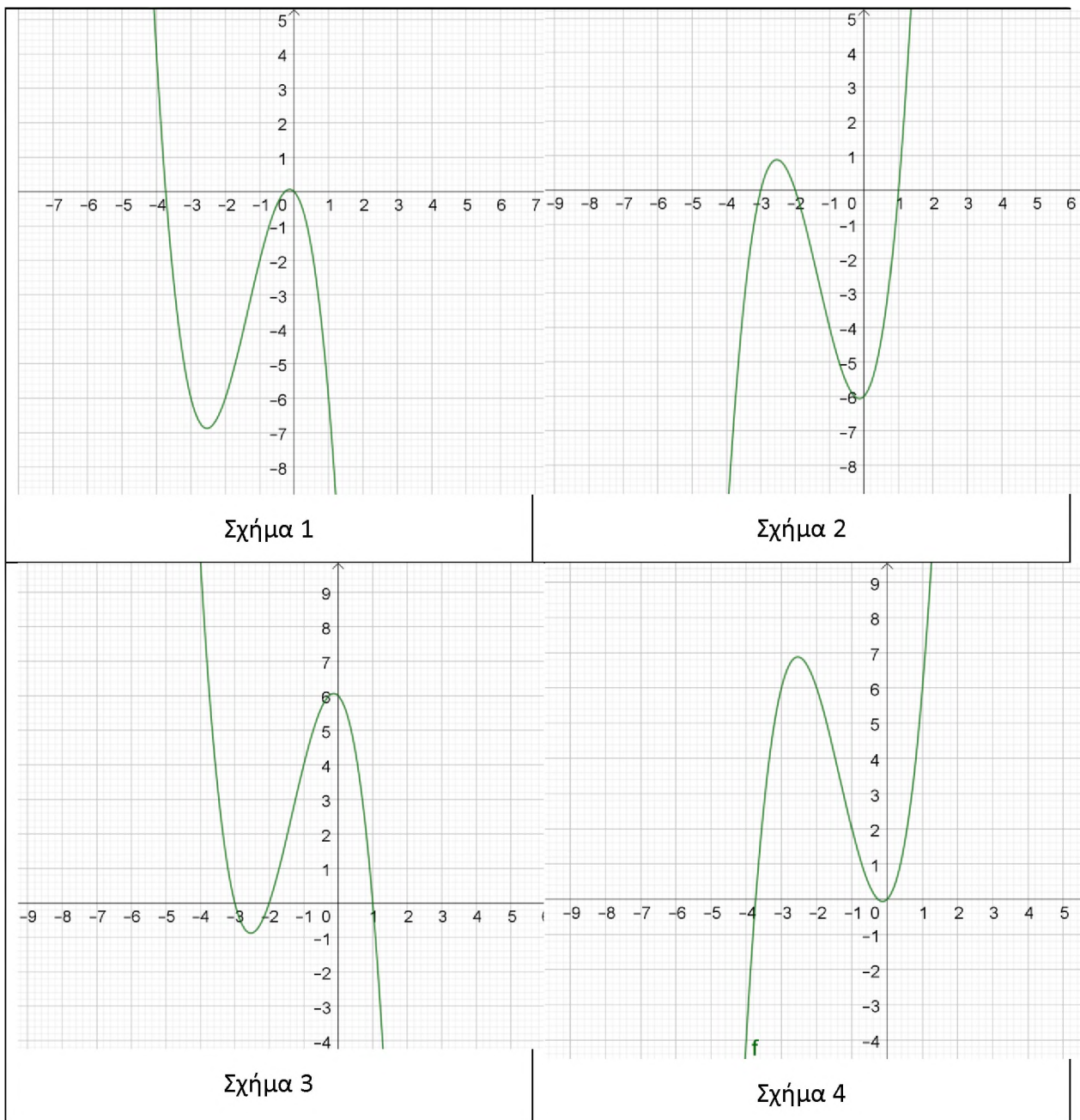
(Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Το $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$ έχει άθροισμα συντελεστών ίσο με το 0, οπότε έχει ρίζα το 1.

Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

-1	-4	-1	6	1
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 0$ γίνεται ισοδύναμα $(x-1)(-x^2-5x-6) < 0$.

Ο πίνακας προσήμου του $(x-1)(-x^2-5x-6)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	+	+
$-x^2-5x-6$	-	+	-	-	-
$(x-1)(-x^2-5x-6)$	+	-	+	-	-

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty)$.

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα xx' , για κάθε $x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty)$. Το μόνο από τα δοσμένα σχήματα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

Εναλλακτικά, αφού $P(0) = 6$ θα πρέπει η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο $(0, 6)$ και το μόνο σχήμα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

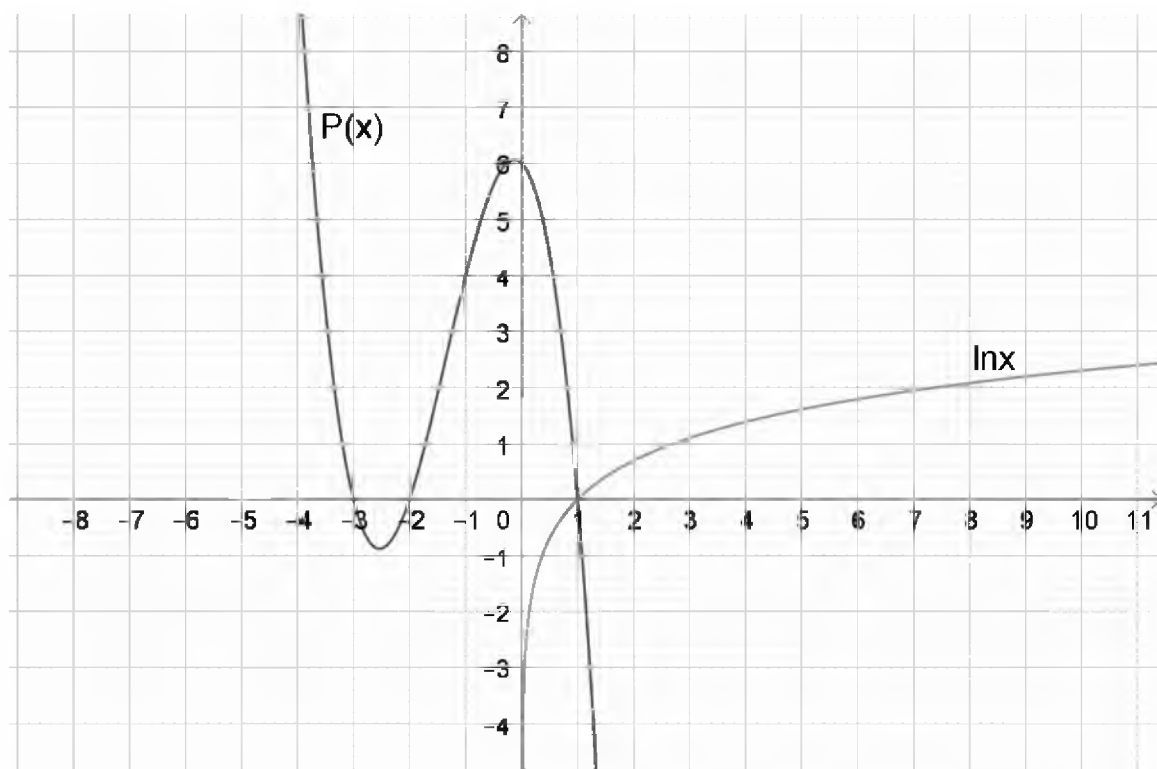
γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώσουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$ όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσουμε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1, που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

Εναλλακτικά, η εξίσωση $P(x) = \ln x$ ορίζεται για $x > 0$.

Για $x > 1$ έχουμε ότι $P(x) < 0 < \ln x$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(1, +\infty)$.

Επίσης για $0 < x < 1$ έχουμε ότι $\ln x < 0 < P(x)$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(0, 1)$.

Τέλος $P(1) = \ln 1 = 0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$ με $\omega \neq 3$ είναι ισοδύναμη με την $(\omega^2 - 1)(\omega - 3) > 0$.

Το πρόσημο του $(\omega^2 - 1)(\omega - 3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$\omega - 3$	-	-	-	ϕ	+
$\omega^2 - 1$	+	ϕ	-	ϕ	+
$(\omega - 3)(\omega^2 - 1)$	-	ϕ	+	ϕ	+

Συνεπώς η ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$ αληθεύει για κάθε $\omega \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$.

β) Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει

$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} > 0$. Αν θέσουμε $e^x = \omega$ η ανίσωση $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} > 0$ γίνεται $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$ που όπως δείξαμε

στο α) αληθεύει για $\omega \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$.

Συνεπώς θα πρέπει $-1 < \omega < 1 \Leftrightarrow -1 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ ή $\omega > 3 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$

Τελικά η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$.

γ) Η εξίσωση $A = -\ln 3$ ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$ και γίνεται ισοδύναμα

$$\ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3}\right) = \ln 3^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} - 3 = e^x - 3 \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x(3e^x - 1) = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$3e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \frac{1}{3}$$

και επειδή $\frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{3} < 0$ η λύση $x = \ln \frac{1}{3}$ είναι δεκτή.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

Για κάθε $x \in A$, είναι φανερό ότι $-x \in A$ και

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln(-x)^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 = f(x)$$

Επομένως η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} \ln |x|^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln |x| = \ln |x| = \ln x$$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται

στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα

προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει

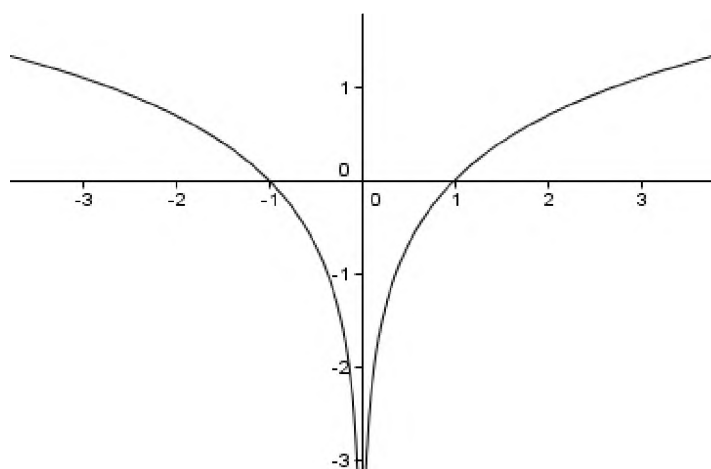
αν σχεδιάσουμε τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \ln x, x > 0$ και στη συνέχεια

θεωρήσουμε το συμμετρικό του

σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.



δ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$, μόνο όταν $f(x) < 2$. Με $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln x^2 < 2 \Leftrightarrow \ln x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 < e^4 \Leftrightarrow |x| < e^2 \Leftrightarrow -e^2 < x < e^2$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$ για κάθε x με $x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$.

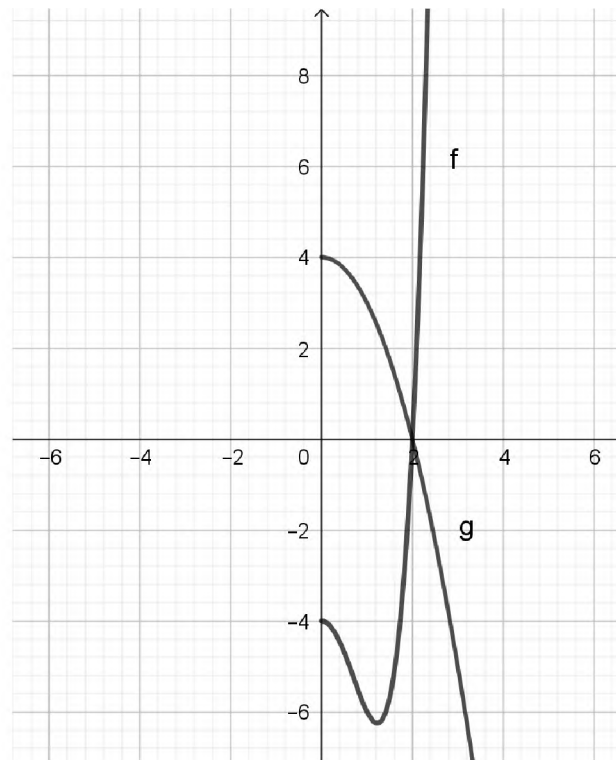
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 6)

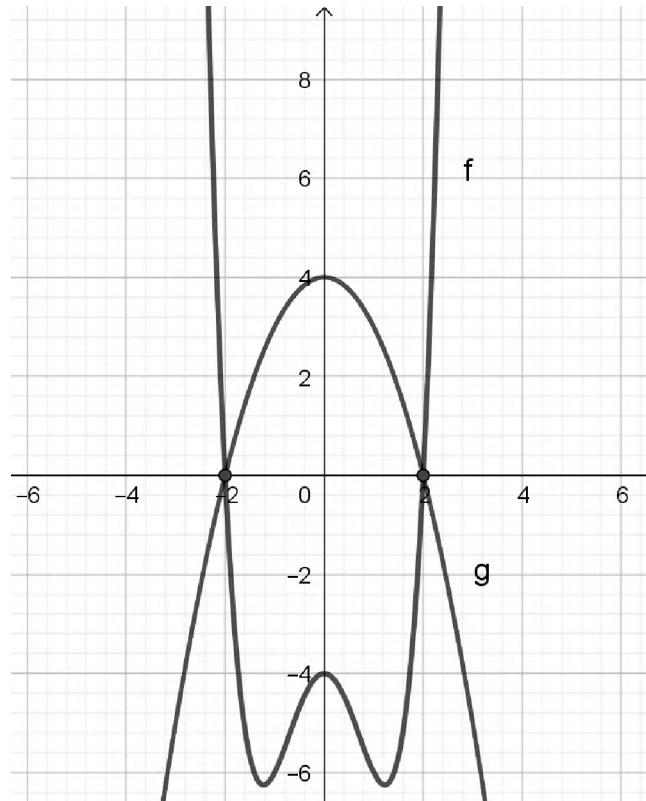
ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, άρα έχουμε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Επιπλέον } f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x).$$

$$\text{Όμοια } g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x).$$

β) Από το α) ερώτημα οι συναρτήσεις f και g είναι άρτιες. Η γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g συμπληρώνονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ)

i. Έχουμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$. (1)

Θέτουμε $x^2 = y$, οπότε (1): $y^2 - 2y - 8 = 0$ με $\Delta = 36$ και $y_1 = -2, y_2 = 4$, άρα $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$ που είναι οι ζητούμενες λύσεις.

ii. Γραφικά, λύση της ανίσωσης $f(x) < g(x)$ είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από την γραφική παράσταση της f . Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-2, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x = x(\alpha x^2 + \beta x + 1)$, οπότε έχει μία ρίζα τη $x = 0$. Συνεπώς οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες, θα είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + 1$, που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1.

Τελικά το $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και -1.

β) Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 1 = 0$ (1).

Επίσης $P(-1) = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta - 1 = 0$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι $2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε ότι $\alpha = -1$.

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$ είναι $P(x) = -x^3 + x = x(1 - x^2)$

ι. Το πρόσημό του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
x	-	-	0	+	+		
$1 - x^2$	-	0	+	+	0	-	
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

ii. Είναι $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, οπότε $P(\log \sqrt{10}) = P(\frac{1}{2}) > 0$, αφού όπως

δείξαμε παραπάνω $P(x) > 0$ για $x \in (0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε $P(x) = (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$P(x) = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1 = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) = 0$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\pm \frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

β) Δείξαμε στο α) ότι αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση $P(x) = 1$ είναι οι $\pm \frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

Συνεπώς για να ήταν $P(\log 5) = 1$, θα έπρεπε $\log 5 = \frac{1}{2}$ ή $\log 5 = -\frac{1}{2}$ ή $\log 5 = \frac{2}{3}$.

Όμως $\log 5 \neq -\frac{1}{2}$ αφού $5 > 1 \Leftrightarrow \log 5 > 0$.

Επίσης $\log 5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5 = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5 = \sqrt{10}$ το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος $\log 5 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 5 = 10^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 5 = \sqrt[3]{10^2}$ το οποίο επίσης είναι άτοπο.

Συνεπώς $P(\log 5) \neq 1$.

γ) Είναι $P(x) = (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1$, οπότε $P(-1) = (4(-1)^2 - 1)(3(-1) - 2) + 1 = -14$ και

$$P(0) = (-1)(-2) + 1 = 3.$$

Αφού οι τιμές $P(-1), P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \kappa x - 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\kappa = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Για τη συνάρτηση f έχουμε:

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow (-x)^4 + \kappa(-x) - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow x^4 - \kappa x - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow 2\kappa x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το $2\kappa x$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $2\kappa = 0$ και ισοδύναμα $\kappa = 0$.

β) Για $\kappa = 0$, η συνάρτηση f είναι: $f(x) = x^4 - 1$.

i. Με $x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow x_1^4 - 1 > x_2^4 - 1$

Άρα: $f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, 0]$.

ii. Έχουμε: $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x^4 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x^4 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Για να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) < 0 \xrightarrow{x^2+1>0} x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x + 1) < 0.$$

Άρα $x \in (-1, 1)$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x \in (-1, 1)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 6)

β)

- i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

- ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu \frac{5\pi}{9} > \eta\mu \frac{10\pi}{9}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f , που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της, που είναι ίση με $-\rho$. Άρα $\rho = 2$.

Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης g , που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

$$\text{Άρα } \frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2.$$

β)

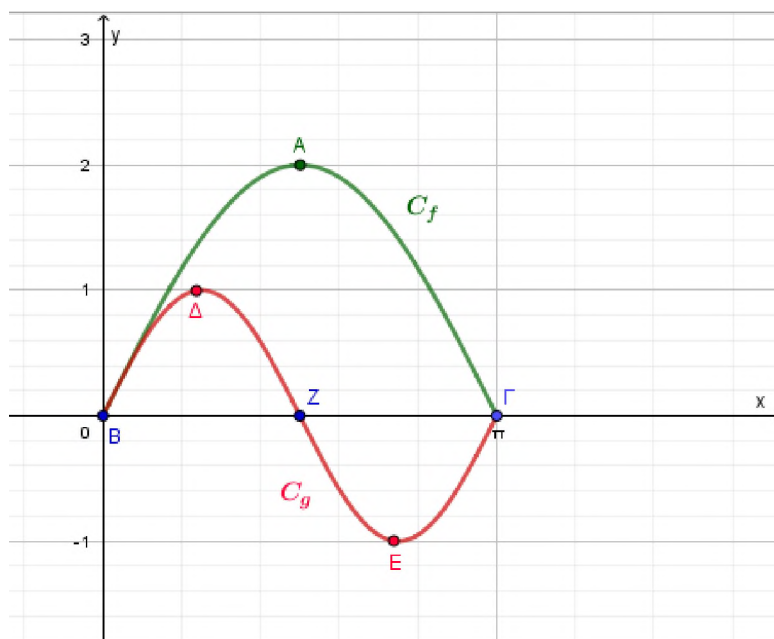
ι. Για τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, με $x \in [0, \pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0

Για τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(2x)$, με $x \in [0, \pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \eta\mu(2x)$	0	1	0	-1	0

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, είναι:



ii. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9} \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\left(2 \cdot \frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$$

Είναι: $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \pi$.

Επομένως, από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων προκύπτει ότι

$$f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > 0 \text{ και } g\left(\frac{5\pi}{9}\right) < 0.$$

Ως εκ τούτου είναι $f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

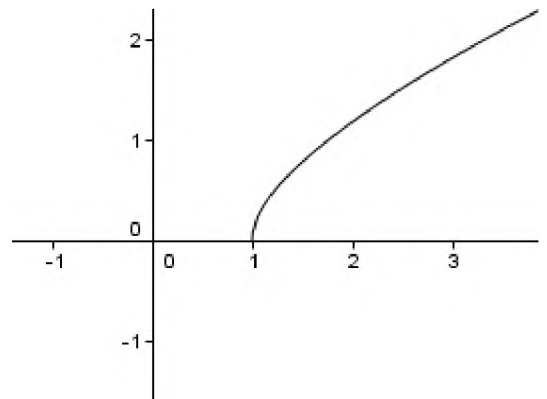
(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο όταν $x > 0$ και $x \ln x \geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x \geq 1$, οπότε $A_f = [1, +\infty)$. Ομοίως η g ορίζεται μόνο όταν $x > 0$ και $\ln x \geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x \geq 1$, οπότε $A_g = [1, +\infty)$.

β) Με $x \geq 1$ έχουμε:

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x \ln x} - \sqrt{\ln x} = (\sqrt{x} - 1)\sqrt{\ln x} \geq 0$$

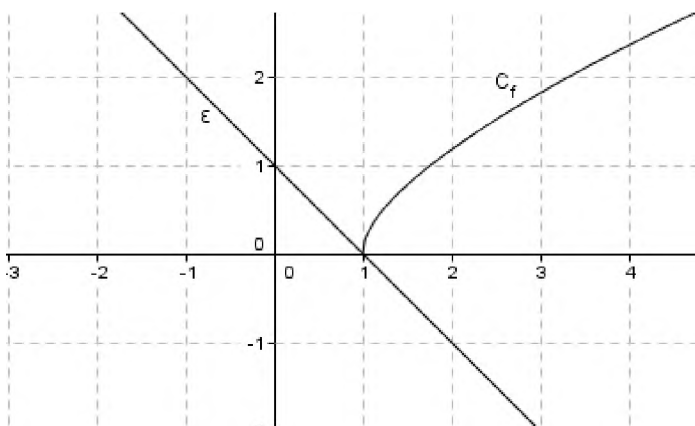
αφού καθένας από τους όρους του γινομένου είναι μη αρνητικός. Επομένως, η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

γ) i. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A_f = [1, +\infty)$.

ii. Επειδή $\frac{5}{3} - \frac{7}{5} = \frac{25-21}{15} = \frac{4}{15} > 0$, ισχύει $\frac{5}{3} > \frac{7}{5}$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα

συμπεραίνουμε ότι $f\left(\frac{5}{3}\right) > f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Η ευθεία $\varepsilon: y = 1 - x$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $(1, 0)$ και $(0, 1)$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το $(1, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = 1 - x$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.



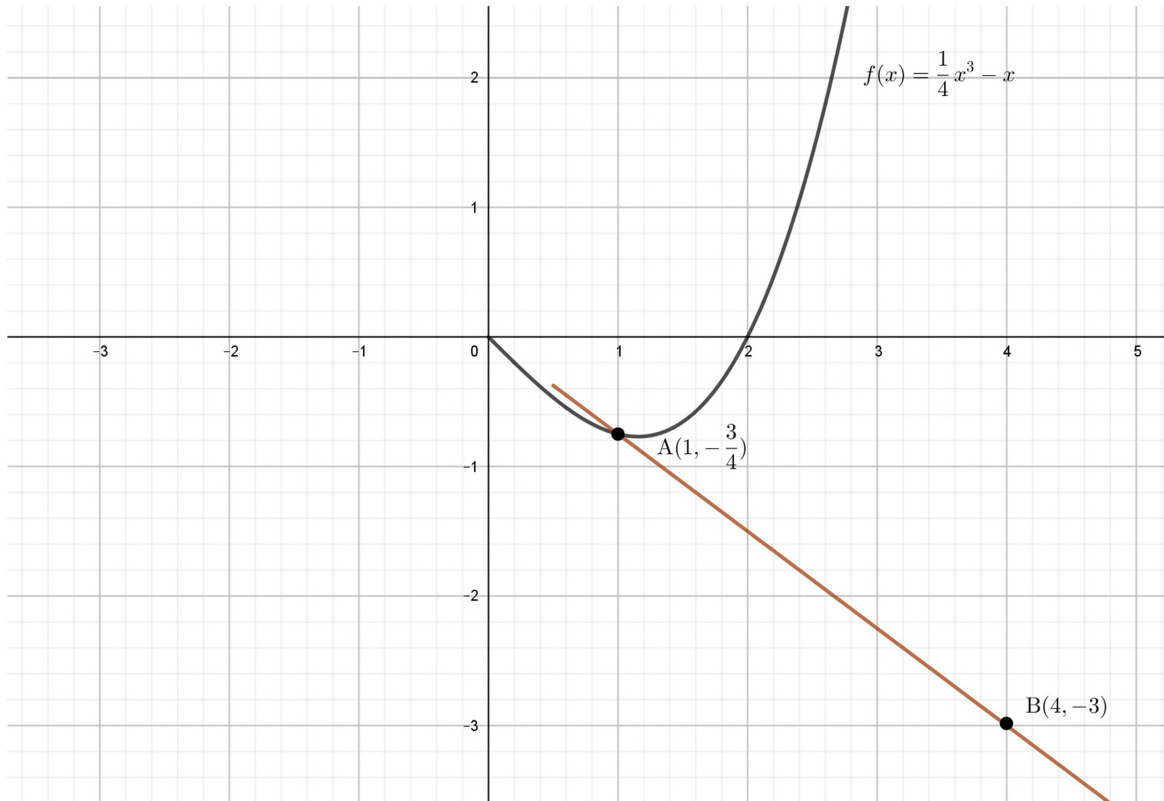
Επισημάνση.

Στο πλαίσιο μιας αλγεβρικής λύσης θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε ρίζες στο διάστημα $[1, +\infty)$, να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός 1 είναι η μία ρίζα της και να αποδείξουμε ότι αν $x > 1$ έχουμε $f(x) > f(1)$, δηλαδή $f(x) > 0$ και $1 - x < 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα μεγαλύτερη από τη μονάδα.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία AB έχει εξίσωση της μορφής $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$. Το σημείο $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ είναι σημείο της (ε) , άρα:

$$-\frac{3}{4} = \alpha \cdot 1 + \beta \quad (1).$$

Το σημείο $B(4, -3)$ είναι σημείο της (ε) , άρα:

$$-3 = \alpha \cdot 4 + \beta \quad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} = \alpha \cdot 1 + \beta \\ -3 = \alpha \cdot 4 + \beta \end{cases} \stackrel{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3\alpha = -3 + \frac{3}{4} \\ 4\alpha + \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{4} \\ 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{4} \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = -\frac{3}{4}x$.

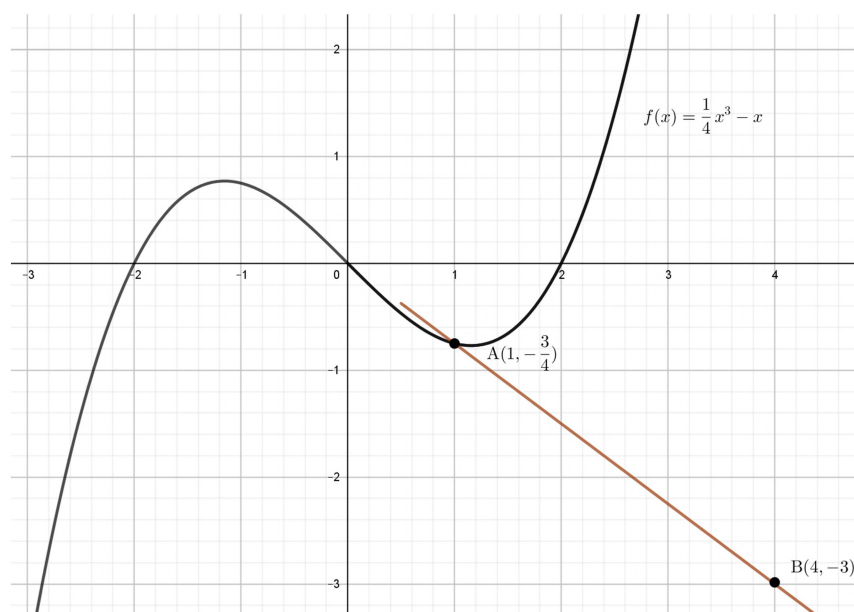
β)

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει και $-x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

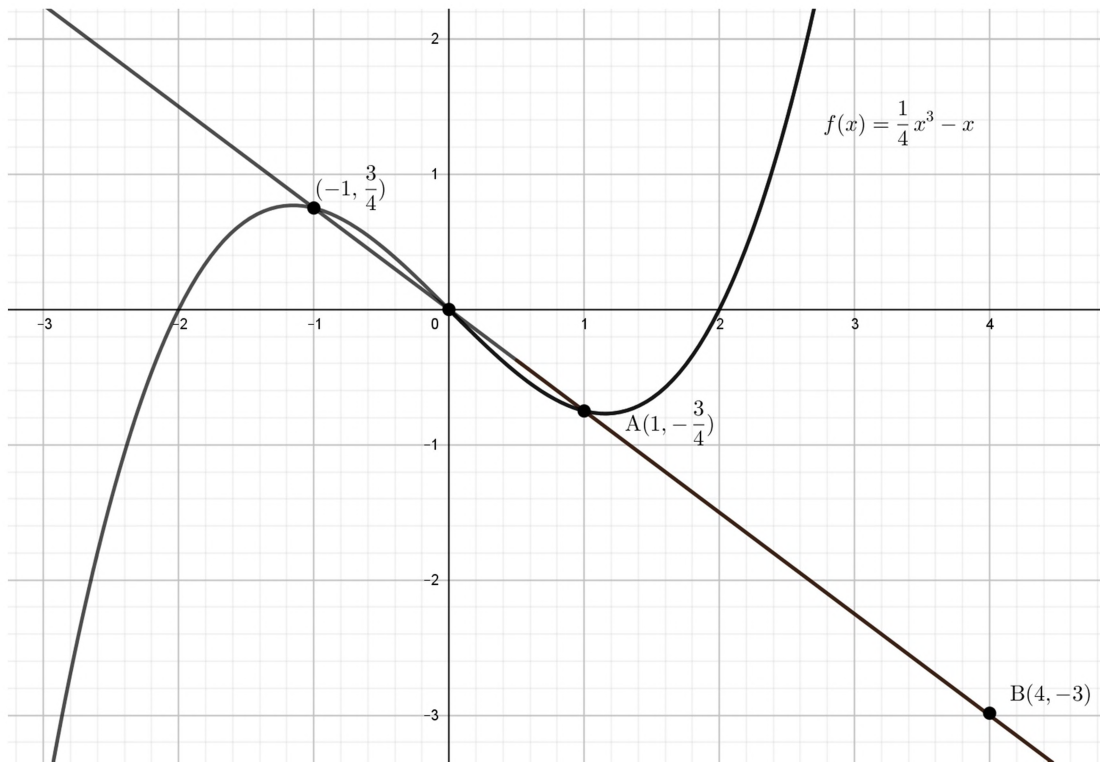
$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - (-x) = -\frac{1}{4}x^3 + x = -\left(\frac{1}{4}x^3 - x\right) = -f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή ότι η f είναι περιττή.

Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$:



γ) Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς το $(0,0)$, το σημείο $\left(-1, \frac{3}{4}\right)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση η οποία διέρχεται και από το $(0,0)$. Όμως τα σημεία αυτά ανήκουν και στην ευθεία AB . Άρα τα κοινά σημεία της ευθείας και της καμπύλης είναι τα $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1, \frac{3}{4}\right)$.



Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{4}x^3 - x = -\frac{3}{4}x$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{1}{4}x^3 - x = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 4x + 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

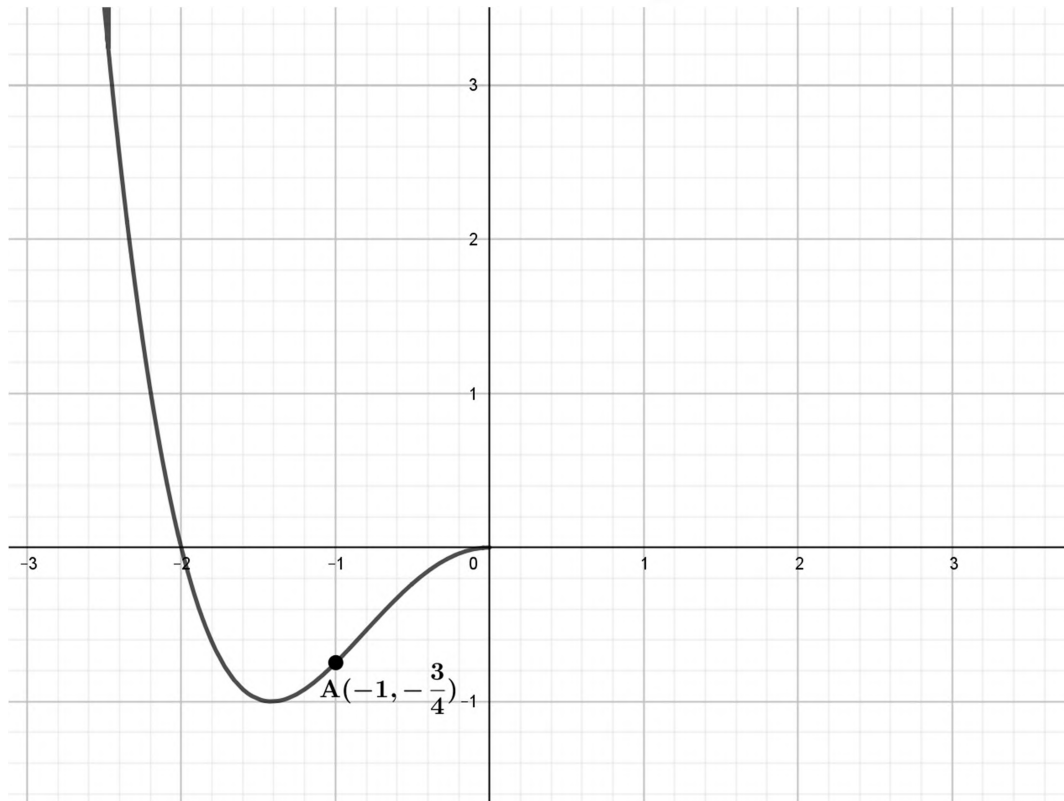
$$x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1, \frac{3}{4}\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ και το σημείο } A\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \text{ αυτής.}$$



α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = -1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο

τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο $(-2, 0)$, οπότε έχουμε ισοδύναμα:

$$f(-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}(-2)^4 + \alpha \cdot (-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

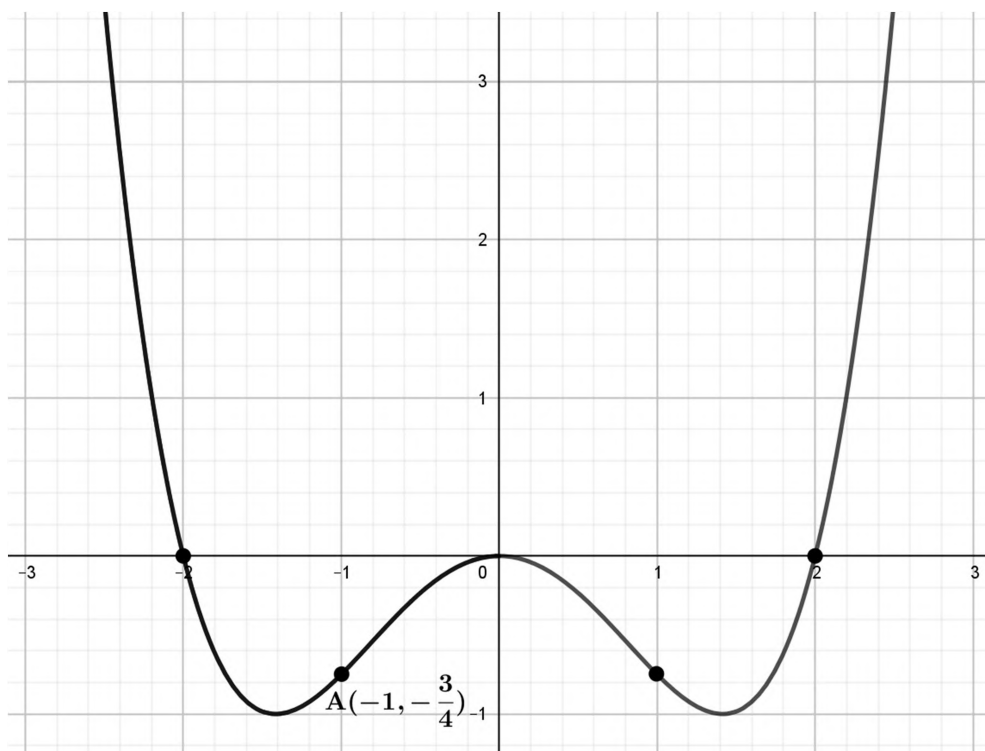
$$\alpha = -1.$$

β)

i. Έχουμε $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει και $-x \in \mathbb{R}$. Οπότε:

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - (-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - x^2 = f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x) = f(x)$, δηλαδή ότι η f είναι άρτια. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα:



γ) Πραγματικά $f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(-\sqrt{3})^4 - (-\sqrt{3})^2 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$, οπότε το σημείο $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4})$

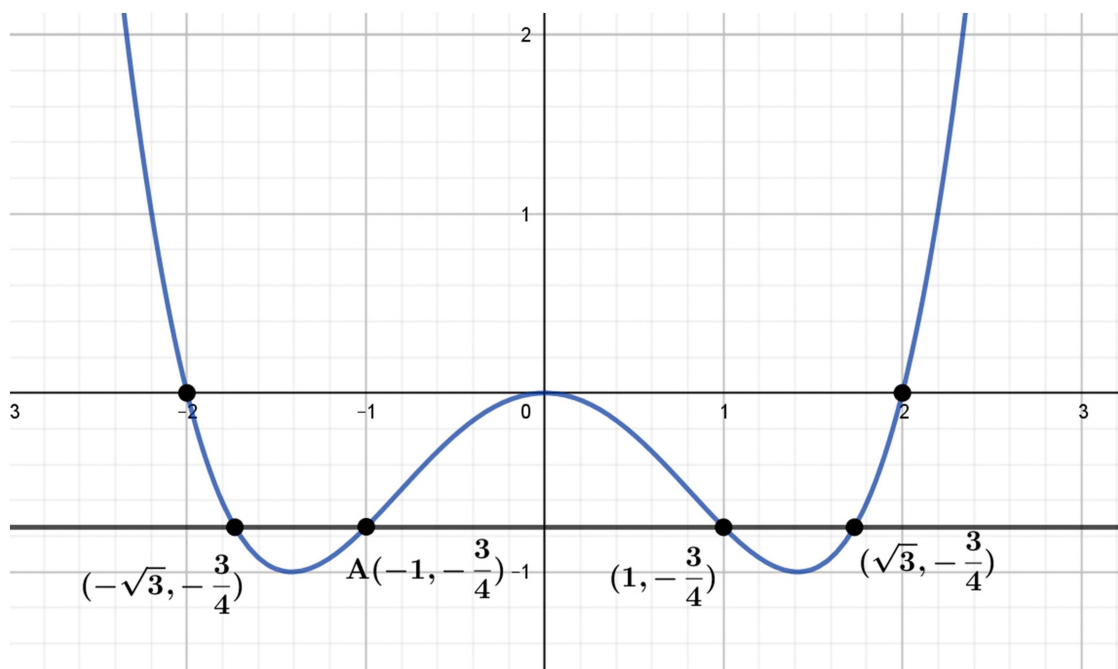
ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς τον $y'y$ άξονα, τα σημεία $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκουν επίσης στη γραφική παράσταση και η ευθεία $y = -\frac{3}{4}$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με αυτήν, τα $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\right)$.

Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = -\frac{3}{4}$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{4}x^4 - x^2 &= -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ x^4 - 4x^2 + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2 = 1 \quad \text{ή} \quad x^2 &= 3 \end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι τέσσερις: $x = -1$, $x = 1$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ και συνεπώς τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f είναι τα $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\right)$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60\text{cm}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0.$$

(Μονάδες 10)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα έχει κάθετες πλευρές x , y και υποτείνουσα $(x+2)$. Το εμβαδόν του είναι $E = 60\text{cm}^2$, οπότε: $\frac{xy}{2} = 60 \Leftrightarrow y = \frac{120}{x}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= x^2 + y^2 \Leftrightarrow \\(x+2)^2 &= x^2 + \left(\frac{120}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \\x^2 + 4x + 4 &= x^2 + \frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow \\x + 1 &= \frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow \\x^3 + x^2 - 3600 &= 0. \quad (1)\end{aligned}$$

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $x^3 + x^2 - 3600 = 0$ που είναι μικρότερες του 16 και είναι θετικοί αριθμοί (το x είναι μήκος πλευράς τριγώνου), είναι οι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 και 15. Οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 10 δεν μπορεί να είναι ρίζες, γιατί το άθροισμα $(x^3 + x^2)$ πρέπει να ισούται με 3600. Παρατηρούμε ότι $10^3 + 10^2 - 3600 \neq 0$, άρα το 10 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, όπως δεν είναι και το 12. Καταλήγουμε στο 15 και κάνουμε τη διαίρεση $(x^3 + x^2 - 3600) \div (x - 15)$:

$$\begin{array}{r|l}x^3 + x^2 + 0x - 3600 & x - 15 \\(+)\ -x^3 + 15x^2 & \hline16x^2 + 0x - 3600 & x^2 + 16x + 240 \\(+)\ -16x^2 + 240x & \hline240x - 3600 & \\(+)\ -240x + 3600 & \hline0 & \end{array}$$

Οπότε η εξίσωση (1) γράφεται: $(x-15)(x^2+16x+240)=0$.

Η μόνη λύση της εξίσωσης είναι $x=15$, γιατί η $x^2+16x+240=0$ είναι αδύνατη ($\Delta = -704 < 0$).

Άρα οι κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι $15cm$ και $\frac{120}{15}=8cm$. Η υποτείνουσα είναι $15+2=17cm$.

γ) Ένα είναι το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος και αυτό είναι το τρίγωνο που βρήκαμε στο β) ερώτημα, γιατί η εξίσωση $x^3 + x^2 - 3600 = 0$ δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $x = 15$.